Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Е. Горфинкель, Гармонический анализ на некотором классе сферических однородных пространств, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 703–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:44:19

Гармонический анализ на некотором классе сферических однородных пространств

Н. Е. Горфинкель

Изучается спектр представлений полупростой алгебраической группы в пространствах сечений однородных линейных расслоений на некотором классе сферических однородных пространств; описывается алгебра инвариантных функций на кокасательных расслоениях пространств этого класса, а также инвариантные дифференциальные операторы.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Рассмотрим связную полупростую комплексную алгебраическую группу G и произвольную алгебраическую подгруппу $H \subset G$. Одной из естественных задач, возникающих при изучении однородных пространств, является нахождение спектра представления группы G в пространстве функций $\mathbb{C}[G/H]$, или, иначе, гармонический анализ на однородном пространстве G/H . Однако эта задача не всегда осмысленна: в некоторых случаях ее решение никак не характеризует однородное пространство, поскольку функций на нем “мало”: например, если $H = B$ – борелевская подгруппа в G , то однородное пространство G/B проективно и $\mathbb{C}[G/B] = \mathbb{C}$.

В таких случаях разумно поставить более общую задачу, а именно, изучать спектр представления группы G в сечениях однородных (т.е. снабженных действием группы G) линейных расслоений над G/H . Такие расслоения находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами группы H , а именно, каждому характеру χ ставится в соответствие расслоение $G *_H \mathbb{C}_\chi$ над G/H со слоем $\mathbb{C}_\chi$ над точкой eH , где $\mathbb{C}_\chi$ – это одномерное векторное пространство, в котором H действует характером χ . Пространство $\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi)$ сечений такого расслоения как G -модуль изоморфно подпространству $\mathbb{C}[G]_{-\chi}^{(H)} \subset \mathbb{C}[G]$ H -весовых функций на G веса $-\chi$ для действия H на $\mathbb{C}[G]$ правыми сдвигами аргумента, на котором G действует левыми сдвигами. В частности, в случае тривиального характера χ получаем

$$\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi) \simeq \mathbb{C}[G]^H \simeq \mathbb{C}[G/H].$$

Неприводимые G -подмодули, встречающиеся в пространствах сечений таких расслоений, можно описать, используя полугруппу весов $(B \times H)$ -полуинвариантных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00648-а).

функций на G (здесь B действует на $\mathbb{C}[G]$ левыми сдвигами аргумента, а H – правыми). Эту полугруппу, которую мы будем обозначать $\hat{\mathfrak{X}}(G/H)$, называют расширенной полугруппой весов однородного пространства G/H . Старшие веса неприводимых G -подмодулей в пространстве $\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi)$ суть такие веса λ группы B , что $(\lambda, -\chi) \in \hat{\mathfrak{X}}(G/H)$.

В частности, в случае, когда G/H сферично, т.е. борелевская подгруппа имеет открытую орбиту в G/H или, эквивалентно, спектр представления G в каждом из пространств $\Gamma(G *_H \mathbb{C}_\chi)$ прост, этот спектр однозначно восстанавливается по полугруппе весов $\hat{\mathfrak{X}}(G/H)$. Например, для борелевской подгруппы B односвязной группы G полугруппа $\hat{\mathfrak{X}}(G/B)$ порождается всеми парами (ω_i^*, ω_i) , $i = 1, \dots, n$, где $\omega_1, \dots, \omega_n$ – фундаментальные веса группы G , а n – ее ранг. (Здесь λ^* обозначает старший вес неприводимого представления, сопряженного к неприводимому представлению со старшим весом λ .) Для каждого доминантного веса χ представление G в пространстве $\Gamma(G *_B \mathbb{C}_{-\chi})$ изоморфно неприводимому представлению старшего веса χ^* .

