Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, K -тривиальные структуры на полных пересечениях Фано, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 608–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:03:18

K -тривиальные структуры на полных пересечениях Фано

А. В. Пухликов

Доказано, что любая структура расслоения на многообразия кодаировой размерности нуль на общем полном пересечении Фано индекса 1 размерности M в $\mathbb{P}^{M+k}$ при $M \geq 2k + 1$ есть пучок гиперплоских сечений. Описаны K -тривиальные структуры на многообразиях с пучком полных пересечений Фано.

Библиография: 9 названий.

1. Формулировка основного результата. Пусть $k \geq 2$, $M \geq 2k + 1$ и набор целых чисел $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ удовлетворяет условиям $d_k \geq \dots \geq d_1 \geq 2$ и

$$d_1 + \dots + d_k = M + k.$$

Предположим дополнительно, что если $M = 2k + 2$, то $k \geq 4$, а если $M = 2k + 1$, то $k \geq 5$ и $(d_1, \dots, d_k) \neq (2, \dots, 2, k + 3)$.

Символ $\mathbb{P}$ обозначает комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^{M+k}$. Рассмотрим гладкое полное пересечение коразмерности k в $\mathbb{P}$

$$V = \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset \mathbb{P},$$

где $f_i \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_i))$ – однородные многочлены степени d_i . Цель данной заметки – дать полное описание структур не максимальной кодаировой размерности на общем полном пересечении V , откуда немедленно следует описание K -тривиальных структур на многообразиях с пучком полных пересечений.

Пусть $\beta: W \rightarrow S$ – морфизм проективных многообразий со связными слоями (расслоение). Под *относительной кодаировой размерностью* $\kappa(W/S)$ расслоения W/S понимается кодаирова размерность слоя общего положения $\beta^{-1}(s)$, $s \in S$. Под *структурой* расслоения относительной кодаировой размерности $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, \dots, M\}$ на многообразии V понимается произвольное бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow W$, где $\beta: W \rightarrow S$ – расслоение относительной кодаировой размерности κ . Хорошо известно [1], что общее полное пересечение V бирационально сверхжестко, в частности, на V нет структур расслоения отрицательной относительной кодаировой размерности. Основной результат настоящей заметки – следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\chi: V \dashrightarrow W$ – структура расслоения не максимальной относительной кодаировой размерности на достаточно общем полном пересечении

$V \subset \mathbb{P}$, т.е. выполнено неравенство

$$\kappa(W/S) + \dim S < \dim W = M.$$

Тогда $\kappa(W/S) = 0$, $S = \mathbb{P}^1$ и существует однозначно определенное линейное подпространство $\Lambda \subset \mathbb{P}$ коразмерности два такое, что коммутативна диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad} & S \end{array}$$

где $\pi = \pi_\Lambda|_V: V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ есть ограничение на V линейной проекции $\pi_\Lambda: \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из подпространства Λ .

Очевидно, ограничение на V любой проекции π_Λ из подпространства коразмерности два есть K -тривиальная структура. Из теоремы 1 немедленно следует полное описание таких структур на многообразиях с пучком полных пересечений Фано. Напомним конструкцию этих многообразий [2].

Пусть $\Pi \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^1$ – локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{P}$. Рассмотрим гладкое подмногообразие $X \subset \Pi$ коразмерности k такое, что каждый слой проекции $\mu_X = \mu|_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ есть (возможно, особое) полное пересечение Фано типа $d_1 \cdots d_k$ в $\mu^{-1}(t) \cong \mathbb{P}$. Многообразие X предполагается общим в смысле условий регулярности [2; теорема 5]; кроме того, слой общего положения $\mu_X^{-1}(t)$ предполагается общим в смысле предложения 1, сформулированного и доказанного ниже.

