Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Девятков, Отображения в пространство компактов, задаваемые предельными множествами, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 368–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:09:57

Отображения в пространство компактов, задаваемые предельными множествами

А. П. Девятков

Для последовательности функций, заданных в единичном круге $D \subset \mathbb{C}$, рассматривается отображение граничной окружности в пространство компактов с метрикой Хаусдорфа, сопоставляющее каждой точке $e^{i\theta} \in \partial D$ предельное множество последовательности функций в этой точке. Установлено, что такое отображение является борелевским не выше четвертого класса.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm8833

Пусть в единичном круге $D: |z| < 1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ заданы функция f и последовательность функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^\infty$.

Мы будем предполагать, что значения, принимаемые этими функциями, принадлежат некоторому компактному метрическому пространству R . Такое предположение включает в себя наиболее важные для нас случаи равномерно ограниченных комплекснозначных функций и мероморфных функций (в первом случае пространство R – это достаточно большой круг комплексной плоскости, во втором – сфера Римана).

Пусть $A \subset D$ – непустое подмножество области D , $\bar{A}$ – его замыкание, и $z_0 \in \bar{A}$. Введем понятия предельного множества функции и последовательности функций.

Предельным множеством функции f в точке z_0 относительно множества A назовем совокупность точек $C(f, A, z_0) \subset R$, определяемую равенством

$$C(f, A, z_0) = \bigcap_{p \in I} \overline{f(A \cap \delta_p)}, \quad (1)$$

где $(\delta_p)_{p \in I}$ – произвольная фундаментальная система окрестностей точки z_0 .

В монографиях [1], [2] содержатся различные применения понятия предельного множества к исследованию граничных свойств аналитических функций, а также изучаются топологические свойства предельных множеств произвольных функций. В обзорной статье [3] приведен обширный список литературы по теории предельных множеств.

Предельное множество последовательности функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^\infty$ можно определить как

$$C(\mathcal{F}, A, z_0) = \bigcap_{p \in I} \operatorname{Ls}_{n \rightarrow \infty} f_n(A \cap \delta_p), \quad (2)$$

где $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} f_n(A \cap \delta_p)$ – верхний топологический предел последовательности множеств $f_n(A \cap \delta_p)$, т.е. совокупность тех точек $x \in R$, любая окрестность которых пересекается с бесконечным числом множеств данной последовательности.

Понятие предельного множества последовательности функций было введено в статье [4]. В [4], [5] даны приложения этого понятия к исследованию свойств сходимости последовательностей аналитических функций вблизи границы области задания.

Наконец, *нижнее предельное множество последовательности функций* $\mathcal{F}$ (см. [6], [7]) определяется как

$$\underline{C}(\mathcal{F}, A, z_0) = \bigcap_{p \in I} \text{Li}_{n \rightarrow \infty} f_n(A \cap \delta_p), \quad (3)$$

где Li – нижний топологический предел последовательности множеств, т.е. совокупность тех точек $x \in R$, любая окрестность которых пересекается со всеми множествами, начиная с некоторого номера.

Нижнее предельное множество занимает промежуточное положение между предельным множеством одной функции и предельным множеством последовательности функций. А именно, если последовательность функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к функции f , то для соответствующих предельных множеств справедливы включения

$$C(f, A, z_0) \subset \underline{C}(\mathcal{F}, A, z_0) \subset C(\mathcal{F}, A, z_0).$$

Из формул (1)–(3) непосредственно следует, что любое предельное множество является непустым, замкнутым (а значит, и компактным) подмножеством пространства R .

В данной заметке мы рассмотрим *полные предельные множества*

$$C(f, D, e^{i\theta}), \quad C(\mathcal{F}, D, e^{i\theta}), \quad \underline{C}(\mathcal{F}, D, e^{i\theta}),$$

где $e^{i\theta} \in S = \partial D: |z| = 1$, и *радиальные предельные множества*

$$C(f, \gamma_\theta, e^{i\theta}), \quad C(\mathcal{F}, \gamma_\theta, e^{i\theta}),$$

где γ_θ – радиус, ведущий в точку $e^{i\theta}$, $\gamma_\theta = \{re^{i\theta} : 0 \leq r < 1\}$.

Таким образом, в каждой точке $e^{i\theta} \in S$ у нас имеется пять множеств, и мы можем рассмотреть пять отображений вида $\varphi: S \rightarrow 2^R$, где 2^R – семейство всех замкнутых подмножеств компакта R .

Свойства отображений, порождаемых предельными множествами в случае одной функции изучались в работах [8], [9]. В частности, в работе [9] показано, что отображение, сопоставляющее граничной точке множества задания функции ее полное предельное множество в этой точке, является непрерывным, если на пространстве замкнутых множеств 2^R ввести топологию Тихонова (см. [10]), также называемую κ -топологией (см. [11]).

Целью данной работы является изучение топологических свойств отображений, порождаемых предельными множествами последовательности функций. При этом пространство 2^R мы будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа.

