Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Н. Гарифьянов, Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 674–679

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:26:33

УДК 517

МОМЕНТЫ СТИЛЬТЪЕСА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Ф. Н. Гарифьянов

Исследована лакунарная однородная проблема моментов

$$\int_0^\infty F(x) e^{-x} x^{4n+3} dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

в классе целых функций экспоненциального типа.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Проблема моментов Стильтьеса (МС) состоит в отыскании функции $F(x)$, для которой

$$\int_0^\infty F(x) x^n dx = c_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где c_n – заданные числа. Известно, что если $F(x) e^{\beta \sqrt{x}} \in L(0, \infty)$ при $\beta > 0$, то $\exists n: c_n \neq 0$. С другой стороны, для функций $F_\mu(x) = \exp(-x^\mu \cos \mu\pi) \sin(x^\mu \sin \mu\pi)$, $0 < \mu < 1/2$, имеем $c_n = 0 \quad \forall n$ (см. работы Харди [1], [2] или их изложение в монографии Титчмарша [3, с. 406–409]). При $\mu = 1/4$ отсюда следует, что у задачи

$$\int_0^\infty F(x) e^{-x} x^{4n+3} dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

есть решение $F(x) = \sin x$. Это проверяется и непосредственно: достаточно рассмотреть интеграл от функции $z^{4n+3} \exp(iz - z)$, взятый вдоль вещественной оси от 0 до R , затем в положительном направлении вдоль окружности $|z| = R$ до мнимой оси и затем вдоль мнимой оси до начала координат, после чего перейти к пределу по $R \rightarrow \infty$ ([4, с. 115]). Очевидно, что справедлив и более общий результат: если $F(z)$ – целая функция экспоненциального типа (конечной степени) σ_F со свойством

$$F(iz) = F(z), \quad (3)$$

для индикатора которой выполнено неравенство

$$h_F(0) < 1, \quad (4)$$

то функция $\psi(x) = F(x) \sin x$ – решение задачи (2). Неравенство (4) здесь играет двойную роль. Во-первых, оно гарантирует существование МС целой функции $\psi(z) \exp(-z)$.

Во-вторых, оно позволяет применить метод контурного интегрирования, поскольку тогда с учетом условия (3) и тригонометрической выпуклости индикатора [4, с. 193] выполняется неравенство $h_F(\theta) < \cos \theta + \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$. У целых функций экспоненциального типа со свойством (3) индикатор неотрицателен в силу принципа Фрагмена–Линделёфа, т.е. $\sigma_\psi \in [1, 3\sqrt{2}/2]$. Кроме того, $\psi(\pi, k) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Возникает естественный вопрос: существуют ли решения задачи (2) с типом $\sigma < 1$? Для ответа на него выясним, когда функция $F(x)$ сама удовлетворяет условиям (2). Другими словами, найдем такие дополнительные ограничения на функции $F(x)$, при выполнении которых задаче (2) одновременно удовлетворяют функции $F(x)$ и $F(x) \sin x$. Оказывается, что множество таких решений $F(x)$ типа σ (в дальнейшем обозначенное через G_σ) непусто, если $\sigma \in [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}]$. Метод исследования основан на сведении проблемы МС (2) к одному особому случаю теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, рассмотренному автором в статье [5].

2. Для построения решений из класса G_σ удобно вместо условий (2) взять равносильное им уравнение

$$\int_0^\infty F(x)e^{-x}(\operatorname{sh} zx - \sin zx) dx = 0, \quad |z| < 1 - h_F(0). \quad (5)$$

Применяя преобразование Бореля [6, с. 11–15]

$$f(z) = \int_0^\infty F(x)e^{-zx} dx, \quad \operatorname{Re} z > h_F(0), \quad F(z) = \oint_{|\tau|=\sigma+\varepsilon} f(\tau)e^{z\tau} d\tau, \quad \varepsilon > 0,$$

перейдем к уравнению для нижних функций

$$f(1-z) - f(1+z) + i(f(1-iz) - f(1+iz)) = 0, \quad |z| < 1 - h_F(0). \quad (6)$$

Нижняя функция голоморфна при $|z| > \sigma$, исчезает на бесконечности и $f(iz) = -if(z)$. У нее не менее четырех особых точек на окружности $|z| = \sigma$. Такой класс функций обозначим через B_σ . Уравнение (6) заменим разностным уравнением

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^4 f(z + i^m) = 0, \quad |z| < 1 - h_F(0). \quad (7)$$

Наименьшее замкнутое выпуклое множество K , содержащее все особенности функции $f(z)$ (сопряженная индикаторная диаграмма), инвариантно относительно поворота плоскости на прямой угол. В дальнейшем используем формулу

$$h_F(\theta) = \max \operatorname{Re}(ze^{i\theta}), \quad z \in K.$$

В зависимости от величины типа возможны следующие случаи.

