Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Совокупный размер популяции в критических ветвящихся процессах в случайной среде, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 12–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 09:46:13

Совокупный размер популяции в критических ветвящихся процессах в случайной среде

В. А. Ватутин

Для критического ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков исследовано асимптотическое поведение хвостов распределений общего размера популяции и максимального количества частиц в поколении за время существования процесса.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Будем рассматривать ветвящийся процесс в случайной среде, задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных случайных производящих функций

$$f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk} s^k, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Пусть Z_n – количество частиц в процессе в момент n . При фиксированном наборе $f_n(s)$, $n = 1, 2, \dots$, эволюция интересующего нас процесса описывается соотношениями

$$Z_0 := z > 0, \\ \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | f_1, \dots, f_{n+1}; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] := (f_{n+1}(s))^{Z_n}, \quad n \geq 0.$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $Z_0 = 1$.

Положим $X_k := \log f'_k(1)$, $k \geq 1$, обозначим $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$, и пусть

$$\zeta(b) := e^{-2X_1} \sum_{k=b}^{\infty} k^2 f_{1k}, \quad b = 0, 1, \dots$$

Следуя [1], назовем процесс $\{Z_n, n \geq 0\}$ *критическим*, если случайное блуждание $\{S_n, n \geq 0\}$ осциллирует, т.е., если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$$

с вероятностью 1. Это означает, что случайная величина

$$T^- := \inf\{k \geq 1 : S_k < 0\}$$

конечна с вероятностью 1 и, как результат (см. [1]), момент

$$T := \inf\{k \geq 1 : Z_k = 0\}$$

вырождения процесса $\{Z_n, n \geq 0\}$ конечен с вероятностью 1.

Поскольку критические ветвящиеся процессы в случайной среде вырождаются с вероятностью 1, то представляет интерес исследование асимптотического поведения вероятности невырождения $P(T > n)$ при $n \rightarrow \infty$. Наиболее общий результат в этом направлении был доказан в статье [1] и дополнен в работе [2]. Для формулировки соответствующего утверждения нам понадобится ряд обозначений и предположений.

Введем множество

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leq 1\} \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\}.$$

Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X будем писать $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение случайной величины X принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha, \beta}(t) := \exp\left\{-c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, \quad c > 0, \quad (2)$$

и, кроме того, $EX = 0$, если это математическое ожидание существует.

Следующие предположения будут основными в дальнейших рассуждениях.

УСЛОВИЕ A1. Случайные величины $X_n = \log f'_n(1)$, $n \geq 1$ являются независимыми копиями случайной величины $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, где $\alpha < 2$ и $|\beta| < 1$.

УСЛОВИЕ A2. Существует $\delta > 0$ такое, что для некоторого $b \geq 0$

$$E(\log^+ \zeta(b))^{\alpha+\delta} < \infty.$$

УСЛОВИЕ В. Производящие функции числа потомков являются чисто геометрическими с вероятностью 1, т.е.,

$$\frac{1}{1 - f_n(s)} := \frac{e^{-X_n}}{1 - s} + 1, \quad s \in [0, 1). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку для производящих функций геометрических распределений

$$\frac{\zeta(b)}{2} \leq \frac{1}{f'_1(1)} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)f_{1k} = 2,$$

то условие В влечет условие A2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В формулируемой ниже теореме и всюду далее соотношения вида $a_n \sim b_n$ или $a(x) \sim b(x)$ обозначают, соответственно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) \sim b(x) = 1.$$

ТЕОРЕМА 1 (см. [1] и [2]). Если выполнены условия A1, A2, то

$$P(T > n) \sim \theta P(T^- > n) = \theta \frac{l(n)}{n^{1-\rho}}, \quad (4)$$

где $l(n)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности, а θ – положительная константа, явное выражение которой указано в теореме 1.1 работы [1].