Пусть $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Gr}(M+k-2, \Pi)$ – произвольное отображение, сопоставляющее точке $t \in \mathbb{P}^1$ линейное подпространство коразмерности два $\sigma(t) \in \text{Gr}(M+k-2, \mu^{-1}(t))$ в слое $\mu^{-1}(t) \cong \mathbb{P}$. Символом Δ_σ обозначим линейчатую поверхность, состоящую из гиперплоскостей $H \subset \mu^{-1}(t)$, содержащих подпространство $\sigma(t)$, символом

$$\pi_\sigma: \Pi \dashrightarrow \Delta_\sigma$$

– послонную проекцию, $\pi_\sigma|_{\mu^{-1}(t)}$ есть проекция из подпространства $\sigma(t)$ на $\mathbb{P}^1$. Из теоремы 1 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что расслоение Фано $X/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет условиям*

- (i) $K_X^2 + 2H_F \notin \text{Int } A_+^2 X$,
- (ii) $-K_X \notin A_{\text{mov}}^1 X$,

где $H_F = (-K_X \cdot F)$ – класс гиперплоского сечения слоя проекции μ_X в $A^2 X$. Тогда для любой структуры $\chi: X \dashrightarrow W$ расслоения относительной кодировой размерности ноль имеем $\dim S = 2$ и, более того, найдутся сечение $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Gr}(M+k-2, \Pi)$ и бирациональное отображение $\gamma: \Delta_\sigma \dashrightarrow S$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & W \\ \pi_\sigma \downarrow & & \downarrow \beta \\ \Delta_\sigma & \xrightarrow{\gamma} & S \end{array}$$

Теорема 2 выводится из теоремы 1 тривиальным образом, см. доказательство теоремы 5 в [2].

2. Сводка известных результатов. Параллельность задач описания структур рационально связного расслоения (или структур отрицательной относительной кодаировой размерности) и структур относительной кодаировой размерности нуль была замечена в XIX в. Если для заданного рационально связного многообразия первая задача допускает полное решение, то и вторая задача решается теми же методами (но не наоборот!). На современном этапе развития алгебраической геометрии первой работой по описанию структур относительной кодаировой размерности нуль была [3]. В [4] из результатов [5] было выведено описание K -тривиальных структур на общих гиперповерхностях Фано индекса 1 (аналог теоремы 1 для этих многообразий). См. также [6], [7]. В [1] был дан набросок доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *В предположениях теоремы 1 любая структура $\chi: V \dashrightarrow W$ относительной кодаировой размерности нуль на V есть пучок: $\dim S = 1$.*

Теорема 3 слабее, чем теорема 1. На самом деле, в [1; раздел 0.4] был дан набросок доказательства следующего факта: в предположениях теоремы 1 пусть Σ есть $(\beta \circ \chi)$ -образ на V произвольной подвижной линейной системы на базе S , $\Sigma \subset |-nK_V|$ для некоторого $n \geq 1$. Тогда найдется неприводимое подмногообразие коразмерности два $B \subset V$ такое, что

$$\text{mult}_B \Sigma = n, \quad (1)$$

в частности, самопересечение этой подвижной линейной системы $Z = (D_1 \circ D_2)$, $D_i \in \Sigma$, есть $Z = n^2 B$ (откуда немедленно следует теорема 3). Поскольку подмногообразие B численно эквивалентно сечению многообразия V линейным подпространством коразмерности два, в [1; раздел 0.4] была высказана гипотеза, что Σ составлена из некоторого пучка гиперплоских сечений V (это эквивалентно утверждению теоремы 1). В [8] было дано более подробное доказательство теоремы 3, использующее технику конусов [5], [9]. В приведенном в [8] рассуждении, однако, имелся пробел в доказательстве (единственной в этой работе) леммы, обобщающей технику конусов. (А именно, для описания пересечения базы конуса и лежащей на конусе кривой рассматривался набор свободных линейных систем, в каждой из которых выбирался общий дивизор, и делался вывод, что в нульмерном пересечении всех дивизоров этого набора с базой конуса все точки имеют кратность единица. Однако такое заключение не является очевидным и требует дополнительного обоснования. Утверждения такого типа обычно выводятся из теоремы Бертини, однако в рассматриваемой ситуации использование теоремы Бертини без дополнительных рассуждений было бы неправомерно. Теорема Бертини утверждает, что особенности общего дивизора подвижной линейной системы сосредоточены в ее базисном множестве. В [8] рассматривается набор свободных линейных систем, однако дивизоры в этих системах выбираются не независимо друг от друга, точнее, после выбора общего дивизора в одной из них выбор остальных дивизоров однозначно определен. Таким образом, теорема Бертини неприменима или для ее использования требуется специальное обоснование.) Наконец, в [2] рассуждение работы [8] было заменено