а) $\sigma < \sqrt{2}/2$. Множество $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{m=1}^4 (K + i^m)$ связно. Соотношение (7) выполнено при $|z| > 1 + \sigma$, т.е. $f(z) \equiv 0$ [7, с. 229].

б) $\sigma = \sqrt{2}/2$. Среди особенностей $f(z)$ есть и точки $\pm 1/2, \pm i/2$ – вершины квадрата R (иначе множество D связно). Соотношение (7) позволяет аналитически продолжить

$f(z)$ в четыре сегмента, дополняющих R до круга $|z| < \sqrt{2}/2$. Следовательно, $\overline{R} \equiv K$. Однородное уравнение

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in R, \quad (8)$$

имеет нетривиальное решение $f(z) \in B_{\sqrt{2}/2}$ [5, с. 15]. Его верхняя функция $F(z) \in G_{\sqrt{2}/2}$, поскольку $(8) \Rightarrow (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (5) \Rightarrow (2)$. Стоит отметить, что $F(0) \neq 0$.

в) $\sqrt{2}/2 < \sigma < \sqrt{5}/2$. Введем функцию $g(z) = (Vf_\sigma)(z)$, где $f_\sigma(z) = 4z^3(z^4 - z_\sigma^4)^{-1}$ и $|z_\sigma| = \sigma$. Она голоморфна в замыкании $\overline{R}$, если

$$\arcsin \frac{1}{2\sigma} < \arg z_\sigma < \arccos \frac{1}{2\sigma}. \quad (9)$$

Неоднородное разностное уравнение

$$(V\tilde{f})(z) = g(z), \quad z \in R,$$

разрешимо и $\tilde{f}(z) \in B_{\sqrt{2}/2}$, поскольку $g(iz) = -ig(z)$ [5, с. 9]. Искомой нижней функцией будет разность $f(z) = \tilde{f}(z) - f_\sigma(z)$, так как квадрат с вершинами в точках $\pm z_\sigma$, $\pm iz_\sigma$ расположен слева от прямой $x = 1 \Rightarrow F(z) \in G_\sigma$.

г) $\sqrt{5}/2 < \sigma < \sqrt{2}$. Функция $F(z) \in G_\sigma$, если вместо условия (9) взять более сильное ограничение $\max[\operatorname{Re} z_\sigma, \operatorname{Im} z_\sigma] < 1$.

д) $\sigma > \sqrt{2}$. Свойство (3) сразу влечет неравенство $h_F(0) > 1$, и в силу известной теоремы В. Бернштейна [8, с. 99] МС целой функции $F(z)e^{-z}$ не существуют.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Случай $\sigma = \sqrt{2}$, не исследованный в статье, представляет некоторый интерес. Если в определении класса G_σ неравенство (4) заменить на равенство $h_F(0) = 1$, то все МС целой функции $F(z)e^{-z}$ могут существовать при выполнении необходимого условия, что индикаторной диаграммой решения будет квадрат с вершинами в точках $\pm 1, \pm i$. Однако, используемый выше метод построения нижней функции с полюсами на окружности $|z| = \sigma$ для $\sigma = \sqrt{2}$ уже неприменим.

Подведем итог.

ТЕОРЕМА. Если $0 < \sigma < \sqrt{2}/2$ или $\sigma > \sqrt{2}$, то $G_\sigma = \emptyset$. Если $\sigma = 0$ или $\sqrt{2}/2 \leq \sigma < \sqrt{2}$, то $G_\sigma \neq \emptyset$. При этом класс G_0 содержит лишь тривиальное решение $F(z) \equiv 0$, а класс $G_{\sqrt{2}/2}$ совпадает с множеством функций, ассоциированных по Борелю с множеством решений уравнения (8) из класса $B_{\sqrt{2}/2}$.

