Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Савин, Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому диффеоморфизму, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 712–726

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 05:06:02

Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому диффеоморфизму

А. Ю. Савин

Рассматриваются нелокальные эллиптические операторы, отвечающие диффеоморфизму гладкого замкнутого многообразия. Вычислен индекс таких операторов. Более точно, показано, что индекс оператора равен индексу эллиптической краевой задачи на цилиндре, базой которого является исходное многообразие. В качестве примера рассмотрены нелокальные операторы на двумерном римановом многообразии, отвечающие касательному оператору Эйлера.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Настоящая работа посвящена проблеме индекса для нелокальных эллиптических операторов, отвечающих диффеоморфизму $g: X \rightarrow X$ гладкого замкнутого многообразия. Рассматриваемые операторы имеют вид конечной суммы

$$D = \sum_k D_k T^k: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X), \quad (1.1)$$

где $\{D_k\}$ – набор псевдодифференциальных операторов (ПДО) на многообразии X , а T^k – k -я степень оператора сдвига $Tu(x) = u(g(x))$.

Если выполнено условие эллиптичности, то нелокальный оператор фредгольмов в подходящих пространствах Соболева, и возникает задача о вычислении его индекса в терминах символа. Формулы индекса для эллиптических операторов вида (1.1) были ранее получены для ряда специальных диффеоморфизмов g . Так в [1] даны формулы индекса в случае, когда диффеоморфизм порождает конечную группу или, более общим образом в [2], когда он включается в компактную группу диффеоморфизмов. В обоих случаях действие является изометрическим. В случае неизометрических действий получена формула индекса для действий на окружности [3], а также в работах [4], [5] получена кохомологическая формула индекса для действия группы растяжений на сфере произвольной размерности.

Цель настоящей работы – рассмотреть проблему индекса для произвольного диффеоморфизма. Основным результатом (теорема 2) является равенство

$$\text{ind } D = \text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00867), Программы поддержки “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1562.2008.1), ННИО (грант 436 RUS 113/849/0-1R “К-теория и некоммутативная геометрия стратифицированных многообразий”). Работа была также поддержана премией им. Э. Бальзана, полученной П. Делинем в 2004 г.

(аналитического) индекса нелокального оператора и (аналитического) индекса некоторой краевой задачи $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ на цилиндре $X \times [0, 1]$, в которой краевое условие связывает значения неизвестной функции на основаниях $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ цилиндра. При этом краевая задача выписывается в явном виде в терминах символа оператора D . Надо отметить, что краевые задачи такого типа были изучены в [6], [7], где получена гомотопическая классификация и дана формула индекса таких задач. Отсюда следует, что формула (1.2) приводит к выражению индекса оператора D в топологических терминах. К сожалению, получаемая при этом формула индекса оказывается весьма громоздкой и требуется дальнейшее исследование, для того чтобы привести формулу к виду, удобному для применения к конкретным задачам.

Дадим схему построения краевой задачи, отвечающей оператору (1.1).

1) Сначала оператору D сопоставляется двучленный оператор (т.е. оператор, для которого сумма (1.1) состоит из двух слагаемых) с тем же индексом. Здесь используется конструкция из [4], [5].

2) Двучленному оператору сопоставляется т.н. (*специальный*) *двучленный оператор* (см. [8])

$$D = ATP + B(1 - P), \quad (1.3)$$

где A , B , P – псевдодифференциальные операторы, причем оператор P является почти проектором ($P^2 = P$ с точностью до компактных операторов).

3) Наконец, и это центральное место работы, оператору (1.3) сопоставляется краевая задача $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ с тем же индексом

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right) u = f_1, \\ ATu|_{t=0} + Bu|_{t=1} = f_2, \end{cases}$$

где Δ_X – неотрицательный оператор Лапласа на X , правая часть f_1 и неизвестная u являются функциями на цилиндре $X \times [0, 1]$ с координатами (x, t) , а граничное значение f_2 – функция на X .

Остановимся кратко на содержании работы. В п. 2 рассматриваются специальные двучленные операторы. Выписывается условие эллиптичности для них и доказывается теорема об индексе, т.е. равенство (1.2). В третьем пункте рассматриваются операторы общего вида и в этой ситуации мы также даем условие эллиптичности (следуя [3]) и доказываем теорему об индексе. В пп. 4 и 5 на двумерном многообразии вычисляется индекс двучленных операторов, в которых проектор отвечает касательному оператору Эйлера.

2. Индекс специальных двучленных операторов. Пусть $g: X \rightarrow X$ – диффеоморфизм некоторого гладкого замкнутого многообразия X . Отвечающий ему оператор сдвига обозначим через

$$Tu(x) = u(g(x)).$$

Пусть $dg: TX \rightarrow TX$ – дифференциал, а $(dg)^t$ – двойственное отображение кокасательного расслоения. Через

$$\partial g = [(dg)^t]^{-1}: T^*X \rightarrow T^*X$$

обозначим кодифференциал диффеоморфизма g . Проекцию $T_0^*X \rightarrow X$ кокасательного расслоения без нулевого сечения обозначим через π .

