Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 749–760

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8822>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:32:52

Об уклонении от встречи в одном классе распределенных управляемых систем

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов

Рассматривается дифференциальная игра уклонения от встречи в системе, описываемой управляемым уравнением в частных производных, содержащим производную второго порядка по времени и эллиптический оператор. При этом управляющие параметры игроков аддитивно входят в правую часть уравнения. С помощью обобщенных собственных чисел и обобщенных собственных функций данного эллиптического оператора вводятся новые пространства, зависящие от неотрицательного параметра. Вводимые в дальнейшем игры изучаются во всей шкале этих пространств. Получены достаточные условия для возможности уклонения от встречи в играх, получающихся при различных ограничениях на управляющие параметры.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm8822

Введение. Известно, что многие природные процессы и явления описываются уравнениями в частных производных. К таким процессам, в частности, относятся колебания ограниченных объемов, математической моделью которых служат уравнения гиперболического типа с эллиптическим оператором. Для решения таких уравнений поступают следующим образом: сначала расширяют область определения эллиптического оператора и самого оператора до самосопряженного, и затем доказывают существование обобщенного решения, принадлежащего энергетическому пространству данного оператора. При этом следует отметить, что для доказательства существования решения используется тот факт, что расширенный оператор имеет обобщенные собственные числа и обобщенные собственные функции, составляющие полную систему и в энергетическом пространстве оператора, и в исходном пространстве [1], [2].

С помощью этих обобщенных собственных чисел и функций конструируются новые пространства, зависящие от неотрицательного параметра. Доказывается, что во всей шкале этих пространств существует единственное решение данного гиперболического уравнения. При этом решение и его производная являются непрерывными по времени относительно соответствующей нормы [2]. Известно, что фундаментальные результаты получены в теории дифференциальных игр, описываемых уравнениями с сосредоточенными параметрами [3], [4]. Что касается игр с распределенными параметрами, то как нам кажется, результаты здесь получены не такие полные. В этом направлении следует отметить работы [1], [5]–[12].

В работе [1] предложен так называемый метод декомпозиции уравнений, который используется и в данной работе. Заметим, что в указанных выше работах (кроме [11], [12]) рассмотрена задача преследования.

В настоящей работе, в основном, рассмотрены дифференциальные игры уклонения от встречи. При этом на управляющие параметры, входящие в правую часть уравнения, налагаются различные ограничения (геометрические, интегральные, смешанные). Из полученных четырех игр для первых двух ((6), (7) и (6), (8)) получены достаточные условия, гарантирующие возможность уклонения из всех начальных положений. Для третьей игры ((6), (9)) найдены два бесконечных множества таких, что из начальных положений, принадлежащих первому множеству, завершается преследование, а из точек второго возможно уклонение от встречи. Для четвертой игры ((6), (10)) установлена возможность уклонения от встречи из произвольного начального положения.

В пространстве $L_2(\Omega)$ рассматривается дифференциальный оператор A вида [1]

$$Az = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad (1)$$

где Ω – ограниченная с кусочно гладкой границей область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Областью определения $D(A)$ оператора A является $\dot{C}^2(\Omega)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций). Коэффициенты $a_{ij}(\cdot)$ удовлетворяют следующему условию: существует постоянная $\gamma \neq 0$ такая, что для всех $x \in \Omega$ и $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (2)$$

Положив $(z, y)_A = (Az, y)$, $z, y \in \dot{C}^2(\Omega)$, можно показать, что $(\cdot, \cdot)_A$ удовлетворяет всем требованиям скалярного произведения.

Таким образом, $\dot{C}^2(\Omega)$ превращается в гильбертово пространство. Однако оно неполно относительно нормы

$$\|z\|_A = (Az, z)^{1/2}, \quad z \in \dot{C}^2(\Omega), \quad (3)$$

порожденной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_A$. Пополнив $\dot{C}^2(\Omega)$ относительно нормы $\|\cdot\|_A$, мы получим полное гильбертово пространство, называемое энергетическим пространством оператора A .