3. Выясним, какими свойствами обладает построенная в случае б) целая функция $F(z) \in G_{\sqrt{2}/2}$. Очевидно, что

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{\alpha_k^4}\right).$$

Получим некоторые результаты о распределении ее корней. Для этого воспользуемся интегральным представлением

$$F(z) = \int_{\partial R} f^-(\tau) e^{z\tau} d\tau. \quad (10)$$

Приведем необходимые в дальнейшем сведения из статьи [5]. Нижняя функция $f(z)$ — это интеграл Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \varphi_0(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{R},$$

аналитически продолжимый внутрь R через любую из сторон квадрата и имеющий логарифмические особенности в его вершинах. Его плотность $\varphi_0(\tau)$ имеет точки разрыва первого рода в вершинах квадрата и бесконечно дифференцируема на замыкании каждой из сторон. У производных $\varphi_0^{(n)}(\tau)$ могут быть только точки разрыва первого рода в вершинах. Кроме того,

$$\int_{\partial R} \varphi_0(\tau) d\tau \neq 0; \quad \varphi_0(i\tau) = -i\varphi_0(\tau); \quad \varphi_0[\alpha(\tau)] + \varphi_0(\tau) = 0. \quad (11)$$

Здесь гомеоморфизм $\alpha(t): \partial R \rightarrow \partial R$ изменяет ориентацию, причем $\alpha(i\tau) = i\alpha(\tau)$ и на нижней стороне $\alpha(\tau) = \tau + i$. Таким образом, обратный сдвиг $\alpha(\tau)$ разрывен в вершинах, а в остальных точках $\alpha'(\tau) \equiv 1$.

Формула Сохоцкого–Племеля

$$f^+(\tau) - f^-(\tau) = \varphi_0(\tau)$$

позволяет заменить в интеграле (10) плотность $f^-(\tau)$ на $-\varphi_0(\tau)$. Но тогда

$$F(z) = 2 \cos \frac{z}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_1(x) e^{zx} dx + 2 \operatorname{ch} \frac{z}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_1(x) \cos zx dx, \quad (12)$$

где плотность $\varphi_1(x) = \varphi_0(x + i/2)$ четна. Действительно, если точки τ_1 и τ_2 лежат на какой-то из сторон квадрата симметрично относительно его середины, то $\varphi_0(\tau_1) = \varphi_0(\tau_2)$. Это следует из нечетности плотности $\varphi_0(\tau)$ и последнего из условий (11). В каждом из координатных углов у решения $F(z)$ тригонометрический индикатор $h_F(\theta) = \frac{1}{2}(\cos \theta + \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$; $h_F(\theta + \pi/2) = h_F(\theta)$. Отсюда можно вывести следующие утверждения:

1) $F(z) = \operatorname{ch}(z/2)F^*(z) + \cos(z/2)F^*(iz)$, где четная функция $F^*(z)$ класса A [9, с. 100] и ее индикаторная диаграмма есть отрезок $(-i/2, i/2)$;

2) $F(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с нулевой плотностью корней в каждом из координатных углов [8, с. 203], и почти для всех θ существует обычный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(re^{i\theta})|}{r} = h_F(\theta),$$

т. е. на таких лучах отсутствует исключительное множество нулевой относительной меры;

3) плотность корней $F(z)$ в любом угле $|\arg z - \pi m/2| < \varepsilon$ не равна нулю, $m = 0, 1, 2, 3$.

Функции $F(z) \in G_\sigma$, $\sqrt{2}/2 < \sigma < \sqrt{2}$, построенные в статье, представимы в виде

$$F(z) = \tilde{F}(z) - \sum_{m=1}^4 \exp(i^m z_\sigma z).$$

Для первого слагаемого остаются в силе утверждения 1)–3), а индикатор $h_F(\theta)$ является индикатором квазиполинома. При $\sigma \rightarrow \sqrt{2} - 0$ имеем $\arg z_\sigma \rightarrow \pi/4$, причем всегда можно положить $\arg z_\sigma = \pi/4$.

4. Сделаем несколько замечаний об однородной проблеме МС в классе функций, голоморфных в плоскости с разрезом по лучу $(0, -\infty)$, обозначенной далее через D_1 , и непрерывно продолжимых на берега разреза, включая точку $z = 0$. Под $\sqrt[k]{z}$ будем понимать ту ветвь радикала, которая голоморфна в D_1 и удовлетворяет условию $\sqrt[k]{x} > 0$ при $x > 0$. Если

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

то решениями задачи (13) будут и функции $\Phi(\sqrt[k]{\alpha x})$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому порядок решения ρ в угле $(-\pi, \pi)$ определен с точностью до множителя k^{-1} , а тип и индикатор – с точностью до произвольного положительного множителя. Поясним, что порядок голоморфной в некотором угле функции понимается в смысле определения Титчмарша [4, с. 191], обобщенного Н. В. Говоровым [10, с. 10]. Тип, следуя [6, с. 9], определим формулой