другим и доказательство теоремы 3 завершено (см. [2; предложение 3.5]). В качестве немедленного следствия была установлена

ТЕОРЕМА 4. *В предположениях теоремы 2 для любой структуры $\chi: X \dashrightarrow W$ относительной кодаировой размерности нуль имеем $\dim S = 2$ и структура χ согласована с проекцией $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. (См. [2; теорема 5].)*

Теорема 4 есть ослабленный вариант теоремы 2. В настоящей заметке мы делаем заключительный шаг в описании структур нулевой относительной кодаировой размерности на полных пересечениях Фано.

3. Структура доказательства теоремы 1. Многообразие V предполагается общим в следующем смысле. Во-первых, V удовлетворяет условию регулярности [1] в каждой точке, см. [1; раздел 1.2]. Во-вторых, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Достаточно общее полное пересечение V удовлетворяет следующему условию: для любого линейного подпространства $\Lambda \subset \mathbb{P}$ коразмерности $k+1$ пересечение $V \cap \Lambda$ есть неприводимое приведенное многообразие размерности $M - k - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в п. 5. Ввиду теоремы Лефшеца утверждение предложения справедливо при $M \geq 2k + 3$ для любого гладкого полного пересечения V . В рассмотрении нуждаются только два случая: $M = 2k + 2$ и $M = 2k + 1$.

Будем предполагать, что полное пересечение V удовлетворяет свойству предложения 1.

Пусть $\chi: V \dashrightarrow W$ – некоторая структура расслоения не максимальной относительной кодаировой размерности, Σ есть собственный прообраз на V относительно χ подъема на W некоторой подвижной линейной системы на базе S . Тогда $\Sigma \subset |-nK_V|$, $n \geq 1$, пара $(V, (1/n)\Sigma)$ не терминальна, система Σ составлена из пучка и имеется некоторое неприводимое подмногообразие $B \subset V$ коразмерности два такое, что выполнено неравенство (1) [1; предложение 3.5]. Пусть $b \in B$ – точка общего положения, $\Delta = T_b B \subset \mathbb{P}$ – касательное пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mu_\Delta: \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^{k+1}$ – линейная проекция из Δ , $\mu = \mu_\Delta|_V: V \dashrightarrow \mathbb{P}^{k+1}$ – ее ограничение на V . Тогда слои рационального отображения μ неприводимы и приведены, а линейная система Σ есть μ -подъем некоторой подвижной линейной системы Γ на $\mathbb{P}^{k+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в п. 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу предложения 1 множество $V \cap \Delta$ имеет коразмерность $k + 2$ в V . По соображениям размерности $\mu(B) = \overline{B}$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности два ($\overline{B}$ не может быть дивизором, так как в этом случае линейная система Γ , а потому и Σ , имели бы неподвижную компоненту), так что $B = \mu^{-1}(\overline{B})$. Следовательно,

$$\text{mult}_{\overline{B}} \Gamma = n,$$

где Γ есть линейная система гиперповерхностей степени n . Это возможно только в одном случае, когда $\overline{B} \subset \mathbb{P}^{k+1}$ есть линейное подпространство коразмерности два, а система Γ составлена из пучка гиперплоскостей, содержащих $\overline{B}$. Но тогда $B =$

$\Lambda \cap V$, где $\Lambda = \mu_{\Delta}^{-1}(\overline{B})$ – линейное подпространство коразмерности два в $\mathbb{P}$, а система Σ составлена из пучка сечений V гиперплоскостями, содержащими Λ . Этим теорема 1 доказана.

Как отмечено выше, теорема 2 немедленно вытекает из теоремы 1.