Если, кроме того, производящие функции числа потомков удовлетворяют условию B с вероятностью 1, то

$$P(T = n) \sim (1 - \rho) \frac{P(T > n)}{n} \sim \theta P(T^- = n) \sim \theta(1 - \rho) \frac{l(n)}{n^{2-\rho}}. \quad (5)$$

Напомним, что для случая $EX_n = 0$ и $DX_n \in (0, \infty)$ (который не удовлетворяет условию A1) утверждение, аналогичное (5), доказано в работе [3], где показано, что если выполнено условие B, то при $n \rightarrow \infty$

$$P(T = n) \sim \theta P(T^- = n) \sim \frac{C}{n^{3/2}}. \quad (6)$$

Заметим теперь, что для $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ последовательность $\{c(n), n \geq 1\}$, задаваемая равенствами

$$c(n) := \sup\{x < 0 : P(X < -x) \leq n^{-1}\}, \quad (7)$$

имеет вид

$$c(n) = n^{1/\alpha} l_0(n), \quad (8)$$

где $l_0(n)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Более того, последовательность $\{S_n/c(n), n \geq 1\}$ сходится по распределению к устойчивому закону с характеристической функцией, указанной в (2).

Далее, если $X_n \stackrel{d}{=} X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > 0) = \rho, \quad (9)$$

где (см., например, [4])

$$\rho = \begin{cases} 2^{-1}, & \text{если } \alpha = 1, \\ 2^{-1} + (\pi\alpha)^{-1} \arctan\left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

Пусть $D[0, 1]$ обозначает пространство функций, определенных на единичном интервале и не имеющих разрывов второго рода, а $\Lambda := \{\Lambda_t, 0 \leq t \leq 1\}$ – извилину строго устойчивого процесса с параметрами α и β , которую можно интерпретировать как начинающийся в нуле условный строго устойчивый процесс Леви при условии, что он остается положительным на интервале $(0, 1]$ (см. работы [5] и [6], содержащие детальное описание этого процесса). Наряду с извилиной Λ рассмотрим случайный процесс $\tilde{\Lambda} := \{\tilde{\Lambda}_t, 0 \leq t \leq 1\}$, определяемый равенством

$$E[\phi(\tilde{\Lambda})] = \frac{E[\Lambda_1^{-\alpha} \phi(\Lambda)]}{E[\Lambda_1^{-\alpha}]} \quad \text{для всех } \phi \in D[0, 1]. \quad (11)$$

В последующем изложении выражения вида Z_y при $y \geq 0$ следует понимать как $Z_{[y]}$, где $[y]$ обозначает целую часть числа y .

Наш первый результат выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия A1, A2. Тогда для любых $y \geq x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\max_{0 \leq t \leq 1} Z_{(n-1)t} > e^{yc(n)}; Z_{n-1} > e^{xc(n)}; T = n)}{\theta \mathbb{P}(T^- = n)} \\ = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > y; \tilde{\Lambda}_1 > x\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Если, кроме того, выполнено условие B, то для любого $y > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} Z_{(n-1)t} > e^{yc(n)} \mid T = n\right) = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > y\right). \quad (13)$$

Введем функцию

$$c(z) := (n+1-z)c(n) + (z-n)c(n+1), \quad z \in (n, n+1],$$

и пусть $h(z)$ – функция, обратная к $c(z)$. В силу (8) $h(z) = z^\alpha l_1(z)$, где $l_1(z)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности (см., например, [7; с. 27]).

Теоремы 1 и 2 позволяют исследовать асимптотические свойства распределений максимального значения процесса $\{Z_n, n \geq 0\}$ за все время его существования и общего числа частиц

$$\sigma := \sum_{k=0}^{T-1} Z_k,$$

родившихся в процессе за время его эволюции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия A1 и B. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > n\right) &\sim \mathbb{P}(T > h(\log n)) \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)} \\ &\sim \frac{l(h(\log n))}{(h(\log n))^{1-\rho}} \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следующая теорема показывает, что асимптотическое поведение хвоста распределения случайной величины σ такое же, как и у хвоста распределения случайной величины $\max_{1 \leq k < \infty} Z_k$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия A1 и B. Тогда

$$\mathbb{P}(\sigma > n) \sim \mathbb{P}(T > h(\log n)) \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)}. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Случай $\mathbb{E}X^2 < \infty$ не затрагивается теоремами 3 и 4. Однако, если мы формально положим в упомянутых теоремах $\rho = 1/2$, $h(x) = x^2$ и $l(x) = C \in (0, \infty)$, то получим

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq \infty} Z_k > n\right) \sim \frac{C_1}{\log n}, \quad \mathbb{P}(\sigma > n) \sim \frac{C_1}{\log n}.$$

Последнее утверждение было установлено ранее в статье [8].