Фиксируем максимальный тор T и максимальную унипотентную подгруппу U такие, что $B = T \ltimes U$. Пусть U' – коммутант группы U . Положим $H = TU'$. Статья посвящена изучению некоторых свойств пространства $X = G/H$. Это пространство сферично, и $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}$ (за исключением случаев, когда в G входит в качестве простого множителя $SL_2(\mathbb{C})$ или $SL_3(\mathbb{C})$); в классе сферических однородных пространств X интересно тем, что имеет максимальные возможные для таких пространств размерность и ранг.

При изучении пространства X можно без ограничения общности считать, что G односвязна (в противном случае заменим ее на односвязную накрывающую $\hat{G}$, $G = \hat{G}/Z$, где Z – дискретная центральная подгруппа; так как $Z \subset \hat{T}$, то $\hat{G}/\hat{T}U' = G/TU'$). В предположении односвязности группы G верна

ТЕОРЕМА 1. *Полугруппа $\hat{\mathfrak{X}}(G/H)$ свободно порождается парами (ω_i^*, ω_i) и $(\omega_i^*, \omega_i - \alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $\omega_1, \dots, \omega_n$ – фундаментальные веса, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – простые корни, а n – ранг односвязной накрывающей группы G .*

Эта теорема была анонсирована автором в [1]. Независимо она была доказана другим способом Панюшевым в [2].

Далее, обозначим алгебры Ли групп G и H через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Аннулятор $\mathfrak{h}^0 \subset \mathfrak{g}^*$ алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}^*$ можно вложить в алгебру $\mathfrak{g}$ с помощью картановского скалярного произведения. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*X однородного пространства $X = G/H$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеем $\mathbb{C}[T^*X]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G|_{\mathfrak{h}^0}$.*

Обозначим через $D(X)$ алгебру дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/H$. Действие $G : X$ индуцирует естественное действие $G : D(X)$. Обозначим через $D(X)^G$ алгебру инвариантных дифференциальных операторов относительно этого действия. Кроме того, пусть $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ – центр универсальной обертывающей. В работе доказана

ТЕОРЕМА 3. *Естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ в алгебру $D(X)^G$ является изоморфизмом.*

Результаты настоящей работы тесно связаны с общими результатами Кнопа [3], [4] об эквивариантной симплектической геометрии кокасательных расслоений гладких G -многообразий (подробнее см. п. 6).

2. Список основных обозначений.

- G – связная полупростая комплексная алгебраическая группа;
- $B \subset G$ – борелевская (максимальная связная разрешимая) подгруппа;
- $T \times U = B$ – максимальный тор и максимальная унипотентная подгруппа;
- $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}$ – алгебры Ли группы G , подгрупп T и U ;
- $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ – центр универсальной обертывающей алгебры;
- $\Delta \supset \Delta_+ \supset \Pi$ – система корней, множества положительных и простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно;
- $\mathfrak{u}^-$ – сумма отрицательных корневых подпространств алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$;
- $\mathfrak{g}_\alpha$ – корневое подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующее корню α ;
- $H = TU' \subset G$;
- $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли группы H ;
- $\mathfrak{h}^0$ – аннулятор $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$;
- $V(\lambda)$ – неприводимый G -модуль старшего веса λ .

3. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы нам понадобится ввести следующие обозначения. Фиксируем базис из корневых векторов $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) в алгебре $\mathfrak{g}$. Обозначим через U_α однопараметрическую подгруппу в G в направлении вектора e_α :

$$U_\alpha = \{\exp se_\alpha \mid s \in \mathbb{C}\}.$$

Тогда максимальная унипотентная подгруппа есть произведение (взятых в любом порядке) однопараметрических подгрупп U_α , соответствующих положительным корням α , а в ее коммутант U' в качестве множителей войдут все те же однопараметрические подгруппы кроме тех, которые соответствуют простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Поэтому можно записать