Известно [1], [2], что при выполнении условия (2) оператор A имеет дискретный спектр, точнее, имеет бесконечную последовательность обобщенных собственных чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ с пределом в бесконечности и бесконечную последовательность обобщенных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, составляющих полную систему $\{\varphi_i\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Мы будем считать $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть r – произвольное неотрицательное число. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \ell_r &= \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty \right\}, \\ H_r(\Omega) &= \left\{ f \in L_2(\Omega) : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \alpha \in \ell_r \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В пространствах ℓ_r , $H_r(\Omega)$ определим скалярные произведения и нормы:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)_r &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \alpha, \beta \in \ell_r, \quad \|\alpha\| = (\alpha, \alpha)_r^{1/2}, \\ (f, g)_r &= (\alpha, \beta)_r, \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i, \quad \|f\| = \|\alpha\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и $H_r(\Omega) \subset H_s(\Omega)$ для произвольных $0 \leq s \leq r$.

Через $C(0, T; H_r(\Omega))(L_2(0, T; H_r(\Omega)))$ обозначим пространство, состоящее из непрерывных (суммируемых с квадратом измеримых) функций, определенных на $[0, T]$ и со значениями в $H_r(\Omega)$, где T – некоторая положительная постоянная.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую конфликтно управляемую распределенную систему (распределенную дифференциальную игру):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + Az(t) &= -u(t) + v(t), \quad 0 < t \leq T, \\ z(0) = z^{(0)}, \quad z^{(0)} &\in H_{r+1}(\Omega), \quad \dot{z}(0) = \dot{z}^{(0)}, \quad \dot{z}^{(0)} \in H_r(\Omega), \\ u(\cdot), v(\cdot) &\in L_2(0, T; H_r(\Omega)), \end{aligned} \quad (6)$$

где оператор A задан в виде (1).

В [2] установлено, что в пространстве $C(0, T; H_{r+1}(\Omega))$ существует единственная функция $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, являющаяся решением задачи (6) в смысле теории обобщенных функций (теории распределений), при этом $\dot{z}(t) \in C(0, T; H_r(\Omega))$.

Функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ называются *управлениями* соответственно первого (преследующего) и второго (преследуемого или убегающего) игроков. Они удовлетворяют ограничениям, определяемых одной из следующих систем неравенств:

$$\|u(t)\| \leq \rho, \quad \|v(t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (7)$$

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\| \leq \sigma; \quad (8)$$

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (9)$$

$$\|u(t)\| \leq \rho, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|v(\cdot)\| \leq \sigma, \quad (10)$$

где ρ и σ – неотрицательные константы, норма $\|u(t)\|$ при каждом t определяется с помощью (5), а норма $\|u(\cdot)\|$ определяется следующим образом:

$$\|u(\cdot)\| = \sqrt{\int_0^T \|u(t)\|^2 dt}.$$

Управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяющие одному из условий (7)–(10), назовем *допустимыми*. Управляемую систему (6), в которой $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяют неравенствам (7) ((8); (9); (10)), будем называть игрой (6), (7) ((6), (8); (6), (9); (6), (10)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что в игре (6), (7) ((6), (8); (6), (9); (6), (10)) возможно *уклонение от встречи* (с терминальным множеством $\{0\}$) из начального положения $z_0 = (z^{(0)}, \dot{z}^{(0)})$, $z_0 \neq 0$, если для произвольного, фиксированного положительного числа T можно построить управление второго игрока $v_0(\cdot)$ такое, что:

- 1) $\|v_0(t)\| \leq \sigma(\|v_0(\cdot)\|) \leq \sigma$ в (6), (8) и (6), (10); $\|v_0(t)\| \leq \sigma$ в (6), (9);
- 2) для произвольного управления первого игрока $u_0(\cdot)$, удовлетворяющего неравенству $\|u_0(t)\| \leq \rho(\|u_0(\cdot)\|) \leq \rho$ в (6), (8) и (6), (9); $\|u_0(t)\| \leq \rho$ в (6), (10)), решение $z_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи (6), где $u(\cdot) = u_0(\cdot)$, $v(\cdot) = v_0(\cdot)$, и его производная $\dot{z}_0(t)$, $0 \leq t \leq T$, одновременно не обращаются в 0.

При этом для нахождения значения $v_0(t)$ управления $v_0(\cdot)$ в каждый момент времени t разрешается использовать значения:

- 1) z_0 в (6), (7) и (6), (9);
- 2) z_0 и $u_0(s)$, $t - \theta \leq s < t$ ($u_0(s)$, $0 \leq s \leq t$, при $t < \theta$), в (6), (8);
- 3) $z_0(s)$, $\dot{z}_0(s)$, $t - \theta \leq s \leq t$, и $u_0(s)$, $t \leq s \leq t + \theta$ (z_0 при $t < \theta$, $u_0(s)$, $t \leq s \leq T$ при $t > T - \theta$) в (6), (10), где θ – произвольное положительное фиксированное число.