Известно, что имеется естественная связь между критическими ветвящимися процессами в случайной среде и простыми возвратными случайными блужданиями в случайной среде. В частности, если производящие функции $f_n(s)$ имеют с вероятностью 1 вид (3), то соотношения (14) и (15) допускают интерпретацию в терминах простого случайного блуждания $\{R_k, k \geq 0\}$ в случайной среде. Такое случайное блуждание стартует в момент 0 из начала координат ($R_0 := 0$) и имеет (случайные) переходные вероятности

$$q_n := P(R_{k+1} = n - 1 | R_k = n) = \frac{e^{-X_n}}{1 + e^{-X_n}}, \quad (16)$$

$$p_n := P(R_{k+1} = n + 1 | R_k = n) = \frac{1}{1 + e^{-X_n}}, \quad (17)$$

где X_n , $n \in \mathbb{Z}$, – независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим

$$\chi := \inf\{k > 0 : R_k = -1\}$$

и пусть

$$\ell(n) := \sum_{0 \leq k \leq \chi} \mathbf{1}\{R_k = n\}, \quad n \geq -1,$$

обозначает локальное время случайного блуждания в случайной среде, вычисленное по его первой неотрицательной экскурсии. Ясно, что если

$$Z_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \ell(n - i - 1), \quad n \geq 0,$$

то

$$\ell(n) = Z_{n+1} + Z_n, \quad n \geq 0.$$

Можно показать, что $\{Z_n, n \geq 0\}$ – ветвящийся процесс в случайной среде с производящими функциями числа потомков, задаваемыми равенствами

$$f_n(s) := E[s^{Z_n} | Z_{n-1} = 1] = \frac{q_n}{1 - p_n s} = \frac{e^{-X_n}}{1 + e^{-X_n} - s}$$

(см. работу [9], где такого рода соответствие обсуждается подробно). В частности, случайная величина $T^* := \inf\{j > 0 : \ell(j) = 0\}$ является моментом вырождения ветвящегося процесса. Нетрудно понять, что длина первой неотрицательной экскурсии и общий размер популяции соответствующего ветвящегося процесса в случайной среде связаны соотношением

$$P(\chi > 2n + 1) = P(\sigma > n),$$

в то время как локальное время случайного блуждания связано с указанным выше процессом $\{Z_n, n \geq 0\}$ равенством

$$P\left(\max_{0 \leq k < \chi} \ell(k) > n\right) = P\left(\max_{0 \leq k < \infty} (Z_{k+1} + Z_k) > n\right).$$

В этих терминах теоремы 3 и 4 могут быть переформулированы следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. Если случайные величины q_n и p_n , заданные в (16) и (17), независимы, одинаковы распределены и таковы, что случайные величины

$$X_n := \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

удовлетворяют условию A1, то при $n \rightarrow \infty$

$$P(\chi > n) \sim P\left(\max_{0 \leq k < \chi} l(k) > n\right) \sim \frac{l(h(\log n))}{(h(\log n))^{1-\rho}} E\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)}.$$

2. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\phi: D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция, обладающая необходимыми свойствами измеримости, и пусть

$$Z^{(n)} := \left\{ \frac{\log Z_{[(n-1)t]}}{c(n)}, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Как показано при доказательстве теоремы 2 статьи [2; с. 434], при выполнении условий нашей теоремы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k)}{P(X < -\log k)} = 1.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & E[\phi(Z^{(n)}) \mathbf{1}\{Z_{n-1} > e^{xc(n)}; T = n\}] \\ &= \sum_{k > e^{xc(n)}} E[\phi(Z^{(n)}); Z_{n-1} = k] P(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k) \\ &\sim \sum_{k > e^{xc(n)}} E[\phi(Z^{(n)}); Z_{n-1} = k] P(X \leq -\log k) \\ &\sim E[P(X \leq -\log Z_{n-1}) E[\phi(Z^{(n)}); \log Z_n > xc(n)]] \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку

$$\frac{P(X \leq -yc(n))}{P(X \leq -c(n))} \rightarrow y^{-\alpha}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in [x, \infty)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & E[\phi(Z^{(n)}) \mathbf{1}\{Z_{n-1} > e^{xc(n)}; T = n\}] \\ &\sim P(X \leq -c(n)) E\left[\phi(Z^{(n)}) \left(\frac{\log Z_{n-1}}{c(n)}\right)^{-\alpha} \mathbf{1}\{Z_{n-1} > e^{xc(n)}\}\right] \\ &\sim P(X \leq -c(n)) P(Z_{n-1} > 0) \\ &\quad \times E\left[\phi(Z^{(n)}) \left(\frac{\log Z_{n-1}}{c(n)}\right)^{-\alpha} \mathbf{1}\{\log Z_{n-1} > xc(n)\} \mid Z_{n-1} > 0\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим $\mathcal{L}(\cdot)$ – закон распределения случайного элемента в соответствующем вероятностном пространстве. Согласно следствию 1.6 статьи [1] при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\log Z_{(n-1)t}}{c(n)}, 0 \leq t \leq 1 \mid Z_{n-1} > 0\right) \implies \mathcal{L}(\Lambda_t, 0 \leq t \leq 1),$$

где символ $\Rightarrow$ обозначает сходимость распределений в пространстве $D[0, 1]$, оснащенном метрикой Скорохода. Этот факт и теорема об ограниченной сходимости дают

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\phi(Z^{(n)}) \left(\frac{\log Z_{n-1}}{c(n)} \right)^{-\alpha} \mathbf{1}_{\{\log Z_{n-1} > xc(n)\}} \mid Z_{n-1} > 0 \right] \\ = \mathbb{E}[\phi(\Lambda) \Lambda_1^{-\alpha} \mathbf{1}_{\{\Lambda_1 > x\}}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Объединяя (18)–(20) и принимая во внимание соотношения (7) и (11), заключаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(Z^{(n)}) \mathbf{1}_{\{Z_{n-1} > e^{xc(n)}; T = n\}}] \\ \sim (1 - \rho) \frac{\mathbb{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \frac{\mathbb{E}[\phi(\Lambda) \Lambda_1^{-\alpha} \mathbf{1}_{\{\Lambda_1 > x\}}]}{\mathbb{E}[\Lambda_1^{-\alpha}]} \\ = (1 - \rho) \frac{\mathbb{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \mathbb{E}[\phi(\tilde{\Lambda}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\Lambda}_1 > x\}}]. \end{aligned}$$

Вспоминая теперь, что при $n \rightarrow \infty$

$$(1 - \rho) \frac{\mathbb{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \sim (1 - \rho) \frac{\theta \mathbb{P}(T^- > n - 1)}{n} \sim \theta \mathbb{P}(T^- = n)$$

в силу (4) и теоремы 11 в [10], приходим к соотношению

$$\mathbb{E}[\phi(Z^{(n)}) \mathbf{1}_{\{Z_{n-1} > e^{xc(n)}; T = n\}}] \sim \theta \mathbb{P}(T^- = n) \mathbb{E}[\phi(\tilde{\Lambda}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\Lambda}_1 > x\}}].$$

Из этого представления легко следует первое утверждение теоремы.

Если выполнено условие B, то согласно замечанию 4 статьи [2]

$$\begin{aligned} \sum_{0 < k \leq e^{xc(n)}} \mathbb{E}[\phi(Z^{(n)}); Z_{n-1} = k] \mathbb{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k) \\ \leq \sup |\phi| \mathbb{P}(0 < Z_{n-1} \leq e^{xc(n)}; Z_n = 0) = o(\mathbb{P}(T^- = n)) \end{aligned} \quad (21)$$

при $x \downarrow 0$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\phi(Z^{(n)}); T = n]}{\mathbb{P}(T = n)} = \lim_{x \downarrow 0} \mathbb{E}[\phi(\tilde{\Lambda}) \mathbf{1}_{\{\tilde{\Lambda}_1 > x\}}] = \mathbb{E}[\phi(\tilde{\Lambda})],$$

чем и завершается доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия A1, A2. Тогда найдутся константы C_2 и C_3 такие, что при любом $x \geq x_0 = x_0(C_2, C_3)$

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x \right) \leq \frac{C_2 l(h(\log x))}{(h(\log x))^{1-\rho}} \leq C_3 \mathbb{P}(T > h(\log x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку второе неравенство очевидно в силу (4), мы докажем лишь первую оценку. Для любого фиксированного числа $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x \right) = S_1(x, \varepsilon) + S_2(x, \varepsilon) + S_3(x, \varepsilon), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(x, \varepsilon) &:= \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x, T \leq \varepsilon h(\log x)\right), \\ S_2(x, \varepsilon) &:= \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x, \varepsilon h(\log x) < T \leq \varepsilon^{-1} h(\log x)\right), \\ S_3(x, \varepsilon) &:= \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x, T > \varepsilon^{-1} h(\log x)\right). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$S_2(x, \varepsilon) + S_3(x, \varepsilon) \leq \mathbf{P}(T > \varepsilon h(\log x)). \quad (23)$$