$$U = U' \cdot U_{\alpha_1} \cdots U_{\alpha_n}.$$

Группа $H = TU'$ связна, алгебра $\mathbb{C}[G]$ факториальна (так как G односвязна), и следовательно, расширенная полугруппа весов $\hat{\mathfrak{X}}(G/H)$ свободна (см. теорему 1 в работе [5] или предложение 2 в статье [6], где доказано аналогичное утверждение для (нерасширенной) полугруппы весов сферического однородного пространства). Обозначим через ${}^{(B)}\mathbb{C}[G]^{(H)}$ множество $(B \times H)$ -полуинвариантных функций (обозначение призвано подчеркнуть, что B действует на G слева, а H справа). Из связности H следует, что любая функция $f \in {}^{(B)}\mathbb{C}[G]^{(H)}$, не представляющаяся в виде произведения двух непостоянных функций из ${}^{(B)}\mathbb{C}[G]^{(H)}$, неприводима в алгебре $\mathbb{C}[G]$, т.е. ей соответствует простой $(B \times H)$ -инвариантный дивизор на группе G .

Наша задача состоит в том, чтобы найти образующие полугруппы $\hat{\mathfrak{X}}(G/H)$. Мы будем решать ее в два этапа:

- 1) найдем $(B \times H)$ -инвариантные простые дивизоры на группе G ;
- 2) предъявим в нужном количестве неприводимые $(B \times H)$ -полуинвариантные функции на G .

Описание инвариантных дивизоров можно извлечь из работы [7], в которой подробно изучается геометрия пространства G/TU' , но мы приведем более простое непосредственное рассуждение.

Нам будет удобнее искать количество H -инвариантных простых дивизоров на G/B – они находятся во взаимнооднозначном соответствии с простыми $(B \times H)$ -инвариантными дивизорами на G .

Рассмотрим сначала действие $B : G/B$. Для этого действия имеется открытая орбита Bx_0 некоторой точки $x_0 \in G/B$ и n B -инвариантных простых дивизоров. Так как $H \subset B$, эти дивизоры H -инвариантны; таким образом, осталось исследовать действие H на Bx_0 . Группа U действует на Bx_0 просто транзитивно, поэтому

$$Bx_0 \simeq U = U' \cdot U_{\alpha_1} \cdots U_{\alpha_n}.$$

При этом естественному действию $B = TU : Bx_0$ соответствует действие $U : U$ левыми сдвигами и $T : U$ сопряжениями. Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между орбитами:

$$\{H\text{-орбиты на } U\} \longleftrightarrow \{T\text{-орбиты на } U_{\alpha_1} \cdots U_{\alpha_n}\}.$$

Выясним, как устроены T -орбиты на $U_{\alpha_1} \cdots U_{\alpha_n}$. Точки $\exp s_1 e_{\alpha_1} \cdots \exp s_n e_{\alpha_n}$ этого многообразия параметризуются наборами координат $(s_1, \dots, s_n)$. Действие тора в этих координатах принимает вид

$$t \cdot (s_1, \dots, s_n) = (\alpha_1(t)s_1, \dots, \alpha_n(t)s_n) \quad \forall t \in T, \quad s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}.$$

Открытая орбита задается условием $s_1 \cdots s_n \neq 0$, дополнительные дивизоры выделяются уравнениями $s_1 = 0, \dots, s_n = 0$ – их n штук.

Итак, на G имеется $2n$ $(B \times H)$ -инвариантных простых дивизоров.

Теперь для завершения доказательства осталось предъявить $2n$ неприводимых $(B \times H)$ -полуинвариантных функций на G . Для этого нам понадобится понятие матричного элемента. Рассмотрим произвольное представление V группы G и двойственное к нему V^* . Пара (ξ, v) , $\xi \in V^*$, $v \in V$, определяет функцию $f_{\xi, v} \in \mathbb{C}[G]$ по следующему правилу:

$$f_{\xi, v}(g) = \langle \xi, gv \rangle.$$

Функция $f_{\xi, v}$ называется *матричным элементом представления V* , а $(G \times G)$ -инвариантное подпространство $M(V)$ в $\mathbb{C}[G]$, порожденное матричными элементами представления V – *пространством матричных элементов $M(V)$ представления V* . Иными словами, $M(V)$ есть образ $(G \times G)$ -эквивариантного отображения

$$\begin{aligned} V^* \otimes V &\longrightarrow \mathbb{C}[G], \\ \xi \otimes v &\longmapsto f_{\xi, v}, \quad \xi \in V^*, \quad v \in V, \end{aligned}$$

и для неприводимого G -модуля V имеет место изоморфизм $(G \times G)$ -модулей

$$M(V) \simeq V^* \otimes V$$

(здесь справа каждая копия группы G действует на своем тензорном множителе).

