Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 764–775

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:33:30

Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

В статье рассматривается задача о нахождении точных неравенств между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности m -го порядка в пространстве L_2 , а также даны их приложения. Для некоторых классов функций, определяемых указанными модулями непрерывности, вычислены точные значения n -поперечников в L_2 .

Библиография: 22 названия.

1. Обозначим через $L_2[0, 2\pi]$ пространство измеримых и суммируемых по Лебегу 2π -периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathfrak{S}_{n-1}$ – подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathfrak{S}_{n-1}$ равна

$$E_n(f)_2 := \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathfrak{S}_{n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2},$$

где

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2 \stackrel{\text{def}}{=} a_k^2 + b_k^2$.

Символом $\Delta_h^m(f)_2$ обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in L_2$ с шагом h :

$$\Delta_h^m(f)_2 := \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + kh) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f; t)_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\Delta_h^m(f)_2 : |h| \leq t\}$$

определим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Под L_2^r ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^0 = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. В пункте 2 при определении классов функций структурные свойства функции $f \in L_2^r$ охарактеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности r -й производной $f^{(r)}(x)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega_m(f^{(r)}; t)_2$.

При решении экстремальных задач теории приближения дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина

$$E_n(f)_2 \leq \chi \cdot n^{-r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right)_2, \quad t > 0,$$

рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ (см., например, [1]–[16]). Следуя работе Вакарчука [10], для компактного изложения некоторых результатов, полученных ранее, введем следующее обозначение:

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) = \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n(f)_2}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt\right)^{1/p}}, \quad (1)$$

где $m, n, r \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, причем в (1) условно полагаем $0/0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Величины вида (1) в разное время изучали:

- 1) Черных [1]:
 - а) $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin nt$;
 - б) $\chi_{m,n,0,2}(\varphi, 2\pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;
- 2) Тайков [3]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/(2n)$;
- 3) Тайков [4]: $\chi_{1,n,r,1}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) \equiv 1$;
- 4) Тайков [5]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) \equiv 1$, $0 < t \leq \pi/n$;
- 5) Лигун [6]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) \geq 0$; $0 < t \leq \pi/n$;
- 6) Айнуллоев [11]: $\chi_{m,n,r,2}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) = \sin^\gamma \beta t$, $0 \leq t \leq h$; $0 \leq \gamma \leq 2r-1$, $r \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $0 < \beta h \leq \pi$;
- 7) Шалаев [7]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi, \pi/n)$, где $\varphi(t) = \sin nt$, при $m = 1$ следует результат Черных из [1];
- 8) Юссеф [16]: $\chi_{1,n,r,2}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) = \sin(\pi t/h)$; $0 < t \leq h \leq \pi/n$;
- 9) М. Ш. Шабозов и О. Ш. Шабозов [12]: $\chi_{m,n,r,p}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) = \sin^\gamma(\pi t/h)$, $1/r < p \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq rp-1$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq h \leq \pi/n$;

- 10) Вакарчук [10]: $\chi_{m,n,r,2/m}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) \equiv 1$, $0 \leq t \leq \pi/(2n)$;
 11) Юсупов [14]: $\chi_{m,n,r,p}(\varphi, t)$, где $\varphi(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \leq t \leq h$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 \leq h \leq \pi/n$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$.

Рассматривались также другие экстремальные характеристики, в определенном смысле аналогичные (1) (см., например, [17]–[20]). Целью данного сообщения является обобщение известного неравенства Лигуна [6] при $0 < p \leq 2$, из которого при конкретном выборе весовой функции $\varphi(t)$ вытекают цитированные выше результаты из работ [1]–[11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$. Тогда справедливы неравенства

$$\{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}, \quad (2)$$

где

$$A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского [21; с. 32]:

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad h > 0, \quad 0 < p \leq 2,$$