Пусть заданы конечномерные комплексные векторные расслоения E, F на X и проекторы

$$p: \pi^*E \rightarrow \pi^*E, \quad q: \pi^*F \rightarrow \pi^*F, \quad p^2 = p, \quad q^2 = q,$$

действующие в поднятиях этих расслоений на T_0^*X . Будем считать, что p и q являются однородными степени нуль. Через P, Q обозначим ПДО с символами p, q . Здесь и далее под символом всегда понимается главный символ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (*Специальным*) *двучленным оператором* будем называть оператор вида

$$D = ATP + B(1 - P): H^s(X, E) \rightarrow H^s(X, F), \quad (2.1)$$

где H^s – пространства Соболева сечений соответствующих расслоений, а A и B

$$A: H^s(X, g^*E) \rightarrow H^s(X, F), \quad B: H^s(X, E) \rightarrow H^s(X, F),$$

– такие ПДО нулевого порядка, что их символы $a = \sigma(A)$, $b = \sigma(B)$ определяют изоморфизмы

$$a: (\partial g)^* \text{Im } p \rightarrow \text{Im } q, \quad b: \text{Im}(1 - p) \rightarrow \text{Im}(1 - q), \quad (2.2)$$

расслоений на T_0^*X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (теорема конечности). *Оператор (2.1) фредгольмов при всех $s \in \mathbb{R}$, его ядро и коядро являются бесконечно гладкими, а индекс не зависит от s и равен индексу в пространстве гладких сечений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим оператор

$$D^{-1} = T^{-1}A^{-1}Q + B^{-1}(1 - Q),$$

где через A^{-1} , B^{-1} обозначены ПДО с символами a^{-1} и b^{-1} . Покажем, что этот оператор является почти обратным для D . Из (2.2) получаем с точностью до операторов отрицательного порядка равенство

$$D^{-1} = PT^{-1}A^{-1}Q + (1 - P)B^{-1}(1 - Q).$$

Подставляя это выражение в композицию DD^{-1} , с точностью до операторов отрицательного порядка получаем

$$\begin{aligned} DD^{-1} &= [ATP + B(1 - P)][PT^{-1}A^{-1}Q + (1 - P)B^{-1}(1 - Q)] \\ &= ATPPT^{-1}A^{-1}Q + B(1 - P)B^{-1}(1 - Q) = Q + (1 - Q) = 1. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что операторы $P(1 - P)$ и $Q(1 - Q)$ имеют отрицательные порядки, так как для символов выполнены равенства $p(1 - p) = 0$ и $q(1 - q) = 0$.

Аналогично устанавливается равенство $D^{-1}D = 1$ по модулю операторов порядка ≤ -1 . Отсюда следует фредгольмовость.

2. Доказательство гладкости ядра и коядра с учетом п. 1 доказательства стандартно. А именно, пусть $Du = 0$. Применяя к этому равенству оператор D^{-1} , получаем $u - Ku = 0$, где K – оператор отрицательного порядка. Отсюда получаем, что u – гладкая функция. Гладкость коядра устанавливается аналогично.

Перейдем к вычислению индекса оператора D .

На цилиндре $X \times [0, 1]$ с координатами (x, t) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right) u = f_1, \quad ATu|_{t=0} + Bu|_{t=1} = f_2, \quad (2.3)$$

где Δ_X – неотрицательный оператор Лапласа¹ на X , а неизвестная функция u и правые части f_1 и f_2 принадлежат следующим пространствам:

$$u \in H^s(X \times [0, 1], E), \quad f_1 \in H^{s-1}(X \times [0, 1], E), \quad f_2 \in H^{s-1/2}(X, F), \quad s > \frac{1}{2}.$$

Задачу (2.3) будем обозначать для краткости через $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{D}$ обозначает оператор на цилиндре, а $\mathcal{B}$ обозначает оператор краевых условий.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор на цилиндре в задаче (2.3) является дифференциальным по переменной t с коэффициентами – ПДО, действующими вдоль X . Такие операторы рассматривались в [9].

Установим следующую теорему об индексе.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача (2.3) является фредгольмовой и имеет место равенство*

$$\text{ind } D = \text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Краевое условие задачи (2.3) связывает значения функции u при $t = 0$ и $t = 1$, т.е. является нелокальным. Эта задача является частным случаем нелокальных задач, рассмотренных в [6]. Покажем, что задача (2.3) является эллиптической в смысле цитированной работы. В самом деле, сведем нелокальную задачу (2.3) к локальной задаче в окрестности оснований цилиндра. Для этого введем следующие неизвестные функции v и w :

$$v(t) = Tu(t), \quad w(t) = u(1 - t). \quad (2.5)$$

В окрестности оснований цилиндра система (2.3) записывается в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \left[T \left(\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right) T^{-1} \right] v(t) &= Tf_1(t), \\ \left[-\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right] w(t) &= f_1(1 - t), \end{aligned} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}, \quad Av|_{t=0} + Bw|_{t=0} = f_2. \quad (2.6)$$

Система (2.6) уже локальная, так как в граничном условии участвуют только ПДО. Утверждается, что первые два уравнения системы являются эллиптическими. В самом деле, символ основного оператора в (2.3) равен $i\tau + (2p(x, \xi) - 1)|\xi|$, где ξ , τ – двойственные переменные к x , t . Собственные значения этого символа при фиксированных x , ξ , τ равны $i\tau \pm |\xi|$, т.е. символ обратим при $\tau^2 + |\xi|^2 \neq 0$. Это и означает, что оператор эллиптический. Из эллиптичности основного оператора в (2.3) следует эллиптичность основного оператора в (2.6).

¹В качестве оператора $\sqrt{\Delta_X}$ можно взять также и любой ПДО первого порядка с положительно-определенным скалярным символом.