4. Линейные проекции и конуса. Докажем предложение 2. Неприводимость и приведенность слоев μ следует из предложения 1. Для доказательства основного утверждения – о том, что $\Sigma = \mu^*\Gamma$, – рассмотрим точку общего положения $p \in V$. Пусть $D \in \Sigma$ – содержащий ее дивизор. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо включение*

$$T_p\mu^{-1}(\mu(p)) \subset T_pD.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2 немедленно следует из предложения 3: в силу общности точки p имеем, что $\mu(D) \subset \mathbb{P}^{k+1}$ есть дивизор (т.е. $\mu(D) \neq \mathbb{P}^{k+1}$), поэтому $\Sigma = \mu^*\Gamma$ для некоторой линейной системы Γ , что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Положим $P = \langle \Delta, p \rangle$ – слой линейной проекции μ_{Δ} , так что $\mu^{-1}(\mu(p)) = P \cap V$. В силу общности точки p и неособости слоя $\mu^{-1}(\mu(p))$ в этой точке имеем

$$\text{codim}_{\mathbb{P}}(P \cap T_pV) = \text{codim}_{\mathbb{P}} P + k,$$

т.е. линейные подпространства P и $T_pV \subset \mathbb{P}$ находятся в общем положении.

Предположим теперь, что точка общего положения $b \in B$ выбиралась следующим образом: на многообразии B рассматривалось произвольное семейство неприводимых k -мерных подмногообразий $\{Y_u, u \in U\}$, заматающих B , в этом семействе выбиралось многообразие $Y = Y_u$ общего положения, а точка b есть точка общего положения на Y . В частности, T_bY есть линейное подпространство размерности k общего положения в $\Delta = T_bB \subset \mathbb{P}$. В частности,

$$\dim(\langle T_bY, p \rangle \cap T_pV) = 1, \quad (2)$$

т.е. линейные подпространства $\langle T_bY, p \rangle$ и T_pV находятся в общем положении.

Символом $[b, p]$ обозначим прямую в $\mathbb{P}$, соединяющую эти две точки, символом (b, p) множество $[b, p] \setminus \{b, p\}$. Пусть $x \in (b, p)$. Положим $C(Y, x)$ – конус с вершиной в точке x и базой Y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для достаточно общих Y , b , p , x справедливы следующие утверждения:*

- (i) *точка $z \in C(Y, x)$ есть особенность этого конуса, если либо $z = x$, либо $z \in [y, x]$, где $y \in \text{Sing } Y$;*
- (ii) *замкнутое алгебраическое множество $R(Y, x)$, которое является объединением всех неприводимых компонент пересечения $C(Y, x) \cap V$, содержащих точку p , есть неприводимая кривая, неособая в точке p ;*
- (iii) *кривая $R(Y, x)$ пересекает подмногообразие Y вне замкнутого подмножества $\text{Sing } Y$ особенностей этого многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано в [2; раздел 3.3.1] (в дополнение к приведенным в [2] рассуждениям необходимо отметить, что V не может содержаться в многообразии секущих $\text{Sec } Y$ многообразия Y : даже если $M = 2k + 1$, многообразие V не замывается прямыми). Далее, $[b, p] \cap Y = \{b\}$, так что точка $p \in C(Y, x)$ неособа. Очевидно,

$$T_p C(Y, x) = \langle T_b Y, p \rangle,$$

откуда с учетом (2) следует, что многообразия $C(Y, x)$ и V пересекаются в точке p трансверсально, что и доказывает (ii). Наконец, утверждение (iii) доказывается рассуждениями [2; раздел 3.3.1] с учетом того, что при вариации Y , $b \in Y$ и $p \in V$ точки $x \in (b, p)$ заполняют открытое подмножество проективного пространства $\mathbb{P}$ (например, в силу сюръективности отображения μ). Предложение 4 доказано.

Вернемся к доказательству предложения 3. Теперь рассуждаем, как в [2; раздел 3.3]: кривая $R(Y, x)$ пересекает Y в точках, неособых на Y и на самом конусе $C(Y, x)$. Следовательно, индекс пересечения $(R(Y, x) \cdot Y)_{C(Y, x)}$ корректно определен.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$(R(Y, x) \cdot Y)_{C(Y, x)} = \deg R(Y, x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [9; § 1].

Вернемся теперь к дивизору $D \in \Sigma$, содержащему точку p .