2. Основные результаты. Задача уклонения от встречи состоит в нахождении начальных положений z_0 , из которых можно уклониться от встречи (с терминальным множеством $\{0\}$), а также в явном построении управления уклонения $v_0(\cdot)$.

Отметим, что мы на задаче преследования подробно не останавливаемся. Для одного класса игр она изучалась в [9], [10]. Далее, при доказательстве нашего основного результата использованы некоторые идеи из [12].

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. 1) Если $\sigma \geq \rho$, то в играх (6), (7) и (6), (8) возможно уклонение от встречи из любого начального положения z_0 , $z_0 \neq 0$.

2) Для произвольных $\rho > 0$ и $\sigma > 0$ в игре (6), (9) существуют два бесконечных множества начальных положений таких, что из точек первого можно завершить преследование за конечное время, а из точек второго множества возможно уклонение от встречи.

3) Для произвольных $\rho \geq 0$ и $\sigma > 0$ в игре (6), (10) возможно уклонение от встречи из произвольного начального положения $z_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) а) Рассмотрим игру (6), (7) (игры (6), (8); (6), (9) и (6), (10) будут рассмотрены ниже). Пусть $\sigma \geq \rho$, T – произвольное положительное число, $u_0(\cdot)$ – произвольное управление преследующего, $\|u_0(t)\| \leq \rho$, z_0 – произвольное начальное положение, $z_0 \neq 0$.

Через $v_0(\cdot)$ обозначим пока произвольное управление второго игрока, его конкретный вид будет указан позднее.

Пусть

$$u_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \varphi_i, \quad v_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \varphi_i, \\ z^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^{(0)} \varphi_i, \quad \dot{z}^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{z}_i^{(0)} \varphi_i, \quad z_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \varphi_i$$

– разложения в ряд Фурье векторов $u_0(t)$, $v_0(t)$, $z^{(0)}$, $\dot{z}^{(0)}$ и $z_0(t)$, а $u_i(t)$, $v_i(t)$, $z_i^{(0)}$, $\dot{z}_i^{(0)}$, $z_i(t)$ – их соответствующие коэффициенты Фурье.

Подставив эти разложения в уравнение (6) и приравняв соответствующие коэффициенты при φ_i , получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

второго порядка

$$\frac{d^2 z_i(t)}{dt^2} + \lambda_i z_i(t) = -u_i(t) + v_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

и начальных условий $z_i(0) = z_i^{(0)}$, $\dot{z}_i(0) = \dot{z}_i^{(0)}$.

Так как $z_0 \neq 0$, возможны два случая:

I) $z^{(0)} \neq 0$;

II) $z^{(0)} = 0$, $\dot{z}^{(0)} \neq 0$.

Рассмотрим лишь случай I, ибо случай II изучается аналогично. Пусть k – наименьшее значение индекса i , для которого $z_k^{(0)} \neq 0$. Для удобства вычислений, положим $\eta_1 = z_k$, $\eta_2 = \dot{z}_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= \eta_2(t), & \dot{\eta}_2(t) &= -\lambda_k \eta_1(t) - u_k(t) + v_k(t), & 0 \leq t \leq T, \\ \eta_1(0) &= z_k^{(0)}, & \eta_2(0) &= \dot{z}_k^{(0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ясно, что

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = e^{tC} \left\{ \begin{pmatrix} z_k^{(0)} \\ \dot{z}_k^{(0)} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-sC} (-\bar{u}_k(s) + \bar{v}_k(s)) ds \right\}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, & e^{tC} &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda_k} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \\ -\sqrt{\lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) & \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \end{pmatrix}, \\ \bar{u}_k &= \begin{pmatrix} 0 \\ u_k \end{pmatrix}, & \bar{v}_k &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поэтому из (13), (14) имеем

$$e^{-tC} \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k^{(0)} \\ \dot{z}_k^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) [v_k(s) - u_k(s)] \right\} ds \\ \int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_k} s) [v_k(s) - u_k(s)] ds \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Далее, ясно, что если $z_0(t) = \dot{z}_0(t) = 0$ при некотором $t = t' \in [0, T]$, то и $z_k(t') = \dot{z}_k(t') = 0$, т.е. $\eta_1(t') = \eta_2(t') = 0$. Следовательно, из (15) получим