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [r^{-\rho} \ln M_{-\pi, \pi}(r)], \quad M_{-\pi, \pi}(r) = \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Phi(re^{i\theta})|.$$

Возьмем частный случай функции Харди

$$F_{1/4}(x) = \exp(-\sqrt[4]{\beta x}) \sin \sqrt[4]{\beta x}, \quad \beta > 0, \quad (14)$$

и построенное в статье решение

$$\Phi(x) = \exp(-\sqrt[4]{x})P(x), \quad (15)$$

где

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k^4}\right)$$

– целая функция вполне регулярного роста порядка $\rho = 1/4$ и типа $\sigma = \sqrt{2}/2$ с нулевой плотностью корней в каждом из углов $[-\pi, \varepsilon)$ и $(\varepsilon, \pi]$ $\forall \varepsilon > 0$. Постоянную β в (14) выберем так, чтобы $h_{F_{1/4}}(0) = h_{\Phi}(0)$. Весьма примечателен тот факт, что тогда

$$h_{F_{1/4}}(\theta) \equiv h_{\Phi}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\left| \sin \frac{\theta}{4} \right| - \cos \frac{\theta}{4} \right), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (16)$$

Итак оба решения (14) и (15) имеют порядок $\rho = 1/4$, тип $\sigma = 0$ и индикатор (16). Они голоморфны в D_1 и непрерывны в замыкании $\overline{D}_1$, но в их поведении на берегах разреза есть существенная разница. Во-первых, $F_{1/4}(0) = 0$, в то время как $\Phi(0) = 1$. Во-вторых, для граничных значений функции (14) справедливы представления

$$F_{1/4}^{\mp}(-x) = \pm (\exp(-\sqrt[4]{4\beta x}i) - \exp(-\sqrt[4]{4\beta x})) (2i)^{-1},$$

т. е. при $x \rightarrow \infty$ они осциллируют и $|F^{\mp}(-x)| \rightarrow 1/2$. Напротив, $|\Phi^{\pm}(-x)| = O(|x|^{-1/4})$; $|\Phi(re^{i\theta})| = O(|F_{1/4}(re^{i\theta})|r^{-1/4})$, в чем легко убедиться, если применить в соотношении (12) формулу интегрирования по частям. Заметим, что при $\mu \in (1/4, 1/2)$ индикатор функций $F_{\mu}(z)$ знакопеременен в угле D_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возьмем систему функций

$$f_{4m+3}(z) : (V f_{4m+3})(z) = ((4m+3)!)^{-1} z^{4m+3}, \quad z \in R.$$

Функции, ассоциированные с ними по Борелю, обладают интересным свойством

$$\int_0^\infty F_{4m+3}(x) e^{-x} x^{4k+3} dx = \delta_{m,k}.$$

Другими словами, существует система целых функций $P_m(z)$ порядка $\rho = 1/4$ и типа $\sigma = \sqrt{2}/2$, для которых выполнены соотношения

$$\int_0^\infty P_m(x) e^{-\sqrt[4]{x}} x^k dx = \delta_{m,k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложенный в статье метод позволяет исследовать и неоднородную проблему МС

$$\int_0^\infty F(x) e^{-x} x^{4k+3} dx = c_{4k+3}$$

при условии, что функция

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{4k+3}}{(4k+3)!} z^{4k+3}$$

голоморфна в R и удовлетворяет условию Гёльдера на ∂R .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сведением к разностным уравнениям можно исследовать и три другие проблемы МС

$$\int_0^\infty F(x) e^{-x} x^{4m+k} dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, 2,$$

в классе G_σ . Например, при $k = 1$ для нижних функций имеем уравнение

$$f(z+1) + f(z-1) - f(z-i) - f(z+i) = 0, \quad z \in R,$$

которое также было рассмотрено в статье [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H. On Stiltjes' "problème des moments" // Messenger of Math. 1917. V. 46. P. 175–182.
- [2] Hardy G. H. On Stiltjes' "problème des moments" // Messenger of Math. 1917. V. 47. P. 81–88.
- [3] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [4] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.
- [5] Гарифьянов Ф. Н. Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. Вуз. Матем. 1993. № 7. С. 7–16.
- [6] Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
- [7] Коробейник Ю. Ф. О решениях некоторых функциональных уравнений в классе функций, аналитических в выпуклых областях // Матем. сб. 1968. Т. 75. № 2. С. 225–234.
- [8] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [9] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [10] Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.