Рассмотрим теперь фундаментальные представления $V(\omega_1), \dots, V(\omega_n)$ группы G и в них старшие векторы

$$v_1 \in V(\omega_1), \quad \dots, \quad v_n \in V(\omega_n).$$

Представления $V(\omega_1)^*, \dots, V(\omega_n)^*$, сопряженные фундаментальным, нам будет удобно обозначить через $V(\omega_1^*), \dots, V(\omega_n^*)$ соответственно (это по-прежнему набор фундаментальных представлений, которые лишь как-то переставлены). Фиксируем в них старшие векторы

$$\xi_1 \in V(\omega_1^*), \quad \dots, \quad \xi_n \in V(\omega_n^*).$$

Теперь мы готовы сформулировать лемму, которая завершит доказательство.

ЛЕММА 1. *Матричные элементы*

$$f_{\xi_1, v_1}, \dots, f_{\xi_n, v_n}, f_{\xi_1, e_{-\alpha_1} v_1}, \dots, f_{\xi_n, e_{-\alpha_n} v_n} \quad (*)$$

являются неприводимыми $(B \times H)$ -полуинвариантными функциями на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При изоморфизме $(G \times G)$ -модулей $M(V) \simeq V^* \otimes V$ функции $f_{\eta, u}$ соответствует элемент $\eta \otimes u$ тензорного произведения $V^* \otimes V$, поэтому $(B \times H)$ -полуинвариантность функций $(*)$ эквивалентна $(B \times H)$ -полуинвариантности элементов

$$\xi_1 \otimes v_1, \dots, \xi_n \otimes v_n, \xi_1 \otimes e_{-\alpha_1} v_1, \dots, \xi_n \otimes e_{-\alpha_n} v_n$$

тензорных произведений $V(\omega_1^*) \otimes V(\omega_1), \dots, V(\omega_n^*) \otimes V(\omega_n)$. В свою очередь, $(B \times H)$ -полуинвариантность элемента $\xi_i \otimes u$ эквивалентна B -полуинвариантности коектора ξ_i и H -полуинвариантности вектора u . B - (и тем более H -) полуинвариантность $\xi_1, \dots, \xi_n$ и $v_1, \dots, v_n$ следует из определения старшего вектора представления.

H -полуинвариантность вектора u равносильна тому, что u весовой для тора и $\mathfrak{h}'u = 0$. Напомним, что

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\beta \in \Delta_+ \setminus \Pi} \mathfrak{g}_\beta.$$

Вес вектора $e_{-\alpha_i} v_i$ есть $\omega_i - \alpha_i$. Если $e_\beta e_{-\alpha_i} v_i \neq 0$, то $\omega_i - \alpha_i + \beta$ – вес представления $V(\omega_i)$. Пусть $\beta = \sum b_j \alpha_j$, $b_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Тогда

$$\omega_i - \alpha_i + \beta = \omega_i + \sum_{j \neq i} b_j \alpha_j + (b_i - 1) \alpha_i.$$

Выражение в правой части является весом представления $V(\omega_i)$ тогда и только тогда, когда $b_j = 0 \quad \forall j \neq i$ и $b_i = 0$ или $b_i = 1$, т.е. только в случае $\beta = \alpha_i$. Таким образом,

$$e_\beta(e_{-\alpha_i} v_i) = 0 \quad \forall \beta \in \Delta_+ \setminus \Pi$$

и, следовательно, $\mathfrak{h}'(e_{-\alpha_i} v_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, что завершает доказательство $(B \times H)$ -полуинвариантности функций $(*)$.