$$\begin{aligned} z_k^{(0)} + \int_0^{t'} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) [v_k(s) - u_k(s)] \right\} ds &= 0, \\ \dot{z}_k^{(0)} + \int_0^{t'} \cos(\sqrt{\lambda_k} s) [v_k(s) - u_k(s)] ds &= 0. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что функции $v_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, $i = 1, 2, \dots$, можно выбрать так, чтобы

$$\delta(t) = z_k^{(0)} - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) [v_k(s) - u_k(s)] ds \neq 0 \quad (16)$$

на $[0, T]$. Отсюда будет следовать, что при таком способе управления функция $(z_0(t), \dot{z}_0(t))$, $0 \leq t \leq T$, не будет обращаться в 0.

Действительно, пусть $v_i(\cdot) = 0$ для всех $i \neq k$, а $v_k(\cdot)$ выберем следующим образом (считая $z_k^{(0)} > 0$; в случае, когда $z_k^{(0)} < 0$, рассуждения проводятся аналогично):

$$v_k(t) = -\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_k^r}} \operatorname{sgn} \sin(\sqrt{\lambda_k} t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Заметим, что при указанном способе выбора $v_0(\cdot)$, неравенство $\|v_0(t)\| \leq \sigma$ выполнено очевидным образом.

Из (16) и (17) получим

$$\delta(t) = z_k^{(0)} + \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_k^{1+r}}} \int_0^t |\sin(\sqrt{\lambda_k} s)| ds + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds. \quad (18)$$

Так как $\|u(t)\| \leq \rho$, то $|u_k(t)| \leq \rho / \sqrt{\lambda_k^r}$ ((4), (5)). Значит,

$$\sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) \geq -|\sin(\sqrt{\lambda_k} s)| |u_k(s)| \geq \frac{-|\sin(\sqrt{\lambda_k} s)| \rho}{\sqrt{\lambda_k^r}},$$

а так как $\sigma \geq \rho$, то

$$\delta(t) \geq z_k^{(0)} + \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_k^{1+r}}} \int_0^t |\sin(\sqrt{\lambda_k} s)| ds - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^{1+r}}} \int_0^t |\sin(\sqrt{\lambda_k} s)| ds \geq z_k^{(0)}. \quad (19)$$

Следовательно, для всех $t \in [0, T]$ имеем

$$\delta(t) \geq z_k^{(0)} > 0. \quad (20)$$

Как отмечено выше, из (20) следует, что из начального положения z_0 возможно отклонение от встречи.

б) Теперь рассмотрим игру (6), (8), считая $\rho \leq \sigma$. Рассуждая так же, как и выше, получим формулу (15) и здесь приходим к выводу о том, что если $\delta(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$, то функция $(z_0(t), \dot{z}_0(t))$, $0 \leq t \leq T$, не обратится в 0.

Таким образом, все сводится к тому, чтобы путем выбора функции $v_0(\cdot)$ добиться выполнения условия: $\delta(t) \neq 0$ на $[0, T]$.

Пусть $z_k^{(0)} = 3\varepsilon$. Будем считать $v_i(\cdot) = 0$ для всех $i \neq k$, а функцию $v_k(\cdot)$ построим следующим образом.

Положим $v_k(t) = 0$ на $[0, \delta]$, $0 < \delta \leq \theta$, $v_k(t) = u_k(t - \delta)$ на $(\delta, T]$, константу δ выберем ниже ((23), (29)).

Пусть вначале $t \in [0, \delta]$. Тогда, из (16) получим

$$\delta(t) = z_k^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \geq 3\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t |u_k(s)| ds \quad (21)$$

и так как в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\int_0^t |u_k(s)| ds \leq \sqrt{t} \sqrt{\int_0^t u_k^2(s) ds} \leq \sqrt{\delta} \sqrt{\int_0^t u_k^2(s) ds} \leq \sqrt{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^r}}, \quad (22)$$

то при выполнении неравенства

$$\sqrt{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^{r+1}}} \leq \varepsilon \quad (23)$$

на отрезке $[0, \delta]$ имеем $\delta(t) \geq 2\varepsilon$ ((21)–(23)).