и имея ввиду, что для произвольной $f \in L_2^r$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t)_2 = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos ku)^m : |u| \leq t \right\},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/p} \\ & \geq \left\{ \int_0^h \left[2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos kt)^m \right]^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \\ & = \left\{ \int_0^h \left(2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos kt)^m [\varphi(t)]^{2/p} \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \\ & \geq \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left(k^{rp} \rho_k^p \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left[2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \right]^2 \right\}^{1/2} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \{A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\}^2 \right)^{1/2} \geq \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) E_n(f)_2, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда и следует оценка сверху в неравенстве (2). Оценку снизу, справедливую при всех $0 < h \leq \pi/n$, получаем для функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^r$ из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} E_n(\cos n \cdot)_2 &= 1 = 2^{m/2} \frac{(n^{rp} \int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} \varphi(t) dt)^{1/p}}{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)} \\ &= \frac{(\int_0^h (\sup_{|u| \leq t} 2^m n^{2r} (1 - \cos nu)^m)^{p/2} \varphi(t) dt)^{1/p}}{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)} \\ &= \frac{(\int_0^h \omega_m^p((\cos n \cdot)^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt)^{1/p}}{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \end{aligned}$$

а потому имеем

$$\begin{aligned} \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) &\geq \frac{E_n(\cos n \cdot)_2}{(\int_0^h \omega_m^p((\cos n \cdot)^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt)^{1/p}} \\ &= \left(\int_0^h \omega_m^p((\cos n \cdot)^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{-1/p} = \{A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Требуемое соотношение (2) теперь следует из сопоставления неравенств (3) и (4), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Положим $h = a/n$ и $\varphi(t) = q(nt)$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) &= 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^{a/n} (1 - \cos kt)^{mp/2} q(nt) dt \right)^{1/p} \\ &= 2^{m/2} n^{r-1/p} \left(\left(\frac{k}{n} \right)^{rp} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{k}{n} t \right)^{mp/2} q(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Откуда сразу следует, что

$$\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \geq 2^{m/2} n^{r-1/p} \cdot \inf_{x \geq 1} \left(x^{rp} \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt \right)^{1/p}. \quad (5)$$

В связи с неравенством (5) для формулировки последующих результатов параллельно с характеристикой (1) вводим следующую экстремальную характеристику:

$$\tilde{\chi}_{m,n,r,p}(q; a) = \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{m/2} n^{r-1/p} E_n(f)_2}{(\int_0^a \omega_m^p(f^{(r)}, t/n)_2 q(t) dt)^{1/p}},$$

более тонко учитывающую структурные свойства функции $f \in L_2^r$.

Используя рассуждение работы Лигуна [6] и теорему 1, сформулируем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ и $q(t) \geq 0$, $0 < t < a \leq \pi$. Тогда имеет место неравенство

$$\{\Phi_{m,r,p}(a, q; 1)\}^{-1/p} \leq \tilde{\chi}_{m,n,r,p}(q; a) \leq \left\{ \inf_{x \geq 1} \Phi_{m,r,p}(a, q; x) \right\}^{-1/p},$$

где

$$\Phi_{m,r,p}(a, q; x) = x^{rp} \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt.$$

При этом, если функция $q(t)$, $0 \leq t \leq a$, такова, что

$$\inf \{ \Phi_{m,r,p}(a, q; x) : x \geq 1 \} = \Phi_{m,r,p}(a, q; 1),$$

то справедливо равенство

$$\tilde{\chi}_{m,n,r,p}(q; a) = \{ \Phi_{m,r,p}(a, q; 1) \}^{-1/p}.$$

В частности, если $q(t) = t^{rp-1} q_1(t)$, $0 \leq t \leq a$, $rp > 1$ и функция $q_1(t)$ не возрастает на $(0, a)$, то

$$\inf \{ \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t); x) : x \geq 1 \} = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t); 1). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства (6) необходимо отметить, что если

$$q_1(t) = \{ q(t), 0 \leq t \leq a; q(a), a \geq t \},$$

то при всех $x \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t); x) &= \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} (xt)^{rp-1} q_1(t) d(xt) \\ &= \int_0^{ax} (1 - \cos t)^{mp/2} t^{rp-1} q_1\left(\frac{t}{x}\right) dt \\ &\geq \int_0^{ax} (1 - \cos t)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t) dt \\ &\geq \int_0^a (1 - \cos t)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t) dt = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1} q_1(t); 1). \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

Пусть $C^{(m)}[0, h]$ – класс функций $\psi(t)$, у которых производная $\psi^{(m)}(t) \in C[0, h]$. Выясним, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq h$, чтобы выполнялось равенство

$$\inf \{ A_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) : n \leq k < \infty \} = A_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)$$