Наконец, покажем, что краевое условие является эллиптическим, т.е. выполнено условие Шапиро–Лопатинского. Для этого вычислим расслоение Кальдерона

$$L_+ \subset \pi^*(g^*E \oplus E)$$

основного оператора задачи (2.6). Напомним (см., например, [9]), что слой $L_+(x, \xi)$ расслоения Кальдерона в точке $(x, \xi) \in T_0^*X$ – это подпространство данных Коши при $t = 0$ тех решений (v, w) системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \sigma[T(2P - 1)\sqrt{\Delta_X}T^{-1}](x, \xi) \right) v(t) &= 0, \\ \left(-\frac{d}{dt} + \sigma[(2P - 1)\sqrt{\Delta_X}](x, \xi) \right) w(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которые ограничены при $t \rightarrow +\infty$. Коэффициенты этой системы равны

$$\begin{aligned} \sigma[T(2P - 1)\sqrt{\Delta_X}T^{-1}](x, \xi) &= (\partial g)^*(|\xi|(2p(x, \xi) - 1)), \\ \sigma[(2P - 1)\sqrt{\Delta_X}](x, \xi) &= |\xi|(2p(x, \xi) - 1) \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались формулой замены переменных в ПДО). Прямое решение системы (2.7) показывает, что расслоение Кальдерона имеет вид

$$L_+ = (\partial g)^* \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im}(1 - p). \quad (2.8)$$

Оператор граничных условий задачи (2.6) определяет гомоморфизм расслоений

$$L_+ \xrightarrow{\sigma(A) + \sigma(B)} \pi^*F, \quad (v, w) \mapsto \sigma(A)v + \sigma(B)w.$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом, что следует из изоморфности отображений в (2.2) и того, что $v \in (\partial g)^* \operatorname{Im} p$, а $w \in \operatorname{Im}(1 - p)$ (см. разложение (2.8)).

Итак, условие Шапиро–Лопатинского выполнено и задача (2.6) является эллиптической. Следовательно, задача (2.3) является фредгольмовой в силу теоремы конечности работы [6].

2. Докажем равенство (2.4). Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right) u = f_1, \\ u|_{t=0} - u|_{t=1} = f_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

для того же оператора, что и в задаче (2.3), но с “тривиальным” граничным условием. Эту задачу будем обозначать через $(\mathscr{D}, \mathscr{B}_0)$. Утверждается, что индекс задачи (2.9) равен нулю

$$\operatorname{ind}(\mathscr{D}, \mathscr{B}_0) = 0. \quad (2.10)$$

В самом деле, из сюръективности граничного оператора $u \mapsto u|_{t=0} - u|_{t=1}$ следует, что индекс задачи (2.9) равен индексу соответствующей однородной задачи с нулевым граничным значением $f_2 = 0$. Ядро (коядро) однородной задачи с условием периодичности $u|_{t=0} - u|_{t=1} = 0$ изоморфно ядру (коядру) оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X}$$

с постоянными по переменной t коэффициентами на торе $X \times \mathbb{S}^1$. Индекс оператора на торе равен нулю, так как коэффициенты этого оператора не зависят от t . Равенство (2.10) установлено.

Краевые задачи (2.3) и (2.9) отличаются только граничными условиями. Поэтому разность индексов этих задач равна

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) - \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_0) = \operatorname{ind} C \quad (2.11)$$

индексу оператора

$$C: H^{s-1/2}(X, E) \xrightarrow{P \oplus (1-P)} H^{s-1/2}(X, E \oplus E) \xrightarrow{AT+B} H^{s-1/2}(X, F),$$

определенного на основании цилиндра (формула типа Аграновича–Дынина, см. [10]). Имеем $Cu = ATPu + B(1-P)u = Du$, т.е. оператор C равен первоначальному оператору D .

Следовательно, из (2.10) и (2.11) получаем

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind} C = \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) - \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_0) = \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [6] было показано, что эллиптическая нелокальная краевая задача вида (2.3) определяет элемент в группе K -гомологий Каспарова $K_0(X^g)$ гладкого многообразия

$$X^g = X \times [0, 1] / \{(x, 0) \sim (g(x), 1)\} \quad (2.12)$$

– тора отображения $g: X \rightarrow X$, получаемого отождествлением оснований цилиндра под действием диффеоморфизма g . Более того, в цитированной работе установлено, что указанный элемент группы K -гомологий определяет краевую задачу с точностью до стабильной гомотопии.

3. Индекс операторов общего вида. В этом пункте устанавливается аналог теоремы 1 для общих операторов со сдвигом. Для удобства читателя сначала напомним понятие эллиптичности таких операторов, введенное в работах А. Б. Антоневи-ча и А. В. Лебедева (см. монографии [8], [3] и цитированную в них литературу).

Через S^*X обозначим факторпространство $T_0^*X/\mathbb{R}_+$ кокасательного расслоения без нулевого сечения по действию группы положительных чисел умножениями в слоях. Символ ПДО нулевого порядка будем рассматривать как гладкую функцию на S^*X .