Таким образом, $z_k(t) \neq 0$ на $[0, \delta]$. Пусть теперь $t \in (\delta, T]$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta(t) = 3\varepsilon + \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds + \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \\ - \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s - \delta) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) [u_k(s) - u_k(s - \delta)] ds = \int_{t-\delta}^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \\ - \int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \\ + \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} [\sin(\sqrt{\lambda_k} (s - \delta)) - \sin(\sqrt{\lambda_k} s)] u_k(s - \delta) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому из (24) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \delta(t) = 3\varepsilon + \int_{t-\delta}^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \\ - \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} [\sin(\sqrt{\lambda_k} s) - \sin(\sqrt{\lambda_k} (s - \delta))] u_k(s - \delta) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично (22) имеем

$$\left| \int_{t-\delta}^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^r}}. \quad (27)$$

Далее, очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\sin(\sqrt{\lambda_k} s) - \sin(\sqrt{\lambda_k} (s - \delta))| \leq \delta. \quad (28)$$

Следовательно, если считать выполненными и неравенства

$$\sqrt{\delta} \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^{r+1}}} \leq \varepsilon, \quad \sqrt{T - \delta} \delta \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_k^r}} \leq \varepsilon, \quad (29)$$

то для любого $t \in (\delta, T]$ из (23), (26)–(29) получим $\delta(t) \geq \varepsilon$.

Таким образом, если функцию $v_k(\cdot)$ выбрать так, как указано выше, то на $[0, T]$ функция $\delta(t) \geq \varepsilon$. Как отмечено выше, отсюда вытекает возможность уклонения от встречи в игре (6), (8) из начального положения z_0 .

2) а) Рассмотрим теперь игру (6), (9). Пусть T – произвольное положительное фиксированное число, T_0 – любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < T_0 \leq T$, $\sigma(T_0 + \sqrt{T_0}) < \rho$, $X = \bigcup_{k \geq 1} X_k$, где

$$X_k = \left\{ z_0 = (z^{(0)}, \dot{z}^{(0)}) : z_i^{(0)} = \dot{z}_i^{(0)} = 0, i \neq k, z_k^{(0)} = \frac{\xi}{\lambda_k} (\cos(\sqrt{\lambda_k} T_0) - 1), \right. \\ \left. \dot{z}_k^{(0)} = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} T_0), |\xi| \leq \frac{\sigma \sqrt{T_0}}{\sqrt{\lambda_k}}, \xi \neq 0 \right\}. \quad (30)$$

Покажем, что из любого начального положения $z_0 \in X$ в игре (6), (9) возможно завершение преследования до момента времени T_0 .

Действительно, пусть $z_0 \in X_k$. В соответствии с (30) существует число ξ_0 такое, что

$$z_k^{(0)} = \frac{\xi_0}{\lambda_k} (\cos(\sqrt{\lambda_k} T_0) - 1), \quad \dot{z}_k^{(0)} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} T_0). \quad (31)$$

Учитывая (31), положим $u_i(t) = v_i(t)$, $0 \leq t \leq T_0$, $u_i(t) = 0$ на $(T_0, T]$ для всех $i \neq k$, а $u_k(t) = v_k(t) + \xi_0$, $0 \leq t \leq T_0$, и $u_k(t) = 0$ на $(T_0, T]$.

Можно убедиться, что если $\sigma(T_0 + \sqrt{T_0}) \leq \rho$, то $\|u(\cdot)\| \leq \rho$.

Теперь покажем, что $z_i(T_0) = \dot{z}_i(T_0) = 0$ для всех $i \geq 1$. При $i \neq k$ имеем

$$\ddot{z}_i(t) + \lambda_i z_i(t) = 0, \quad z_i(0) = \dot{z}_i(0) = 0$$

в соответствии с (30) и в силу выбора $u_i(\cdot)$. Очевидно, что $z_i(t) = \dot{z}_i(t) = 0$ на $[0, T_0]$. В частности, $z_i(T_0) = \dot{z}_i(T_0) = 0$.