Оценим теперь величину $S_1(x, \varepsilon)$. Положим $T_x = \inf\{k : Z_k > x\}$. Тогда при $m < n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x, T_x = m, T \leq n\right) &= \sum_{j > x} \mathbf{P}(Z_m = j, T_x = m, T \leq n) \\ &= \sum_{j > x} \mathbf{P}(Z_m = j, T_x = m) \mathbf{P}(T \leq n - m \mid Z_0 = j) \\ &\leq \sum_{j > x} \mathbf{P}(Z_m = j, T_x = m) \mathbf{P}(T \leq n \mid Z_0 = j). \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть $F(n) := \mathbf{P}_f(Z_n = 0 \mid Z_0 = 1)$ – вероятность вырождения процесса к моменту $n \geq 1$, при условии, что последовательность производящих функций $f_1(s), \dots, f_n(s)$ фиксирована. Ясно, что

$$\sup_{j > x} \mathbf{P}(T \leq n \mid Z_0 = j) = \sup_{j > x} \mathbf{E}F^j(n) \leq \mathbf{E}F^x(n).$$

Введем обозначения

$$a_n := e^{-S_n}, \quad \eta_k := \frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \eta_k e^{-S_{k-1}},$$

и, наконец, $g(y) := (a_{[y]} + b_{[y]})^{-1}$, где $[y]$ – целая часть числа y .

В силу неравенства Агрести [11] $F(n) \leq 1 - g(n)$ для любого $n \geq 1$. Подставляя эту оценку в (24), получаем

$$\begin{aligned} S_1(x, \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{[\varepsilon h(\log x)]-1} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq T} Z_k > x, T_x = m, T \leq \varepsilon h(\log x)\right) \\ &\leq \sum_{m=0}^{[\varepsilon h(\log x)]-1} \sum_{j > x} \mathbf{P}(Z_m = j, T_x = m) \mathbf{P}(T \leq \varepsilon h(\log x) - m \mid Z_0 = j) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x\right) \max_{0 \leq k \leq \varepsilon h(\log x)} \mathbf{E}F^x(k) \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x\right) \mathbf{E}F^x([\varepsilon h(\log x)]) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x\right) \mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x. \end{aligned} \quad (25)$$

Покажем, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x = 0. \quad (26)$$

С этой целью введем событие

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(x) := \left\{ \sup_{0 \leq k \leq [\varepsilon h(\log x)]} (-S_k) \leq \varepsilon^{1/2\alpha} c(h(\log x)) = \varepsilon^{1/2\alpha} \log x \right\},$$

и пусть $\mathcal{B}^c = \mathcal{B}^c(x)$ – событие, дополнительное к $\mathcal{B}$. Ясно, что если событие $\mathcal{B}$ произошло, то

$$\begin{aligned} xg(\varepsilon h(\log x)) &= \frac{x}{e^{-S_{[\varepsilon h(\log x)]}} + \sum_{k=1}^{[\varepsilon h(\log x)]} \eta_k e^{-S_{k-1}}} \\ &\geq \frac{x}{\exp(\sup_{0 \leq k \leq \varepsilon h(\log x)} (-S_k)) (1 + \sum_{k=1}^{[\varepsilon h(\log x)]} \eta_k)} \\ &\geq \frac{x^{1-\varepsilon^{1/2\alpha}}}{1 + \sum_{k=1}^{[\varepsilon h(\log x)]} \eta_k} = \frac{x^{1-\varepsilon^{1/2\alpha}}}{[\varepsilon h(\log x)]} \cdot \frac{[\varepsilon h(\log x)]}{1 + \sum_{k=1}^{[\varepsilon h(\log x)]} \eta_k} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \infty$ в силу определения функции $h(x)$ и того, что согласно усиленному закону больших чисел при $h(\log x) \rightarrow \infty$

$$\frac{[\varepsilon h(\log x)]}{1 + \sum_{k=1}^{[\varepsilon h(\log x)]} \eta_k} \rightarrow \mathbf{E}\eta_1$$