или, что то же самое,

$$\tilde{\chi}_{m,n,r,p}(q; a) = \{ \Phi_{m,r,p}(a, q; 1) \}^{-1/p}. \quad (7)$$

ЛЕММА. Пусть весовая функция $q(t) \in C^{(1)}[0, a]$ ($a > 0$) удовлетворяет следующим условиям:

- а) $q(t) \geq 0$ для всех $t \in [0, a]$;
- б) при всех $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq t \leq a$ выполняется дифференциальное неравенство

$$(rp - 1)q(t) - tq'(t) \geq 0.$$

Тогда имеет место соотношение (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для справедливости (7) достаточно доказать, что при выполнении условий леммы функция

$$\Phi_{m,r,p}(a, q; x) = x^{rp} \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt \quad (8)$$

при всех $x \geq 1$ является монотонно возрастающей, причем

$$\inf\{\Phi_{m,r,p}(a, q; x) : x \geq 1\} = \Phi_{m,r,p}(a, q; 1). \quad (9)$$

Дифференцируя функцию (8), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi_{m,r,p}(a, q; x) \\ = rpx^{rp-1} \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt + x^{rp} \int_0^a \frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos xt)^{mp/2} = \frac{t}{x} \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2}$$

и выполнив интегрирование по частям во втором интеграле соотношения (10), с учетом условия б) леммы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi_{m,r,p}(a, q; x) \\ = rpx^{rp-1} \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} q(t) dt + x^{rp-1} \int_0^a \frac{d}{dt} (1 - \cos xt)^{mp/2} tq(t) dt \\ = x^{rp-1} \left\{ (1 - \cos ax)^{mp/2} aq(a) + \int_0^a (1 - \cos xt)^{mp/2} [(rp-1)q(t) - tq'(t)] dt \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

откуда сразу следует соотношение (9). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $q(t) = \sin^\gamma(\beta t/h)$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq t \leq h$, $0 < h \leq \pi/n$, $0 \leq \gamma \leq rp-1$, $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $m, n, r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\chi_{m,n,r,p} \left(\sin^\gamma \left(\frac{\beta t}{h} \right); h \right) = 2^{-m} n^{-r} \left\{ \int_0^h \left(\sin \left(\frac{nt}{2} \right) \right)^{mp} \sin^\gamma \left(\frac{\beta t}{h} \right) dt \right\}^{-1/p}. \quad (11)$$

В частности, при $\beta = \pi$, $h = \pi/n$ из (11) получаем

$$\chi_{m,n,r,p} \left(\sin^\gamma nt; \frac{\pi}{n} \right) = 2^{-(m+\gamma/p)} B^{-1/p} \left(\frac{mp+\gamma+1}{2}, \frac{\gamma+1}{2} \right) n^{-r+1/p},$$

где $B(a, b)$ – бета-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, при указанных в следствии 2 значениях параметров p, r, β, γ, h и с учетом вышедоказанной леммы имеем

$$(rp-1)q(t) - tq'(t) = \left(\frac{\beta t}{h} \right) \sin^{\gamma-1} \left(\frac{\beta t}{h} \right) \left[(rp-1) \frac{\sin(\beta t/h)}{\beta t/h} - \gamma \cos \left(\frac{\beta t}{h} \right) \right] dt \geq 0,$$

поскольку выражение в квадратных скобках в силу условий следствия на γ ($0 \leq \gamma \leq rp - 1$) и неравенство

$$\frac{\sin(\beta t/h)}{(\beta t/h)} - \cos\left(\frac{\beta t}{h}\right) \geq 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq h, \quad 0 < h \leq \frac{\pi}{n},$$

положительное, откуда и вытекает утверждение следствия 2.

Отметим, что результат следствия 2 при $p = 2$, $\gamma = 1$, $\beta = \pi$, $h = \pi/n$, $m \in \mathbb{N}$ ранее доказан в работе Черных [1], случай $p = 2$, $\gamma = 0$, $\beta = \pi$, $h = \pi/n$, $m = 1$ имеется в работе Тайкова [5], $p = 2$, $0 \leq \gamma \leq 2r - 1$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$, $m, n, r \in \mathbb{N}$ рассмотрен Айнуллоевым [11], а $1/r < p \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $\beta = \pi$, $h = \pi/n$, $m, n, r \in \mathbb{N}$ М. Ш. Шабозовым и О. Ш. Шабозовым [12]. В общем случае, когда $0 < t \leq h \leq \pi/n$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $1/r < p \leq 2$, $m, n, r \in \mathbb{N}$, соотношение (11) другим путем доказано в работе Юсупова [14].