Пусть теперь $i = k$. Имеем

$$\ddot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = -\xi_0, \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad z_k(0) = z_k^{(0)}, \quad \dot{z}_k(0) = \dot{z}_k^{(0)}.$$

В силу (15) и (31)

$$e^{-T_0 C} \begin{pmatrix} z_k(T_0) \\ \dot{z}_k(T_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k^{(0)} + \frac{\xi_0}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^{T_0} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) ds \\ \dot{z}_k^{(0)} - \xi_0 \int_0^{T_0} \cos(\sqrt{\lambda_k} s) ds \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} z_k^{(0)} - \frac{\xi_0 (\cos(\sqrt{\lambda_k} T_0) - 1)}{\lambda_k} \\ \dot{z}_k^{(0)} - \frac{\xi_0 \sin(\sqrt{\lambda_k} T_0)}{\sqrt{\lambda_k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $z_k(T_0) = \dot{z}_k(T_0) = 0$. Как отмечено выше, и $z_i(T_0) = \dot{z}_i(T_0) = 0$ для остальных значений i .

Значит, из любого начального положения $z_0 \in X$ возможно завершение преследования за время T_0 .

б) Пусть, по-прежнему, T – произвольное положительное фиксированное число,

$$Z = X' \cup Y, \quad X' = \bigcup_{k \geq 1} X'_k, \quad Y = \bigcup_{k \geq 1} Y_k,$$

где

$$\begin{aligned} X'_k &= \left\{ z_0 = (z^{(0)}, \dot{z}^{(0)}) : z_i^{(0)} = 0, i \neq k, |z_k^{(0)}| > \frac{\rho\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda_k^{1+r}}}, \dot{z}^{(0)} \in H_r(\Omega) \right\}, \\ Y_k &= \left\{ z_0 = (z^{(0)}, \dot{z}^{(0)}) : z^{(0)} \in H_{r+1}(\Omega), \dot{z}_i^{(0)} = 0, i \neq k, |\dot{z}_k^{(0)}| > \frac{\rho\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda_k^r}} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Покажем, что из любого начального положения $z_0 \in Z$ возможно уклонение от встречи.

Действительно, пусть, для определенности, $z_0 \in X'_k$ (в остальных случаях рассуждения проводятся аналогично), $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, – произвольное управление, $u(\cdot) \in L_2(0, T; H_r(\Omega))$, $\|u(\cdot)\| \leq \rho$.

Положим $v(\cdot) = 0$. Тогда из (15) имеем

$$e^{-tC} \begin{pmatrix} z_k(t) \\ \dot{z}_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k^{(0)} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \\ \dot{z}_k^{(0)} - \int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Так как

$$\left| z_k^{(0)} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} s) u_k(s) ds \right| \geq |z_k^{(0)}| - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^{1+r}}} \rho\sqrt{T}$$

в силу неравенства Коши–Буняковского, то $|z_k^{(0)}| - \rho\sqrt{T}/\sqrt{\lambda_k^{1+r}} > 0$ в соответствии с (32).

Поэтому $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ одновременно в 0 на $[0, T]$ не обращаются.

3) В этом пункте изучается игра (6), (10). Пусть z_0 – произвольное начальное положение, $z_0 \neq 0$, T – произвольное положительное число, $u_0(\cdot)$ – произвольное управление первого игрока, $\|u_0(t)\| \leq \rho$, $u_0(t)$, $0 \leq t \leq \theta$, – сужение управления $u_0(\cdot)$ на отрезок $[0, \theta]$.

Считая известными z_0 и $u_0(t)$, $0 \leq t \leq \theta$, построим сужение $v_0(t)$, $0 \leq t \leq \theta_1$, где $\theta_1 \in (0, \theta]$ – константа, выбираемая ниже. Функция $v_0(t)$, $0 \leq t \leq \theta_1$, будет построена так, чтобы $(z_0(t), \dot{z}_0(t)) \neq 0$ для любого $t \in [0, \theta_1]$. Далее, считая известными $z_0(\theta_1)$, $\dot{z}_0(\theta_1)$ и $u_0(t)$, $\theta_1 \leq t \leq 2\theta_1$, будет построена функция $v_0(t)$, $\theta_1 \leq t \leq 2\theta_1$, так, чтобы $(z_0(t), \dot{z}_0(t)) \neq 0$ на $[\theta_1, 2\theta_1]$ и т.д.