с вероятностью единица. Следовательно,

$$\mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x \mathbf{1}\{\mathcal{B}\} \leq \mathbf{E} \exp\{-xg(\varepsilon h(\log x))\} \mathbf{1}\{\mathcal{B}\} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$. С другой стороны, при всех достаточно больших значениях x

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x \mathbf{1}\{\mathcal{B}^c\} &\leq \mathbf{P}(\mathcal{B}^c) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{c(\varepsilon h(\log x))} \sup_{0 \leq k \leq \varepsilon h(\log x)} (-S_k) > \frac{\varepsilon^{1/2\alpha} \log x}{c(\varepsilon h(\log x))}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\frac{1}{c(\varepsilon h(\log x))} \sup_{0 \leq k \leq \varepsilon h(\log x)} (-S_k) > \frac{\varepsilon^{1/2\alpha} \log x}{2\varepsilon^{1/\alpha} c(h(\log x))}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{c(\varepsilon h(\log x))} \sup_{0 \leq k \leq \varepsilon h(\log x)} (-S_k) > 2^{-1} \varepsilon^{-1/\alpha}\right) \end{aligned}$$

и, таким образом, $\mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x \mathbf{1}\{\mathcal{B}^c\} \rightarrow 0$, если сначала x устремить к бесконечности, а затем ε устремить к нулю. Это соотношение и предыдущие оценки доказывают равенство (26), что в свою очередь влечет соотношение

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x)} = 0. \quad (27)$$

Поскольку функции $h(y)$ и $g(y)$ монотонны, для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $x > x_1 > 0$

$$\mathbf{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x \leq \mathbf{E}(1 - g(\varepsilon_0 h(\log x_1)))^{x_1}.$$

Последняя оценка и равенство (26) позволяют для любых констант $C_4 \in (0, 1)$ и $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ найти значение $x_1 = x_1(C_4, \varepsilon_0)$ такое, что

$$\mathbb{E}(1 - g(\varepsilon h(\log x)))^x \leq C_4 < 1$$

для всех $x \geq x_1$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Отсюда, вспоминая (23) и (4), заключаем, что найдется $x_0 = x_0(C_2, C_3)$ такое, что для всех $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x\right) &\leq \frac{\mathbb{P}(T > \varepsilon_0 h(\log x))}{1 - C_4} \leq \frac{C_5 l(\varepsilon_0 h(\log x))}{(1 - C_4)(\varepsilon_0 h(\log x))^{1-\rho}} \\ &\leq \frac{C_2 l(h(\log x))}{(h(\log x))^{1-\rho}} \leq C_3 \mathbb{P}(T > h(\log x)), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы воспользуемся еще раз разложением (22) и заметим, что в силу (4) найдется константа C_6 такая, что

$$S_3(x, \varepsilon) \leq \mathbb{P}(T > \varepsilon^{-1} h(\log x)) \leq \frac{C_6 l(\varepsilon^{-1} h(\log x))}{(\varepsilon^{-1} h(\log x))^{1-\rho}}$$

для всех достаточно больших значений x и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x, \varepsilon)}{\mathbb{P}(T > h(\log x))} = 0. \quad (28)$$

Далее,

$$\begin{aligned} S_2(x, \varepsilon) &= \sum_{n=[\varepsilon h(\log x)]+1}^{[\varepsilon^{-1} h(\log x)]} \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} \log Z_k}{c(n)} > \frac{\log x}{c(n)}, T = n\right) \\ &= \int_{[\varepsilon h(\log x)]+1}^{[\varepsilon^{-1} h(\log x)]+1} \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} \log Z_k}{c(z)} > \frac{\log x}{c(z)}, T = [z]\right) dz \\ &= h(\log x) I(\varepsilon, x) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$I(\varepsilon, x) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \mathbb{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq y h(\log x)} \log Z_k}{c(y h(\log x))} > \frac{\log x}{c(y h(\log x))}, T = [y h(\log x)]\right) dy.$$

В силу (13) при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq y h(\log x)} \log Z_k}{c(y h(\log x))} > \frac{1}{y^{1/\alpha}} \mid T = [y h(\log x)]\right) \rightarrow \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > \frac{1}{y^{1/\alpha}}\right)$$