2. Пусть S – единичный шар в L_2 ; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathcal{L}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n ; $\mathcal{L}^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf\{\sup\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\}, \\ d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \\ \lambda_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\}, \\ \pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *гельфандовским*, *колмогоровским*, *линейным*, *проекционным* n -поперечниками в пространстве L_2 .

Так как L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между перечисленными n -поперечниками [22]:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \lambda_n(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \quad (12)$$

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. При любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $1/r < p \leq 2$, $0 < \beta \leq \pi$, $0 < h \leq \pi/n$ определим класс функций

$$\begin{aligned} W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi) &:= W(\Phi; m, n, r, p, \gamma, \beta) \\ &= \left\{ f(x) \in L_2^r : \int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta}{h} t dt \leq \Phi^p(h) \right\}. \end{aligned}$$

При выполнении некоторых условий относительно мажоранты $\Phi(u)$ вычислим значения вышеперечисленных n -поперечников класса $W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$ в пространстве L_2 . С этой целью введем обозначение

$$\left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^m, & \text{если } nt \leq \pi; \\ 1, & \text{если } nt > \pi. \end{cases}$$

Если $\mathfrak{N}$ – некоторый класс функций из L_2 , то полагаем также

$$E_n(\mathfrak{N})_{L_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathfrak{N}\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если для любого заданного $0 < \mu \leq 1$ и для всех $\lambda > 0$, $0 < \beta$, $u \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq rp - 1$, $1/r < p \leq 2$, функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию

$$\Phi^p(\mu u) \int_0^{\lambda\pi} \left(\sin \frac{v}{2}\right)_*^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta v}{\lambda\pi} dv \leq \Phi^p(\lambda u) \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta v}{\mu\pi} dv, \quad (13)$$

то и с любыми $m, n, r \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \rho_{2n}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) &= \rho_{2n-1}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) = E_n(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi))_{L_2} \\ &= 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\mu\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

где $\rho_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k -поперечников $b_k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ и $\pi_k(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку сверху для проекционного n -поперечника с учетом определения класса $W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$ и характеристики $\chi_{m,n,r,p}(\cdot)$ получим из равенства (11) при $h = \mu\pi/n$ ($0 < \mu \leq 1$):

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) &\leq \pi_{2n-1}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) \leq \sup\{E_n(f) : f \in W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2\} \\ &\leq 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\mu\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника класса $W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$ вводим в рассмотрение $(2n+1)$ -мерную сферу полиномов

$$\sigma_{2n+1} = \left\{ T_n(x) : \|T_n\|_2 = 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2}\right)^{mp} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\mu\pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $\sigma_{2n+1} \subset W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$.

В работе [5] доказано, что для произвольного полинома $T_n(x) \in \sigma_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_m(T_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^m \|T_n\|_2. \quad (15)$$

Неравенство (15) возведем в степень p , $1/r < p \leq 2$, умножим на $\sin^\gamma(\beta t/\lambda u)$ и проинтегрируем по t в промежутке $[0, \lambda u]$, затем делаем замену переменной $nt = v$ в правой части и заменяем норму полинома по формуле радиуса сферы σ_{2n+1} . В итоге после всех этих операций получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda u} \omega_m^p(T_n^{(r)}, t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta t}{\lambda u} dt &\leq \frac{\Phi^p(\mu\pi/n) \int_0^{\lambda u} (\sin nt/2)_*^{mp} \sin^\gamma(\beta t/\lambda u) dt}{\int_0^{\mu\pi/n} (\sin nt/2)^{mp} \sin^\gamma(n\beta/(\mu\pi)) t dt} \\ &= \frac{\Phi^p(\mu\pi/n) \int_0^{\lambda nu} (\sin v/2)_*^{mp} \sin^\gamma(\beta v/(\lambda nu)) dv}{\int_0^{\mu\pi} (\sin v/2)^{mp} \sin^\gamma(\beta v)/(\mu\pi) dv}. \end{aligned}$$