Пусть, как и выше, $z_k^{(0)} \neq 0$. Положим $v_i(t) = 0$ на $[0, T]$ для всех $i \neq k$, $v_k(t) = \alpha + \beta t$, $0 \leq t \leq \theta$, где

$$\|\alpha\| \leq \gamma, \quad \|\beta\| \leq \gamma, \quad \gamma = \sigma(1 + \theta)^{-1}(\lambda_k^r m \theta_1)^{-1/2},$$

m – натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $(m - 1)\theta_1 < T \leq m\theta_1$ [10]. Далее, пусть ((13), (15))

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= z_k^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t u_k(s) \sin(\sqrt{\lambda_k} s) ds - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t v_k(s) \sin(\sqrt{\lambda_k} s) ds, \\ \xi_2(t) &= \dot{z}_k^{(0)} - \int_0^t u_k(s) \cos(\sqrt{\lambda_k} s) ds + \int_0^t v_k(s) \cos(\sqrt{\lambda_k} s) ds, \quad 0 \leq t \leq \theta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi(t, z_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, z_0) \\ \varphi_2(t, z_0) \end{pmatrix}, \\ \varphi_1(t, z_0) &= z_k^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t u_k(s) \sin(\sqrt{\lambda_k} s) ds, \\ \varphi_2(t, z_0) &= \dot{z}_k^{(0)} - \int_0^t u_k(s) \cos(\sqrt{\lambda_k} s) ds.\end{aligned}$$

Учитывая явный вид $v_k(t)$, $0 \leq t \leq \theta_1$, после несложных вычислений (мы их опускаем) имеем

$$\xi(t) = \varphi(t, z_0) - t^2 \Phi(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где $\Phi(t)$, $0 < t \leq \theta_1$, – матричная функция с $\det \Phi(0) \neq 0$.

Ясно, что существует константа $\theta_1 \in (0, \theta]$ такая, что $\det \Phi(t) \neq 0$ на $[0, \theta_1]$.

Из (34) для $t \in (0, \theta_1]$ получим

$$t^{-2} \Phi^{-1}(t) \xi(t) = t^{-2} \Phi^{-1}(t) \varphi(t, z_0) - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В рассматриваемом случае можно убедиться, что найдется число $\delta \in (0, \theta_1]$, для которого $\xi_1(t) \neq 0$ на $[0, \delta]$ при произвольных $u_k(\cdot)$ и $v_k(\cdot)$. Первую компоненту вектор функции $t^{-2} \Phi^{-1}(t) \varphi(t, z_0)$, $0 < t \leq \theta_1$, обозначим через $g_1(t, z_0)$, вторую – через $g_2(t, z_0)$.

Функция $g_1(t, z_0)$, $\delta \leq t \leq \theta_1$, очевидно, является абсолютно непрерывной функцией. Поэтому почти каждое число $\alpha \in [-\gamma, \gamma]$ принимается как значение функцией $g_1(t, z_0)$, $\delta \leq t \leq \theta_1$, лишь конечное число раз [13]. Значит, найдется $\alpha_0 \in [-\gamma, \gamma]$, $\alpha_0 = \alpha(z_0)$, что уравнение $g_1(t, z_0) = \alpha_0$ относительно $t \in [\delta, \theta_1]$ имеет конечное число решений; пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ – решения этого уравнения.

Учитывая этот факт, в (35) положим $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 \in [-\gamma, \gamma]$, где $\beta_0 = \beta(z_0)$, $\beta_0 \neq g_2(t_j, z_0)$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$ (существование β_0 очевидно).

Таким образом, в силу выбора α_0 и β_0 имеем

$$\begin{aligned}g_1(t, z_0) - \alpha_0 &\neq 0, & t \neq t_j, & 1 \leq j \leq n, \\ g_2(t, z_0) &\neq 0, & t = t_j, & 1 \leq j \leq n,\end{aligned}$$

т.е.

$$t^{-2} \Phi^{-1}(t) \varphi(t, z_0) - \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{для всех } t \in [\delta, \theta_1].$$

Следовательно, из (35) имеем

$$\xi(t) = \varphi(t, z_0) - t^2 \Phi(t) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{на } [\delta, \theta_1].$$

Кроме того, $\xi(t) \neq 0$ на $[0, \delta]$ в соответствии с выбором δ . Значит, $\xi(t) \neq 0$ на $[0, \theta_1]$ и $(z_k(t), \dot{z}_k(t)) \neq 0$ на $[0, \theta_1]$.

Можно убедиться, что при предложенном выборе управления $v(\cdot)$ будет выполнено неравенство $\|v_0(\cdot)\| \leq \sigma$.