Действие кодифференциала $\partial g: T^*X \rightarrow T^*X$ индуцирует действие на S^*X , которое будем обозначать тем же символом. Через $C(S^*X) \rtimes \mathbb{Z}$ обозначим *скрещенное произведение* алгебры непрерывных функций на S^*X и группы $\mathbb{Z}$ по действию $n \mapsto (\partial g^n)^*$. Напомним, что скрещенное произведение это пополнение по специальной $*$ -норме² алгебры финитных функций на группе $\mathbb{Z}$ со значениями в $C(S^*X)$ с умножением $f_1, f_2 \mapsto f_1 f_2$, определяемым скрученной сверткой

$$(f_1 f_2)(k) = \sum_{i+j=k} f_1(i) (\partial g^i)^* f_2(j), \quad \text{где } (\partial g)^* u(x, \xi) = u(\partial g(x, \xi)),$$

²Подробное изложение теории скрещенных произведений читатель может найти, например, в [11].

и операцией сопряжения $f \mapsto f^*$

$$f^*(j) = (\partial g^j)^* \bar{f}(-j).$$

Чтобы определить символ для нелокальных операторов удобно заменить оператор сдвига $Tu(x) = u(g(x))$ на унитарный оператор следующим образом. Фиксируем на X невырожденную меру (плотность) μ и определим гильбертово пространство $L^2(X, \mu)$. Прямая проверка показывает, что оператор

$$\tilde{T} = \mu^{1/2} T \mu^{-1/2}: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$$

является унитарным. В несколько более явном виде этот унитарный оператор может быть записан как $\tilde{T} = |J|^{-1/2} T$, где $J = (g^* \mu)/\mu$ – якобиан диффеоморфизма g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Символом* оператора

$$D = \sum_{k=-N}^N D_k \tilde{T}^k, \quad (3.1)$$

где D_k – ПДО нулевого порядка на X , называется элемент

$$\sigma(D) \in C(S^* X) \rtimes \mathbb{Z},$$

определяемый равенством $\sigma(D)(k) = \sigma(D_k)$.

Рассмотрим матричный оператор

$$D: L^2(X, \mathbb{C}^l) \rightarrow L^2(X, \mathbb{C}^l), \quad (3.2)$$

компоненты которого являются нелокальными операторами вида (3.1).³ Оператор (3.2) называется *эллиптическим*, если его символ

$$\sigma(D) \in C(S^* X, \text{Mat}(l)) \rtimes \mathbb{Z}$$

обратим, где через $\text{Mat}(l)$ обозначена алгебра матриц l на l . Справедлива теорема конечности: эллиптический оператор (3.2) является фредгольмовым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что эллиптический оператор может не быть фредгольмов во всей шкале пространств Соболева H^s (см., например, [3]). По этой причине здесь и далее мы рассматриваем операторы в пространстве L^2 . Операторы в пространствах H^s могут быть рассмотрены, пользуясь редукцией порядков.

Вычислим теперь индекс эллиптического оператора D вида (3.2). Наша цель – построить краевую задачу, индекс которой равен индексу этого оператора.

Переходя, если необходимо, к оператору $D\tilde{T}^m$ с тем же индексом, где число $m > 0$ является достаточно большим, можно считать без ограничения общности, что

$$D = D_0 + D_1 \tilde{T} + \dots + D_N \tilde{T}^N. \quad (3.3)$$

³Операторы, действующие в сечениях расслоений, могут быть рассмотрены аналогично.

Далее, имеет место равенство

$$\operatorname{ind}(D_0 + D_1\tilde{T} + \dots + D_N\tilde{T}^N) = \operatorname{ind} \begin{pmatrix} D_0 + D_1\tilde{T} & D_2 & \dots & D_{N-1} & D_N \\ -\tilde{T} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{T} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\tilde{T} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

которое вытекает из того, что $N \times N$ -матрица в правой части равенства приводится элементарными преобразованиями к диагональной матрице с компонентами $D_0 + D_1\tilde{T} + \dots + D_N\tilde{T}^N, 1, \dots, 1$.

Матрицу в (3.4) обозначим для краткости через

$$\begin{pmatrix} D_0 + D_1\tilde{T} & D_2 & \dots & D_{N-1} & D_N \\ -\tilde{T} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{T} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\tilde{T} & 1 \end{pmatrix} = A\tilde{T} + B.$$

Следуя [3], определим некоторый псевдодифференциальный почти проектор

$$P: L^2(X, \mathbb{C}^{Nl}) \rightarrow L^2(X, \mathbb{C}^{Nl}),$$

т.е. оператор, символ которого является проектором ($\sigma(P)^2 = \sigma(P)$). Из эллиптичности оператора D следует эллиптичность оператора $A\tilde{T} + B$. Более того, операторы $D(z) = A\tilde{T}z + B$ являются эллиптическими при всех $z \in \mathbb{C}$, по модулю равных единице. Положим

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \sigma^{-1} d\sigma, \quad \text{где } \sigma = \sigma(D(z)). \quad (3.5)$$

Элемент p является проектором и лежит в подалгебре

$$p \in C(S^*X, \operatorname{Mat}(Nl)) \subset C(S^*X, \operatorname{Mat}(Nl)) \rtimes \mathbb{Z}$$

непрерывных матриц-функций. Следовательно, p можно рассматривать как (непрерывный) символ некоторого ПДО, который обозначим через P .

Теперь на цилиндре $X \times [0, 1]$ рассмотрим краевую задачу (ср. (2.3))

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (2P - 1)\sqrt{\Delta_X} \right) u = f_1, \quad A\tilde{T}u|_{t=0} + Bu|_{t=1} = f_2, \quad (3.6)$$

в которой неизвестная u и правые части f_1, f_2 принадлежат пространствам

$$u \in H^1(X \times [0, 1], \mathbb{C}^{Nl}), \quad f_1 \in L^2(X \times [0, 1], \mathbb{C}^{Nl}), \quad f_2 \in H^{1/2}(X, \mathbb{C}^{Nl}).$$

Краевую задачу (3.6) будем обозначать как и ранее (ср. (2.3)) через $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$.