Введя обозначения $u = \pi/n$ и используя условие (13) теоремы, приходим к неравенству

$$\int_0^{\lambda u} \omega_m^p(T_n^{(r)}, t)_2 \sin^\gamma \frac{\beta t}{\lambda u} dt \leq \frac{\Phi^p(\mu u) \int_0^{\lambda \pi} (\sin v/2)_*^{mp} \sin^\gamma(\beta v)/(\lambda \pi) dv}{\int_0^{\mu \pi} (\sin v/2)^{mp} \sin^\gamma(\beta v)/(\mu \pi) dv} \leq \Phi^p(\lambda u),$$

откуда следует включение $\sigma_{2n+1} \subset W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$. Отсюда по теореме Тихомирова [22] для бернштейновского n -поперечника имеем оценку снизу

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) &\geq b_{2n}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(\sigma_{2n+1}, L_2) \\ &= 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^{\mu \pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{n\beta}{\mu \pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu \pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставляя неравенства (14) и (16), с учетом соотношения (12), получим утверждение теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сделав замену переменной $nt = u$, утверждение теоремы 2 запишем в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{2n}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) &= \gamma_{2n-1}(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi), L_2) = E_n(W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi))_{L_2} \\ &= 2^{-m} n^{-r+1/p} \left(\int_0^{\mu \pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{\mu \pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu \pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Условия теоремы 2 выглядят неестественными и труднопроверяемыми. Но это не так. Легко проверить, что условие (13) является необходимым и достаточным условием, для того чтобы совокупность функций

$$\left\{ 2^{-m} n^{-r+1/p} \left(\int_0^{\mu \pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{mp} \sin^\gamma \frac{\beta}{\mu \pi} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu \pi}{n}\right) \right\} \cdot \left\{ \frac{\sin nx}{\cos nx} \right\}$$

принадлежала классу $W_{p,\gamma}^{m,r}(\Phi)$.

Ниже мы анализируем условия теоремы 2 и ради простоты при $\gamma = 0$ найдем значения α , при которых функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет этим условиям. С этой целью запишем неравенство (13) в эквивалентной форме

$$\frac{\int_0^{\lambda \pi} (\sin v/2)_*^{mp} dv}{\int_0^{\mu \pi} (\sin v/2)^{mp} dv} \leq \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\alpha p}, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (17)$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы неравенство (17) имело место с любыми заданными $\lambda > 0$, $0 < \mu \leq 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, необходимо и достаточно, чтобы число $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ определялось по формуле

$$\alpha = \alpha(\mu; m, p) = \mu \pi \left(\sin \frac{\mu \pi}{2} \right)^{mp} \left\{ p \int_0^{\mu \pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv \right\}^{-1}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приравнявая производные по λ от левой и правой частей неравенства (17) при $\lambda = \mu$, получаем (18). Из неравенства (18) при любых $0 <$

$\mu \leq 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ определим границы значения числа α . Докажем неравенство (17) с ограничениями

$$\frac{1}{p} \leq \alpha(\mu; m, p) \leq \mu^{-mp} \left(m + \frac{1}{p} \right).$$

В самом деле, из равенства (18), оценивая $\alpha(\mu; m, p)$, получаем

$$\frac{1}{p} \leq \alpha(\mu; m, p) = \frac{\mu\pi(\sin(\mu\pi/2))^{mp}}{p \int_0^{\mu\pi} (\sin v/2)^{mp} dv} \leq \frac{\pi}{2p \int_0^{\pi/2} ((2/\pi)\mu v)^{mp} dv} = \mu^{-mp} \left(m + \frac{1}{p} \right).$$

Поскольку согласно этому неравенству $\alpha < \mu^{-mp}(m + 1/p)$, $0 < \mu \leq 1$, для достаточно малых $\lambda > 0$ неравенство (17) выполняется. Из определения $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ следует другая эквивалентная форма неравенства (17):

$$\frac{(1/\pi) \int_0^{\lambda\pi} (\sin v/2)^{mp} dv}{(\sin(\mu\pi/2))^{mp}} \leq \frac{\mu}{\alpha p} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\alpha p}. \quad (19)$$

Обе части неравенства (19) совпадают на концах интервала $\lambda \in (0, \mu)$ вместе со своими производными по λ . Если допустить знак равенства в (19) на данном интервале, то производные обеих частей неравенства (19)

$$\frac{(\sin \lambda\pi/2)_*^{mp}}{(\sin \mu\pi/2)^{mp}}, \quad \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\alpha p - 1}$$

будут совпадать на четырех различных точках отрезка $[0, \mu]$.