равномерно по $y \in [0, \infty)$. С другой стороны, согласно (5)

$$\frac{\mathbb{P}(T = [y h(\log x)])}{\mathbb{P}(T = [h(\log x)])} \rightarrow \frac{1}{y^{2-\rho}}$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $y \geq y_0 > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I(x, \varepsilon)}{\mathbb{P}(T = [h(\log x)])} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_2(x, \varepsilon)}{h(\log x) \mathbb{P}(T = [h(\log x)])} \\ &= \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > \frac{1}{y^{1/\alpha}}\right) \frac{1}{y^{2-\rho}} dy \\ &= \alpha(1-\rho) \int_{\varepsilon^{1/\alpha}}^{\varepsilon^{-1/\alpha}} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > z\right) z^{\alpha(1-\rho)-1} dz. \end{aligned}$$

Заметим, что в соответствии с леммой 1 и асимптотическим представлением (5) найдется константа C_7 такая, что

$$\frac{S_2(x, \varepsilon)}{h(\log x) \mathbb{P}(T = [h(\log x)])} \leq \frac{\mathbb{P}(\max_{1 \leq k < \infty} Z_k > x)}{h(\log x) \mathbb{P}(T = [h(\log x)])} \leq C_7$$

для всех достаточно больших значений x , что приводит к оценке

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)} &= \alpha(1-\rho) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon^{1/\alpha}}^{\varepsilon^{-1/\alpha}} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > z\right) z^{\alpha(1-\rho)-1} dz \\ &= \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)} < \infty. \end{aligned}$$

Используя (5) еще раз, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_2(x, \varepsilon)}{h(\log x) \mathbb{P}(T = [h(\log x)])} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_2(x, \varepsilon)}{(1-\rho) \mathbb{P}(T > h(\log x))} \\ &= \alpha \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t > z\right) z^{\alpha(1-\rho)-1} dz = \frac{1}{1-\rho} \mathbb{E}\left(\max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{\Lambda}_t\right)^{\alpha(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Объединение этого соотношения с (27) и (28) завершает доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Имеем

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n\right) \leq \mathbb{P}(\sigma > n) \leq \mathbb{P}\left(T \max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n\right). \quad (29)$$

Для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T \max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n\right) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n^{1-\varepsilon}; T \leq n^\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n^{1-\varepsilon}; T > n^\varepsilon\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n^{1-\varepsilon}\right) + \mathbb{P}(T > n^\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

В силу теоремы 3 и свойств медленно меняющихся функций

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n^{1-\varepsilon})}{\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n)} = 1, \quad (31)$$

в то время как согласно следствию 1.2 статьи [1]

$$\mathbb{P}(T > n^\varepsilon) \sim \frac{l_2(n^\varepsilon)}{n^{\varepsilon(1-\rho)}} = o\left(\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq T} Z_k > n\right)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Объединение соотношений (29)–(32) является завершающим шагом в доказательстве теоремы 4.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту, конструктивная критика которого позволила улучшить изложение представленных здесь результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V. A. Vatutin, “Criticality for branching processes in random environment”, *Ann. Probab.*, **33**:2 (2005), 645–673.
- [2] В. А. Ватутин, В. Вахтель, “Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде”, *ТВП*, **54**:3 (2009), 417–438.
- [3] В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, “Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятности вырождения в фиксированный момент”, *Дискрет. матем.*, **9**:4 (1997), 100–126.
- [4] В. М. Золотарев, “Преобразование Меллина–Стильтьеса в теории вероятностей”, *ТВП*, **2**:4 (1957), 444–469.
- [5] R. A. Doney, “Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **70**:3 (1985), 351–360.
- [6] R. Durrett, “Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes”, *Ann. Probab.*, **6**:5 (1978), 798–828.
- [7] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [8] В. И. Афанасьев, “О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде”, *Дискрет. матем.*, **11**:2 (1999), 86–102.
- [9] В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, “Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций”, *ТВП*, **51**:1 (2006), 22–46.
- [10] V. A. Vatutin, V. Wachtel, “Local probabilities for random walks conditioned to stay positive”, *Probab. Theory Related Fields*, **143**:1-2 (2009), 177–217.
- [11] A. Agresti, “On the extinction times of varying and random environment branching processes”, *J. Appl. Probab.*, **12**:1 (1975), 39–46.

В. А. Ватутин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vatutin@mi.ras.ru

Поступило

16.06.2010