Получим следующую теорему об индексе.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{ind} D = \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}),$$

где оператор D определен в (3.3), а краевая задача $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ в (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Краевую задачу $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ будем рассматривать как задачу для ПДО с непрерывным символом в смысле [12]. Для этой краевой задачи выполнено условие Шапиро–Лопатинского. Соответствующая проверка делается также как в доказательстве теоремы 1.

2. Выше было установлено, что $\text{ind } D = \text{ind}(A\tilde{T} + B)$.

3. В [8] доказано равенство $\text{ind}(A\tilde{T} + B) = \text{ind}(A\tilde{T}P + B(1 - P))$ (в действительности, операторы, участвующие в этом равенстве, соединяются линейной гомотопией в пространстве эллиптических операторов). Далее, оператор $A\tilde{T}P + B(1 - P)$ является специальным двучленным, с точностью до того обстоятельства, что почти проектор P имеет непрерывный символ. Пусть P_ε – семейство почти проекторов с гладкими символами p_ε такими, что $|p - p_\varepsilon| < \varepsilon$. Тогда при малых ε оператор $A\tilde{T}P_\varepsilon + B(1 - P_\varepsilon)$ будет эллиптическим и будет выполнено равенство

$$\text{ind}(A\tilde{T}P + B(1 - P)) = \text{ind}(A\tilde{T}P_\varepsilon + B(1 - P_\varepsilon)).$$

4. По теореме 1 индекс специального двучленного оператора $A\tilde{T}P_\varepsilon + B(1 - P_\varepsilon)$ равен индексу соответствующей нелокальной краевой задачи, которую обозначим через $(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathcal{B})$:

$$\text{ind}(A\tilde{T}P_\varepsilon + B(1 - P_\varepsilon)) = \text{ind}(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathcal{B}).$$

Наконец, по непрерывности получаем

$$\text{ind}(\mathcal{D}_\varepsilon, \mathcal{B}) = \text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}).$$

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим частный случай, когда оператор D является специальным двучленным, т.е. $D = ATQ + B(1 - Q)$, где Q – некоторый почти проектор. Прямое вычисление показывает, что в этом случае проектор (3.5) равен $q = \sigma(Q)$, а краевая задача (3.6) переходит в краевую задачу (2.3). Отметим, что в задаче (3.6) можно заменить $\tilde{T}$ на T , так как эти операторы совпадают с точностью до положительного скалярного множителя.

4. Касательный оператор Эйлера. Далее мы дадим формулу индекса специальных двучленных операторов, в которых проектор является спектральным проектором касательного оператора Эйлера на двумерном римановом многообразии. Определим этот оператор.

Пусть (X, h) – двумерное гладкое замкнутое многообразие с римановой метрикой h . Рассмотрим оператор

$$E_h = d + d^* : \Omega(X) \rightarrow \Omega(X), \quad (4.1)$$

действующий в пространствах гладких дифференциальных форм на X . Здесь сопряженный оператор $d^* = - * d *$ отвечает метрике h и оператору Ходжа $*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Оператор (4.1) будем называть *касательным оператором Эйлера*. Терминология объясняется тем (см. [13]), что оператор Эйлера

$$d + d^* : \Omega^{\text{ev}}(X \times [0, 1]) \rightarrow \Omega^{\text{odd}}(X \times [0, 1])$$

на цилиндре $X \times [0, 1]$ с метрикой $h + dt^2$, действующий из пространства форм четной степени в пространство форм нечетной степени, изоморфен оператору

$$\frac{\partial}{\partial t} + E_h : C^\infty([0, 1], \Omega(X)) \rightarrow C^\infty([0, 1], \Omega(X)).$$

Пусть теперь $g : X \rightarrow X$ – некоторый диффеоморфизм. Оператор сдвига, отвечающий g , действует на формах всех степеней по формуле

$$T\omega = g^*\omega, \quad \omega \in \Omega(X).$$

Имеет место равенство

$$TE_hT^{-1} = E_{g^*h}, \quad (4.2)$$

где через g^*h обозначен обратный образ⁴ метрики h при диффеоморфизме g . Равенство (4.2) проверяется прямым вычислением.

Оператор E_h является эллиптическим и самосопряженным. Поэтому корректно определен его неотрицательный спектральный проектор, обозначаемый через Π_h :

$$\Pi_h = \frac{1}{2}(1 + E_h|E_h|^{-1} + P_{\ker E_h}),$$

где $P_{\ker E_h}$ – проектор на ядро оператора E_h . Проектор Π_h является ПДО с символом

$$\sigma(\Pi_h) = \frac{1}{2}(1 + \sigma(E_h)|\sigma(E_h)|^{-1}),$$

равным неотрицательному спектральному проектору символа $\sigma(E_h)$.

Для дальнейшего нам будет важно следующее свойство спектральных проекторов, отвечающих разным метрикам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любых двух римановых метрик h и h' на X оператор*

$$\Pi_{h'} : \text{Im } \Pi_h \rightarrow \text{Im } \Pi_{h'}$$

является фредгольмовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно (см. [14]) показать, что отображение

$$\sigma(\Pi_{h'}) : \text{Im } \sigma(\Pi_h) \rightarrow \text{Im } \sigma(\Pi_{h'}) \quad (4.3)$$

является изоморфизмом расслоений на кокасательном расслоении без нулевого сечения T_0^*X .