ЛЕММА 2. *Имеет место включение $R(Y, x) \subset D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$(D \cdot R(Y, x)) = n \deg R(Y, x).$$

С другой стороны, как показано в [2; раздел 3.3.2],

$$\sum_{y \in D \cap R(Y, x) \cap Y} (D \cdot R(Y, x))_y \geq (R(Y, x) \cdot Y)_{C(Y, x)} \text{mult}_Y D.$$

Учитывая, что $\text{mult}_Y D = \text{mult}_B D = n$, и равенство леммы 1, получаем утверждение леммы 2, поскольку

$$p \in D \cap R(Y, x)$$

и $p \notin Y$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает включение

$$\langle T_b Y, p \rangle \cap T_p V \subset T_p D,$$

откуда в силу общности подпространства $T_b Y \subset \Delta$ получаем включение

$$\langle \Delta, p \rangle \cap T_p V \subset T_p D,$$

что и завершает доказательство предложения 3.

5. Полные пересечения общего положения. Докажем предложение 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Как отмечено в п. 3, необходимо рассмотреть два случая: $M = 2k + 2$ и $M = 2k + 1$. Рассмотрим сначала следующую общую задачу. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – неприводимое подмногообразие размерности $l \geq 2$. Символом $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_{d,N}$ обозначим пространство однородных многочленов степени d на $\mathbb{P}^N$. Пусть $U_d(X) \subset \mathcal{P}_d$ – открытое множество, состоящее из таких многочленов $f \in \mathcal{P}_d$, что $\{f|_X = 0\}$ есть неприводимое приведенное подмногообразие размерности $(l - 1)$. Соответственно, пусть $R_d(X) = \mathcal{P}_d \setminus U_d(X)$ – множество “неправильных” многочленов. Задача состоит в том, чтобы оценить снизу коразмерность замкнутого множества $R_d(X)$ в пространстве $\mathcal{P}_d$.

ЛЕММА 3. *Имеет место оценка*

$$\text{codim}(R_d(X) \subset \mathcal{P}_d) \geq \binom{d+l-2}{d} - l + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{l-1}$ – линейная проекция из $(N - l)$ -плоскости общего положения, $\gamma_X = \gamma|_X: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{l-1}$ – ее ограничение на X (множество точек неопределенности γ_X нульмерно). Очевидно, отображение γ_X сюръективно, все его слои одномерны, а слой $\gamma_X^{-1}(z)$ над точкой общего положения $z \in \mathbb{P}^{l-1}$ – неприводимая кривая. Множество $\Delta \subset \mathbb{P}^{l-1}$, состоящее из таких точек z , что слой $\gamma_X^{-1}(z)$ приводим или неприведен, есть собственное замкнутое подмножество $\mathbb{P}^{l-1}$ (самое большее, дивизор). Поэтому для любого неприводимого дивизора D на $\mathbb{P}^{l-1}$ такого, что $D \not\subset \Delta$, его прообраз

$$\gamma_X^{-1}(D) = \gamma^{-1}(D) \cap X$$

неприводим и приведен. Иными словами, для любого неприводимого многочлена f на $\mathbb{P}^{l-1}$ такого, что $\{f = 0\} \not\subset \Delta$, имеем $\gamma^*f \in U_d(X)$. Множество $\gamma^*\mathcal{P}_{d,l-1}$ есть линейное подпространство пространства $\mathcal{P}_d$ (те же самые многочлены, рассматриваемые как многочлены от большего числа переменных). Пусть $R_{d,l-1} \subset \mathcal{P}_{d,l-1}$ – замкнутое подмножество приводимых многочленов. Из сказанного следует, что

$$\text{codim}(R_d(X) \subset \mathcal{P}_d) \geq \text{codim}(R_{d,l-1} \subset \mathcal{P}_{d,l-1}).$$

Последнюю коразмерность легко вычислить: неприводимая компонента максимальной размерности множества $R_{d,l-1}$ состоит из многочленов вида $f = f^\sharp h$, где $h \in \mathcal{P}_{1,l-1}$ – линейная форма. Этим лемма 3 доказана.