Их неприводимость следует из факториальности алгебры $\mathbb{C}[G]$. Действительно, предположим, функция f_{ξ_i, v_i} приводима в алгебре $\mathbb{C}[G]$, т.е. существует представление

$$f_{\xi_i, v_i} = f_1 f_2, \quad \text{где} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G], \quad f_1, f_2 \neq \text{const}.$$

Тогда, так как группа $B \times H$ связна, она не может переставлять неприводимые сомножители функций f_1 и f_2 , а значит, каждая из них $(B \times H)$ -полуинвариантна, т.е. $f_1, f_2 \in {}^{(B)}\mathbb{C}[G]^{(H)}$.

B -вес функции f_{ξ_i, v_i} (относительно левого действия G) равен ω_i^* . Пусть B -веса функций f_1, f_2 есть соответственно μ_1 и μ_2 . Тогда $\omega_i^* = \mu_1 + \mu_2$. Так как ω_i^* – фундаментальный вес, это возможно только в том случае, когда (без ограничения общности) $\mu_1 = \omega_i^*, \mu_2 = 0$, но это означает, что f_2 – B -инвариантная функция на G , а значит, константа, что противоречит нашему предположению. Неприводимость функций $f_{\xi_i, e_{-\alpha_i} v_i}$ доказывается точно так же.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Любая G -инвариантная функция F на кокасательном расслоении над $X = G/H$ однозначно определяется своим ограничением на слой над единицей, т.е. на $\mathfrak{h}^0$. На этом слое действует группа H и ограничение $F|_{\mathfrak{h}^0}$ является H -инвариантной функцией на $\mathfrak{h}^0$. Обратно, любая H -инвариантная функция на слое над единицей однозначно продолжается до G -инвариантной функции на кокасательном расслоении, поэтому $\mathbb{C}[T^*X]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H$.

Посредством картановского скалярного произведения можно отождествить алгебру $\mathfrak{g}$ с двойственным пространством $\mathfrak{g}^*$. При этом отождествлении

$$\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{u} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_{-\alpha_i}.$$

Положим $f = \sum_{i=1}^n e_{-\alpha_i}$, $f \in \mathfrak{h}^0$. Элемент f нильпотентен, и его централизатор $\mathfrak{z}(f)$ в алгебре $\mathfrak{g}$ имеет размерность, равную рангу алгебры $\mathfrak{g}$ (см., например, теорему 4.1.6 в [8]); такие элементы называются *регулярными нильпотентами*.

Включим f в $\mathfrak{sl}_2$ -тройку $\{e, h, f\}$, $e \in \mathfrak{u}$, $h \in \mathfrak{t}$. Для этого фиксируем обозначения для стандартных $\mathfrak{sl}_2$ -троек $\{e_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}\}$, $i = 1, \dots, n$, и выберем элемент $h \in \mathfrak{t}$ такой, что $\alpha_i(h) = 2$, $i = 1, \dots, n$. Тогда если $h = \sum_{i=1}^n a_i h_{\alpha_i}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_i \neq 0$ – разложение h по базису картановской подалгебры $\mathfrak{t}$, положим $e = \sum_{i=1}^n a_i e_{\alpha_i}$. Тогда

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Обозначим через S аффинное пространство $f + \mathfrak{z}(e)$. Множество S является сечением для присоединенного действия группы G , т.е. все регулярные $\text{Ad } G$ -орбиты в алгебре $\mathfrak{g}$ пересекают S , причем в единственной точке, и, кроме того, любой многочлен на S однозначно продолжается до G -инвариантного многочлена на $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \simeq \mathbb{C}[S]$. Сечение S называется *сечением Костанта* (подробнее см. § 8.8 [9]).