Сначала вычислим символы операторов E_h и $E_{h'}$ в некоторой точке в T_0^*X . С этой целью выберем в X локальные координаты x_1, x_2 , в которых метрика является евклидовой в фиксированной точке. Заморозим коэффициенты метрик в этой точке. Тогда имеем

$$h = (dx_1)^2 + (dx_2)^2, \quad h' = S^{*-1}R_\varphi^{*-1}h,$$

где R_φ – поворот вокруг начала координат на некоторый угол φ , а S – преобразование вида

$$S(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 + kx_1)$$

⁴Обратный образ метрики определяется формулой $(g^*h)(a, b) = h(dg(a), dg(b))$.

с некоторыми коэффициентами λ_1, λ_2, k , причем $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Тогда получаем

$$E_{h'} = E_{S^{*-1}R_\varphi^{*-1}h} = E_{S^{*-1}h},$$

где мы воспользовались тем, что метрика h инвариантна относительно поворотов.

Итак, надо доказать предложение в случае спектральных проекторов операторов E_h и $S^{*-1}E_hS^*$. Выпишем эти операторы в явном виде. С этой целью в пространстве форм выберем базис

$$1, dx_1, dx_2, dx_1 dx_2. \quad (4.4)$$

ЛЕММА 1. В базисе (4.4) оператор $S^{*-1}E_hS^*$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1^2 \partial_1 - k \lambda_1 \partial_2 & -(\lambda_2^2 + k^2) \partial_2 - k \lambda_1 \partial_1 & 0 \\ \partial_1 & 0 & 0 & (\lambda_2^2 + k^2) \partial_2 + k \lambda_1 \partial_1 \\ \partial_2 & 0 & 0 & -\lambda_1^2 \partial_1 - k \lambda_1 \partial_2 \\ 0 & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $\partial_j = \partial/\partial x_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $S^{*-1}dS^* = d$ (инвариантность внешнего дифференциала d при заменах переменных) дает компоненты матрицы (4.5) под диагональю.

Масштабированный оператор Ходжа $*' = S^{*-1} * S^*$ действует на базисных векторах по формулам

$$\begin{aligned} *'1 &= \frac{dx_1 dx_2}{\lambda_1 \lambda_2}, & *'(dx_1 dx_2) &= \lambda_1 \lambda_2, \\ *'(dx_1) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} dx_2 - \frac{k}{\lambda_2} dx_1, & *'(dx_2) &= -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{k^2}{\lambda_1 \lambda_2}\right) dx_1 + \frac{k}{\lambda_2} dx_2. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $S^{*-1}d^*S^* = -*'d*'$ действует по формулам

$$\begin{aligned} S^{*-1}d^*S^*f &= 0, \\ S^{*-1}d^*S^*(adx_1 + bdx_2) &= -\lambda_1^2 \partial_1 a - \lambda_2^2 \partial_2 b - k \lambda_1 \partial_2 a - k \lambda_1 \partial_1 b - k^2 \partial_2 b, \\ S^{*-1}d^*S^*(cdx_1 dx_2) &= \partial_1 c(k \lambda_1 dx_1 - \lambda_1^2 dx_2) + \partial_2 c((\lambda_2^2 + k^2) dx_1 - k \lambda_1 dx_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенства (4.6) дают матрицу (4.5).

Установим теперь, что отображение (4.3) – изоморфизм. Так как ранги символов проекторов равны, достаточно проверить мономорфность. Пусть u – элемент ядра этого отображения, т.е. u лежит в положительном спектральном подпространстве символа $\sigma(E_h) = \Phi_0$ и в отрицательном подпространстве символа $\sigma(S^{*-1}E_hS^*) = \Phi$. Далее, так как Φ^2 и Φ_0^2 – скалярные символы, спектральные подпространства для Φ и Φ_0 являются собственными подпространствами. Следовательно, приведенные выше условия на u приводят к равенствам

$$(\Phi + \mu I)u = 0, \quad (\Phi_0 - |\xi|I)u = 0,$$

где через μ обозначено положительное собственное значение матрицы Φ . Из последних двух уравнений получаем

$$\left(\frac{\Phi}{\mu} + \frac{\Phi_0}{|\xi|}\right)u = 0. \quad (4.7)$$

Пользуясь выражением (4.5), выпишем матрицу системы (4.7)

$$i\mu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1(\mu + \lambda_1^2) - k\lambda_1\xi_2 & -\xi_2(\mu + \lambda_2^2 + k^2) - k\lambda_1\xi_1 & 0 \\ \xi_1(1 + \mu) & 0 & 0 & \xi_2(\mu + \lambda_2^2 + k^2) + k\lambda_1\xi_1 \\ \xi_2(1 + \mu) & 0 & 0 & -\xi_1(\mu + \lambda_1^2) - k\lambda_1\xi_2 \\ 0 & -\xi_2(1 + \mu) & \xi_1(1 + \mu) & 0 \end{pmatrix}$$

(для простоты полагаем $|\xi| = 1$). Определитель этой матрицы пропорционален произведению

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2(\mu + \lambda_2^2 + k^2) + k\lambda_1\xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1(\mu + \lambda_1^2) - k\lambda_1\xi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\xi_1(\mu + \lambda_1^2) - k\lambda_1\xi_2 & -\xi_2(\mu + \lambda_2^2 + k^2) - k\lambda_1\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix}$$

определителей второго порядка, каждый из которых равен

$$-(\lambda_1\xi_1 + k\xi_2)^2 - \mu\xi_1^2 - (\mu + \lambda_2^2)\xi_2^2.$$

Очевидно, последнее выражение является отрицательным при $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$. Поэтому матрица системы (4.7) невырождена. Следовательно, $u = 0$. Мономорфность отображения (4.3) установлена. Из мономорфности следует изоморфность в силу равенства рангов проекторов.