Вернемся к доказательству предложения 1. Пусть $M = 2k + 2$. Предположим, что полное пересечение V является общим в следующем смысле: многообразие

$$V^\sharp = \{f_1 = \dots = f_{k-1} = 0\} \subset \mathbb{P} \quad (3)$$

является гладким. Очевидно, $\dim V^\sharp = 2k + 3$, так что по теореме Лефшеца пересечение $V^\sharp \cap \Lambda$ неприводимо, приведено и имеет размерность $k + 2$ для любого линейного подпространства $\Lambda \subset \mathbb{P}$ коразмерности $k + 1$. Зафиксируем такое подпространство. Очевидно,

$$V \cap \Lambda = \{f_k|_{V^\sharp \cap \Lambda} = 0\}.$$

Пусть $R_\Lambda \subset \mathcal{P}_{d_k, M+k}$ – замкнутое подмножество многочленов f_k степени d_k , для которых $V \cap \Lambda$ не есть неприводимое приведенное подмногообразие размерности $k+1$. В силу леммы 3

$$\operatorname{codim} R_\Lambda \geq \binom{d_k + k}{d_k} - k - 1. \quad (4)$$

Из равенства $d_1 + \dots + d_k = M + k$ следует, что $d_k \geq 4$. Элементарные вычисления показывают, что правая часть неравенства (4) строго больше, чем размерность проективного грассманиана $(2k+1)$ -плоскостей в $\mathbb{P}$ при $k \geq 4$. Этим предложение 1 доказано при $M = 2k + 2$.

Предположим, что $M = 2k + 1$. В этом случае рассуждения полностью аналогичны приведенным выше, но требуются два шага. Сначала рассматривается полное пересечение

$$V^+ = \{f_1 = \dots = f_{k-2} = 0\} \subset \mathbb{P},$$

которое предполагается гладким. По теореме Лефшеца пересечение $V^+ \cap \Lambda$ неприводимо и приведено. Теперь рассуждения, аналогичные приведенным выше для $M = 2k + 2$, показывают, что для общего многочлена f_{k-1} степени $d_{k-1} \geq 3$ замкнутое множество

$$\{f_{k-1}|_{V^+ \cap \Lambda} = 0\}$$

неприводимо и приведено для любого подпространства Λ . Теперь рассматриваем многообразие $V^\sharp$, определенное формулой (3), и рассуждаем как в случае $M = 2k + 2$ и завершаем доказательство. Детали элементарных вычислений опускаем. Предложение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Дополнительные (по сравнению с [1]) ограничения на параметры $k, d_1, \dots, d_k$ связаны именно с тем, что для исключенных значений не проходит доказательство предложения 1. Однако не вызывает сомнений, что и утверждение предложения 1, и, тем более, теорема 1 справедливы и для них. Вот список пропущенных семейств:

			$2 \cdot 5,$	$3 \cdot 4$	в $\mathbb{P}^7,$
		$2 \cdot 6,$	$3 \cdot 5,$	$4 \cdot 4$	в $\mathbb{P}^8,$
	$2 \cdot 2 \cdot 6,$	$2 \cdot 3 \cdot 5,$	$2 \cdot 4 \cdot 4,$	$3 \cdot 3 \cdot 4$	в $\mathbb{P}^{10},$
$2 \cdot 2 \cdot 7,$	$2 \cdot 3 \cdot 6,$	$2 \cdot 4 \cdot 5,$	$3 \cdot 3 \cdot 5,$	$3 \cdot 4 \cdot 4$	в $\mathbb{P}^{11},$
	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6,$	$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5,$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$	$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$	в $\mathbb{P}^{13},$

и бесконечная серия

$$2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot (k+3) \quad \text{в } \mathbb{P}^{3k+1}, \quad k \geq 2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
- [2] A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections”, *Manuscripta Math.*, **121**:4 (2006), 491–526.

- [3] И. В. Долгачев, “О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:5 (1966), 1073–1100.
- [4] И. А. Чельцов, “Лог пары на гиперповерхностях степени N в $\mathbb{P}^N$ ”, *Матем. заметки*, **68**:1 (2000), 131–138.
- [5] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [6] I. Cheltsov, “Birationally rigid del Pezzo fibrations”, *Manuscripta Math.*, **116**:4 (2005), 385–396.
- [7] I. Cheltsov, I. Karzhemanov, “Halphen pencils on quartic threefolds”, *Adv. Math.*, **223**:2 (2010), 594–618.
- [8] И. А. Чельцов, “Несуществование эллиптических структур на общих полных пересечениях Фано индекса один”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 3, 50–53.
- [9] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие гиперповерхности Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 159–186.

А. В. Пухликов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

E-mail: pukh@liv.ac.uk, pukh@mi.ras.ru

Поступило

18.06.2010

Исправленный вариант

18.12.2010