Хорошо известно, что $\mathfrak{z}(e) \subset \mathfrak{u}$ (см., например, § 5 в работе [10]), и, следовательно, $S \subset \mathfrak{h}^0$.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Каждая H -орбита из некоторого открытого подмножества в $\mathfrak{h}^0$ пересекает S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Иными словами, надо показать, что орбитное отображение

$$\begin{aligned} \Phi: H \times S &\longrightarrow \mathfrak{h}^0, \\ (h, s) &\longmapsto hs \end{aligned}$$

доминантно. Рассмотрим дифференциал отображения Φ в точке (e', f) , где e' – единица группы H :

$$df_{(e', f)}\Phi: \mathfrak{h} \times \mathfrak{z}(e) \longrightarrow \mathfrak{h}^0.$$

Покажем, что он сюръективен. Образ $df_{(e', f)}\Phi$ есть $[\mathfrak{h}, f] \oplus \mathfrak{z}(e)$, поэтому достаточно установить следующее равенство размерностей:

$$\dim[\mathfrak{h}, f] + \dim \mathfrak{z}(e) = \dim \mathfrak{h}^0,$$

которое равносильно

$$\dim[\mathfrak{h}, f] = \dim \mathfrak{u};$$

последнее равенство верно, так как $\dim[\mathfrak{h}, f] = \dim \mathfrak{h}$. Таким образом, $df_{(e', f)}\Phi$ сюръективен и, следовательно, отображение Φ доминантно.

Из леммы 2 следует, что любой H -инвариантный многочлен на $\mathfrak{h}^0$ однозначно определяется своим ограничением на S . Так как, кроме того, все элементы алгебры $\mathbb{C}[S]$ продолжаются до регулярных G -инвариантных функций на $\mathfrak{g}$, то тем более они продолжаются до регулярных H -инвариантных функций на $\mathfrak{h}^0$ и, таким образом,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H \simeq \mathbb{C}[S] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G,$$

откуда следует утверждение теоремы. Отметим (это понадобится в дальнейшем), что сквозной изоморфизм $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ является однородным.

5. Доказательство теоремы 3. Этот раздел посвящен инвариантным дифференциальным операторам на однородном пространстве $X = G/H$.

Отображение взятия символа дифференциального оператора задает вложение $\mathrm{gr}(D(X)^G) \subseteq \mathbb{C}[T^*X]^G$, где $\mathrm{gr}(D(X)^G)$ – присоединенная градуированная алгебра для фильтрованной по порядку дифференциального оператора алгебры $D(X)^G$. Рассмотрим алгебру функций $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$, которая в нашем случае изоморфна алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$. В свою очередь по теореме Пуанкаре–Биркгоффа–Витта $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \simeq S^\bullet \mathfrak{g} \simeq \mathrm{gr}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}))$. Универсальная обертывающая алгебра действует на X дифференциальными операторами, т.е. имеется отображение $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow D(X)$. Переходя к G -инвариантам, получаем отображение $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^G \longrightarrow D(X)^G$. Таким образом, имеется цепочка отображений

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^G) \longrightarrow \mathrm{gr}(D(X)^G) \subseteq \mathbb{C}[T^*X]^G.$$

Далее, воспользовавшись еще раз теоремой Пуанкаре–Биркгоффа–Витта и полной приводимостью представлений группы G , имеем $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \simeq \mathrm{gr}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^G)$. Таким образом, удлиняя цепочку равенств и вложений влево и вправо, получаем

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \simeq \mathrm{gr}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^G) \longrightarrow \mathrm{gr}(D(X)^G) \subseteq \mathbb{C}[T^*X]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H.$$

Поскольку крайние члены этой цепочки по теореме 2 изоморфны (и все отображения согласованы), включение является равенством. Итак,

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathrm{gr}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^G) = \mathbb{C}[T^*X]^G = \mathrm{gr}(D(X)^G) \quad \text{и} \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset D(X)^G.$$

Из совпадения градуированных алгебр следует совпадение фильтрованных, и тем самым теорема доказана.

6. Связь с результатами Ф. Кнопа. В [3] показано, что для отображения моментов

$$\Phi: T^*Y \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

кокасательного расслоения T^*Y гладкого G -многообразия Y существует каноническая факторизация

$$T^*Y \longrightarrow M_Y \longrightarrow \mathfrak{g}^*,$$

где слои общего положения первого отображения связны, а второе отображение конечно.