Предложение 2 доказано.

5. Пример. Рассмотрим нелокальный оператор

$$D = A\Pi_h + B(1 - \Pi_h): \Omega(X) \otimes \mathbb{C}^N \rightarrow \Omega(X) \otimes \mathbb{C}^N. \quad (5.1)$$

Этот оператор будет специальным двучленным (см. определение 1), если отображение

$$\text{Im } \sigma(\Pi_{g^*h}) \oplus \text{Im}(1 - \sigma(\Pi_h)) \xrightarrow{\sigma(A) + \sigma(B)} \pi^* \Lambda(X) \otimes \mathbb{C}^N$$

является изоморфизмом расслоений на T_0^*X . Здесь через $\Lambda(X)$ обозначено расслоение внешних форм на X . В предположении, что это условие выполнено, вычислим индекс оператора D .

По теореме 1 имеем

$$\text{ind } D = \text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad (5.2)$$

где краевая задача $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + E_h\right)u = f_1, \quad ATu|_{t=0} + Bu|_{t=1} = f_2.$$

Чтобы вычислить индекс этой краевой задачи, рассмотрим для оператора $\mathcal{D}$ на цилиндре $X \times [0, 1]$ специальную краевую задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + E_h\right)u = f_1, \quad Tu|_{t=0} - u|_{t=1} = f_2. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 2. Краевая задача (5.3), обозначаемая далее через $(\mathcal{D}, \mathcal{B}_0)$, является эллиптической и имеет место равенство

$$\text{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_0) = N\chi(X^g) = 0, \quad (5.4)$$

где $\chi(X^g)$ – эйлерова характеристика тора отображения g (см. (2.12)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим такую гомотопию метрик на цилиндре $X \times [0, 1]$ с параметром $\tau \in [0, 1]$, что при $\tau = 0$ метрика есть

$$(dt)^2 + h,$$

а при $\tau = 1$ равна

$$(dt)^2 + h(t),$$

где

$$h(t) = \begin{cases} h & \text{при } t < 1/3, \\ g^*h & \text{при } t > 2/3. \end{cases}$$

Гомотопии метрик отвечает гомотопия операторов

$$\mathcal{D}_\tau = \frac{\partial}{\partial t} + E_{h_\tau(t)}$$

и соответствующее семейство краевых задач $(\mathcal{D}_\tau, \mathcal{B}_0)$. Утверждается, что семейство $(\mathcal{D}_\tau, \mathcal{B}_0)$ состоит из эллиптических задач. В самом деле, замена (2.5) сводит (в окрестности границы) задачу $(\mathcal{D}_\tau, \mathcal{B}_0)$ к локальной задаче

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + E_{g^*h_\tau(0)} \right) \right] v(t) = Tf_1(t), \\ \left[-\frac{\partial}{\partial t} + E_{h_\tau(1)} \right] w(t) = f_1(1-t), \end{cases} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}, \quad v|_{t=0} - w|_{t=0} = f_2. \quad (5.5)$$

Эта краевая задача удовлетворяет условию Шапиро–Лопатинского, так как в силу предложения 2 подрасслоения Кальдерона

$$\text{Im } \sigma(\Pi_{g^*h_\tau(0)}) \quad \text{и} \quad \text{Im } \sigma(1 - \Pi_{h_\tau(1)})$$

задачи (5.3) на двух основаниях цилиндра являются дополнительными.

2. В конце гомотопии получаем краевую задачу $(\mathcal{D}_1, \mathcal{B}_0)$ для оператора

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + E_{h(t)}.$$

Индекс этой задачи равен индексу оператора на торе отображения $g: X \rightarrow X$. Это следует из того, что метрика h_1 – гладкая метрика на торе отображения g , а краевое условие задачи (5.5) при нулевом граничном значении $f_2 = 0$ есть условие непрерывности функции на торе отображения g . Осталось заметить, что на X^g получаем оператор Эйлера (см. замечание 5), индекс которого равен эйлеровой характеристике многообразия.

3. Эйлерова характеристика многообразия X^g равна нулю:

$$\chi(X^g) = \chi(X)\chi(\mathbb{S}^1) = 0.$$

По формуле (2.11) получаем

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) = \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) - \operatorname{ind}(\mathcal{D}, \mathcal{B}_0) = \operatorname{ind} C, \quad (5.6)$$

где C – ПДО, равный

$$C = AQ + B(1 - Q),$$

а через Q обозначен ПДО с символом – проектором на подрасслоение $\operatorname{Im} \sigma(\Pi_{g^*h})$ параллельно подрасслоению $\operatorname{Im}(1 - \sigma(\Pi_{g^*h}))$. Этот вид оператора следует из (5.5).