Справедливость части 3) доказываемой теоремы установлена.

Теорема доказана.

3. Пример. Пусть упругая струна единичной длины с закрепленными концами подвергается поперечному колебанию около своего положения равновесия. Тогда имеем задачу (6) с

$$Az = -\frac{d^2 z}{dx^2}, \quad (36)$$

где областью определения оператора A является подпространство $\dot{C}^2(0, 1)$ пространства $L_2(0, 1)$. Пусть начальным положением являются функции $z^{(0)}$, $\dot{z}^{(0)}$, которые определены следующим образом:

$$z^{(0)} = \frac{1}{48\sqrt{2}} \begin{cases} -4x^3 + 3x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -4(1-x)^3 + 3(1-x), & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (37)$$

$$\dot{z}^{(0)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (38)$$

Известно [14], что энергетическим пространством оператора A является пространство $\dot{W}_2^1(0, 1)$. Собственными функциями и собственными числами оператора A являются

$$\varphi_k = \sqrt{2} \sin \pi k x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda_k = (\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

С помощью этих данных построим пространства $H_r(0, 1)$, $r \geq 0$.

Непосредственным вычислением можно показать, что коэффициенты Фурье функций $z^{(0)}$ и $\dot{z}^{(0)}$ имеют вид

$$z_k^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{(\pi k)^4}, & \text{при нечетном } k, \\ 0, & \text{при четном } k, \end{cases} \quad \dot{z}_k^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{(\pi k)^3}, & \text{при нечетном } k, \\ 0, & \text{при четном } k. \end{cases}$$

Так как

$$\|z^{(0)}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 (z_k^{(0)})^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2l-1)^2} = \frac{1}{8}, \quad \|\dot{z}^{(0)}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (\dot{z}_k^{(0)})^2 = \frac{1}{8}, \quad (39)$$

то $z^{(0)} \in H_3(0, 1)$, $\dot{z}^{(0)} \in H_2(0, 1)$. Например, при $\rho = 1$, $\sigma = 2$, для рассматриваемых игр выполнены все условия теоремы. Поэтому, в играх (6), (7) и (6), (8), для начального положения (37), (38) разрешима задача уклонения от встречи с терминальным множеством $\{0\}$, т.е. с положением успокоения струны. При этом, для игры (6), (7) из (39), видно, что $k = 1$, $v_1(t) = -(2/\pi^2) \operatorname{sgn} \sin(\pi t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (17)). Тогда, для функции $\delta(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (21)), получим следующую оценку:

$$\delta(t) > \frac{1}{\pi^4}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Для остальных игр (6), (8); (6), (9) и (6), (10) также можно указать соответствующие величины.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Л. Черноусько, “Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **56:5** (1992), 810–826.
- [2] С. А. Авдонин, С. В. Иванов, *Управляемость систем с распределенными параметрами*, УМКВО, Киев, 1989.
- [3] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, “Линейные дифференциальные игры”, *Докл. АН СССР*, **174:1** (1967), 27–29.
- [4] Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, “Задача уклонения от встречи в линейных дифференциальных играх”, *Дифференц. уравнения*, **7:3** (1971), 436–445.
- [5] Ю. С. Осипов, “К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами”, *Докл. АН СССР*, **223:6** (1975), 1314–1317.
- [6] А. Г. Бутковский, *Теория оптимального управления распределенными системами*, Наука, М., 1975.
- [7] В. А. Ильин, “Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией”, *Дифференц. уравнения*, **36:11** (2000), 1513–1528.
- [8] В. А. Ильин, “Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце при условии существования конечной энергии”, *Докл. РАН*, **378:6** (2001), 743–747.
- [9] М. Тухтасинов, “О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **59:6** (1995), 979–984.
- [10] Г. И. Ибрагимов, “Об одной задаче оптимального преследования в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **66:5** (2002), 753–759.
- [11] Н. Ю. Сатимов, “О задаче уклонения от встречи в распределенных управляемых системах”, *Труды Международной конференции “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”*, Т. 2, Стерлитамак, 2003, 180–184.
- [12] Н. Ю. Сатимов, Б. Б. Рихсиев, *Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления*, ФАН, Ташкент, 2000.
- [13] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [14] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.

Н. Ю. Сатимов

Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека

М. Тухтасинов

Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека

E-mail: mumin51@mail.ru

Поступило

23.01.2010

Исправленный вариант

25.03.2012