Пусть далее A_Y – фактортор тора T , решеткой характеров которого является решетка весов B -полуинвариантных рациональных функций на Y , и $\mathfrak{a}_Y$ – алгебра Ли тора A_Y . Тогда существует конечная группа W_Y (и ее действие на $\mathfrak{a}_Y^*$) такая, что категорные факторы $M_Y//G$ и $\mathfrak{a}_Y^*/W_Y$ изоморфны. Группа W_Y называется *малой группой Вейля* (подробно о ней рассказано в работе [3]). Далее, для сферического однородного пространства Y верно (см. предложение 7.2 в [3])

$$\mathbb{C}[T^*Y]^G \simeq \mathbb{C}[M_Y]^G.$$

И, следовательно,

$$\mathbb{C}[T^*Y]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}_Y^*]^{W_Y}.$$

Используя теорему 1, несложно показать, что решетка весов B -полуинвариантных рациональных функций для пространства $Y = X = G/TU'$ порождается простыми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, и значит, фактортор A_X совпадает с фактортором $T/Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G , и $\mathfrak{a}_X^* = \mathfrak{t}^*$. Далее, из теоремы 2 имеем

$$\mathbb{C}[T^*X]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G|_{\mathfrak{h}^0} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t}^*]^W.$$

С другой стороны, из приведенных выше результатов Кнопа следует, что

$$\mathbb{C}[T^*X]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}_X^*]^{W_X} = \mathbb{C}[\mathfrak{t}^*]^{W_X}$$

и, следовательно, малая группа Вейля W_X пространства X совпадает с группой Вейля W группы G .

Этот факт можно использовать для того, чтобы найти алгебру $D(X)^G$ из соображений, отличных от приведенных в этой работе, а именно, используя следующий результат Кнопа (см. пп. 6.3, 6.5 в [4]).

ТЕОРЕМА 4. *Для сферического многообразия Y*

$$D(Y)^G \simeq \mathbb{C}[\rho + \mathfrak{a}_Y^*]^{W_Y},$$

где ρ – это полусумма положительных корней группы G .

Для однородного пространства $X = G/TU'$ получаем

$$D(X)^G \simeq \mathbb{C}[\rho + \mathfrak{t}^*]^W \simeq \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}),$$

где последний изоморфизм – это изоморфизм Хариш–Чандры.

Автор благодарит Э. Б. Винберга и Д. А. Тимашева за помощь и обсуждение этих результатов в процессе их появления, а также многочисленные замечания по предварительному тексту статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Е. Горфинкель, “Спектр представлений редуктивной группы G в пространствах сечений однородных линейных расслоений на G/TU ”, *Летняя школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”* (Самара, 8-15 июня 2009), Тезисы докладов, Универс групп, Самара, 2009, 15–16.
- [2] D. I. Panyushev, “Actions of the derived group of a maximal unipotent subgroup on G -varieties”, *Int. Math. Res. Not.*, 2010, № 4, 674–700.
- [3] F. Knop, “Weylgruppe und Momentabbildung”, *Invent. Math.*, **99**:1 (1990), 1–23.
- [4] F. Knop, “A Harish–Chandra homomorphism for reductive group actions”, *Ann. of Math.* (2), **140**:2 (1994), 253–288.
- [5] Р. С. Авдеев, “Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:6 (2010), 3–26.
- [6] D. I. Panyushev, “Complexity and rank of homogeneous spaces”, *Geom. Dedicata*, **34**:3 (1990), 249–269.
- [7] Д. А. Тимашёв, “Обобщение разложения Брюа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:5 (1994), 110–123.
- [8] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold Math. Ser., Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [9] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309.
- [10] B. Kostant, “The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group”, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 973–1032.
- [11] Э. Б. Винберг, “Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия”, *УМН*, **56**:1 (2001), 3–62.

Н. Е. Горфинкель

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nataly.gorfinkel@gmail.com

Поступило

27.05.2010

Исправленный вариант

01.12.2010