Таким образом, из (5.6), (5.4), (5.2) получаем следующую формулу индекса:

$$\operatorname{ind}(AT\Pi_h + B(1 - \Pi_h)) = \operatorname{ind}(AQ + B(1 - Q)), \quad (5.7)$$

где в правой части равенства стоит эллиптический ПДО, индекс которого вычисляется по формуле Атьи–Зингера.

Дадим другой способ вычисления индекса оператора (5.1). Сначала исследуем один специальный двучленный оператор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Оператор $D_0 = T\Pi_h + (1 - \Pi_h)$ является эллиптическим и имеет место равенство*

$$\operatorname{ind} D_0 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Почти обратный оператор равен $D_0^{-1} = T^{-1}Q + (1 - Q)$, где Q – ПДО, который был определен в п. 5. Отсюда вытекает эллиптичность.

2. Оператор сдвига осуществляет изоморфизм $T : \operatorname{Im} \Pi_h \rightarrow \operatorname{Im} \Pi_{g^*h}$ (это следует из (4.2)). Отсюда получаем, что

$$\ker D_0 \simeq \operatorname{Im} \Pi_{g^*h} \cap \operatorname{Im}(1 - \Pi_h), \quad \operatorname{coker} D_0 \simeq L^2 / (\operatorname{Im} \Pi_{g^*h} + \operatorname{Im}(1 - \Pi_h)).$$

Поэтому индекс оператора D_0 равен индексу

$$\operatorname{ind} D_0 = \operatorname{ind}(\Pi_h : \operatorname{Im} \Pi_{g^*h} \rightarrow \operatorname{Im} \Pi_h) \quad (5.8)$$

проектора Π_h , действующего между образами проекторов Π_{g^*h} и Π_h . Пусть $h(t)$ – гомотопия метрик, соединяющая метрики g^*h и h . При такой гомотопии семейство

$$\Pi_h : \operatorname{Im} \Pi_{h(t)} \rightarrow \operatorname{Im} \Pi_h$$

состоит из фредгольмовых операторов (предложение 2). Утверждается, что проектор $\Pi_{h(t)}$ меняется непрерывно. В самом деле, это спектральный проектор оператора $d + d^*$, ядро которого состоит из гармонических форм и изоморфно когомологиям де Рама многообразия X (теория Ходжа–де Рама). Следовательно, при изменении t у операторов семейства нет малых по модулю собственных значений отличных от нуля, и поэтому неотрицательный спектральный проектор непрерывно зависит от t .

В конце гомотопии при $t = 1$ оператор $\Pi_h : \operatorname{Im} \Pi_{h(1)} \rightarrow \operatorname{Im} \Pi_h$ является тождественным. Следовательно, индекс (5.8) равен нулю в силу гомотопической инвариантности. Предложение доказано.

Пользуясь предложением 3, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} D &= \operatorname{ind} DD_0^{-1} + \operatorname{ind} D_0 = \operatorname{ind} DD_0^{-1} \\ &= \operatorname{ind}[AT\Pi_h + B(1 - \Pi_h)][T^{-1}Q + (1 - Q)] = \operatorname{ind}(AQ + B(1 - Q)). \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с полученным ранее (5.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Второй метод вычисления индекса является более прямым (не использует краевых задач), чем первый метод. Однако он является более *жестким*. Более точно, при использовании краевых задач нам было достаточно всюду в доказательствах использовать только *почти проекторы*. Если же краевые задачи не используются, то необходимо выбирать не почти проекторы, а проекторы. Конечно, в рассматриваемой задаче получить проектор не составляет труда, однако, в более общих ситуациях, например, в случае семейств операторов, имеются нетривиальные препятствия к такому выбору (см. [15]).

Автор благодарен Б. Ю. Стернину за внимание и ценные замечания по работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Антоневиц, “Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 663–675.
- [2] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. Nonlocal Elliptic Operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **183**, Advances in Partial Differential Equations, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [3] A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev, *Functional Differential Equations. II. C^* -Applications*, Part 1. Equations with Continuous Coefficients, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **94**, Longman, Harlow, 1998; Part 2. Equations with Discontinuous Coefficients and Boundary Value Problems, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **95**, Longman, Harlow, 1998.
- [4] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, “Нелокальные эллиптические операторы для группы растяжений”, *Докл. РАН*, **433**:1 (2010), 21–24.
- [5] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, “Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений”, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 99–130.
- [6] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, “Дефект индекса в теории нелокальных задач и η -инвариант”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 85–126.
- [7] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, “Индекс для одного класса нелокальных эллиптических операторов”, *Спектральные и эволюционные задачи*, т. 14, Материалы XIV Крымской осенней математической школы-симпозиума, ТНУ, Симферополь, 2004, 35–41.
- [8] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-Differential Equations. I. C^* -Theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1994.
- [9] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 3: *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.
- [10] М. С. Агранович, А. С. Дынин, “Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области”, *Докл. АН СССР*, **146**:3 (1962), 511–514.
- [11] D. P. Williams, *Crossed Products of C^* -algebras*, Math. Surveys Monogr., **134**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [12] S. Rempel, B.-W. Schulze, *Index Theory of Elliptic Boundary Problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
- [13] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, “Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77** (1975), 43–69.
- [14] А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, “Эллиптические операторы в четных подпространствах”, *Матем. сб.*, **190**:8 (1999), 125–160.
- [15] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, “Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **79**:1 (1976), 71–99.

А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: antonsavin@mail.ru

Поступило

17.05.2010

Исправленный вариант

08.02.2011