Таким образом, функция

$$r(\lambda) = \frac{(\sin \lambda\pi/2)_*}{(\sin \mu\pi/2)} - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{(\alpha p - 1)/mp}$$

имеет четыре нуля на $[0, \mu]$. Это означает, что производная

$$r'(\lambda) = \frac{\pi/2(\cos \lambda\pi/2)_*}{(\sin \mu\pi/2)} - \frac{\alpha p - 1}{\mu mp} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{(\alpha p - 1 - mp)/mp}$$

имеет три различных нуля на интервале $(0, \mu)$, и мы пришли к противоречию. Этим неравенство (17) доказано для $\lambda \in (0, \mu]$.

Если предположить, что неравенство (17) не имеет места для $\lambda > \mu$, то обязательно найдется $\lambda = \mu^* > \mu$, для которого в (17) будет реализовано равенство. Это следует из того, что левая часть в (17) является линейной функцией от λ при $\lambda > 1$, а правая часть – возрастающая выпуклая вниз функция, поскольку по определению $\alpha p > 1$. Таким образом, функция $r(\lambda)$ будет иметь четыре нуля на полуинтервале $[0, \mu^*)$, а ее производная $r'(\lambda)$ – по крайней мере, три различных нуля при $0 < \lambda < \mu^*$, и мы опять пришли к противоречию. Этим неравенство (17) доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых натуральных m, n, r , $1/r < p \leq 2$,

$$\alpha = \alpha(1; m, p) = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right) \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right) \right\}^{-1},$$

$\Gamma(b)$ – гамма-функция Эйлера, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\rho_{2n}(W_{p,0}^{m,r}(\Phi_*), L_2) &= \rho_{2n-1}(W_{p,0}^{m,r}(\Phi_*), L_2) = E_n(W_{p,0}^{m,r}(\Phi_*))_{L_2} \\ &= 2^{-m}(\alpha p)^{1/p} \pi^{\alpha-1/p} n^{-r-\alpha+1/p},\end{aligned}$$

где $\rho_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k -поперечников $b_k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ и $\pi_k(\cdot)$.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [2] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [3] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [4] Л. В. Тайков, “Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 ”, *Матем. заметки*, **22**:4 (1977), 535–542.
- [5] Л. В. Тайков, “Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **25**:2 (1979), 217–223.
- [6] А. А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 785–792.
- [7] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. журн.*, **43**:1 (1991), 125–129.
- [8] С. Б. Вакарчук, “О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников”, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 334–345.
- [9] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 792–796.
- [10] С. Б. Вакарчук, “Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 ”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 11–19.
- [11] Н. Айнуллоев, “О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 ”, *Докл. АН ТаджССР*, **28**:6 (1985), 309–313.
- [12] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ ”, *Докл. АН РТ*, **49**:2 (2006), 111–115.
- [13] Х. Юссеф, “О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 ”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Сб. научн. трудов, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1988, 100–114.
- [14] Г. А. Юсупов, “О точных значениях поперечников некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ ”, *Докл. АН РТ*, **51**:12 (2008), 810–817.
- [15] В. А. Юдин, “Диофантовы приближения в экстремальных задачах в L_2 ”, *Докл. АН СССР*, **251**:1 (1980), 54–57.
- [16] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , Тульский гос. ун-т, Тула, 1995.
- [17] С. Н. Васильев, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами”, *Докл. РАН*, **385**:1 (2002), 11–14.

- [18] М. Г. Есмаганбетов, “Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона”, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 816–820.
- [19] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.
- [20] А. С. Сердюк, А. И. Степанец, “Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p ”, *Укр. матем. журн.*, **54**:1 (2002), 106–124.
- [21] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
- [22] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.

М. Ш. Шабозов

Институт математики АН Республики Таджикистан,
г. Душанбе
E-mail: shabozov@mail.ru

Поступило

22.02.2010

Исправленный вариант

29.09.2010

Г. А. Юсупов

Таджикский национальный университет, г. Душанбе
E-mail: G_7777@mail.ru