Напомним, что *расстоянием по Хаусдорфу* между двумя множествами $M, N \in 2^R$ называется точная нижняя грань таких чисел $\varepsilon > 0$, что $M \subset O(N, \varepsilon)$ и $N \subset O(M, \varepsilon)$,

где символ $O(M, \varepsilon)$ означает ε -окрестность множества M в пространстве R . Это расстояние также называется *хаусдорфовым отклонением* множеств M , N и обозначается $\text{dist}(M, N)$.

С таким расстоянием 2^R становится компактным метрическим пространством, причем сходимость $\text{dist}(M_n, M) \rightarrow 0$ равносильна топологической сходимости последовательности множеств $\{M_n\}$, т.е. равенству ее верхнего и нижнего топологических пределов (см. [12; с. 168])

$$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} M_n = \text{Li}_{n \rightarrow \infty} M_n = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} M_n = M.$$

Первая теорема касается отображений, порождаемых полными предельными множествами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции f и $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^\infty$ произвольны. Тогда отображения $\varphi, \psi, \chi: S \rightarrow 2^R$, определяемые равенствами

$$\varphi(e^{i\theta}) = C(f, D, e^{i\theta}), \quad \psi(e^{i\theta}) = C(\mathcal{F}, D, e^{i\theta}), \quad \chi(e^{i\theta}) = \underline{C}(\mathcal{F}, D, e^{i\theta}),$$

являются борелевскими функциями первого класса, т.е. для любого замкнутого подмножества $\mathfrak{F} \subset 2^R$ множества $\varphi^{-1}(\mathfrak{F})$, $\psi^{-1}(\mathfrak{F})$, $\chi^{-1}(\mathfrak{F})$ имеют тип G_δ на окружности $S = \partial D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение и свойства борелевских функций описаны, например, в [13; § 31], где они называются также B -измеримыми отображениями.

Пусть $\mathfrak{F} \subset 2^R$ – замкнутое подмножество пространства 2^R . Покажем, что множество $\varphi^{-1}(\mathfrak{F})$ имеет тип G_δ на S , т.е. представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ обозначим через K_ε множество тех точек $e^{i\theta} \in S$, для которых найдется открытая окрестность $\delta \ni e^{i\theta}$ такая, что $\text{diam } \delta < \varepsilon$ и

$$\text{dist}(\overline{f(D \cap \delta)}, \mathfrak{F}) = \inf_{M \in \mathfrak{F}} \text{dist}(\overline{f(D \cap \delta)}, M) < \varepsilon.$$

Очевидно, K_ε – открытое подмножество окружности S .

Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, и покажем, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{F}) = \bigcap_{m=1}^\infty K_{\varepsilon_m}$, а значит, является G_δ -множеством на S .

Действительно, если $e^{i\theta} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$, т.е. $\varphi(e^{i\theta}) \in \mathfrak{F}$, то согласно формуле (1) для любой фундаментальной системы $(\delta_m)_{m=1}^\infty$ окрестностей точки $e^{i\theta}$ будет выполнено $\text{dist}(\overline{f(D \cap \delta_m)}, \varphi(e^{i\theta})) \rightarrow 0$, а значит, и $\text{dist}(\overline{f(D \cap \delta_m)}, \mathfrak{F}) \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Это означает, что найдется окрестность δ_m сколь угодно малого диаметра, для которой величина $\text{dist}(\overline{f(D \cap \delta_m)}, \mathfrak{F})$ сколь угодно мала. Таким образом, $e^{i\theta} \in K_{\varepsilon_m}$ для любого номера $m = 1, 2, \dots$.

Обратно, если $e^{i\theta} \in \bigcap_{m=1}^\infty K_{\varepsilon_m}$, то легко построить фундаментальную систему $(\delta_m)_{m=1}^\infty$ окрестностей точки $e^{i\theta}$, для которой $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{dist}(\overline{f(D \cap \delta_m)}, \mathfrak{F}) = 0$. Так как по формуле (1) $\text{dist}(\overline{f(D \cap \delta_m)}, \varphi(e^{i\theta})) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, отсюда заключаем, что $\varphi(e^{i\theta}) \in \mathfrak{F}$, или $e^{i\theta} \in \varphi^{-1}(\mathfrak{F})$.

Точно также проверяется, что множества $\psi^{-1}(\mathfrak{F})$, $\chi^{-1}(\mathfrak{F})$ имеют тип G_δ на S . Для этого достаточно в проведенных выкладках заменить выражение $\overline{f(D \cap \delta_m)}$ соответственно на $\text{Ls}_{m \rightarrow \infty} f_m(D \cap \delta_m)$ и $\text{Li}_{m \rightarrow \infty} f_m(D \cap \delta_m)$, и сослаться на формулы (2), (3). Теорема доказана.

Желая сформулировать аналогичную теорему для радиальных предельных множеств, прежде всего отметим, что функции f и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ уже не могут быть произвольными, поскольку в противном случае их значения на отдельных радиусах никак между собой не были бы связаны. Поэтому мы предположим, что рассматриваемые функции непрерывны.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции f и $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывны в D . Тогда отображения $\lambda, \mu: S \rightarrow 2^R$, определяемые равенствами

$$\lambda(e^{i\theta}) = C(f, \gamma_{\theta}, e^{i\theta}), \quad \mu(e^{i\theta}) = C(\mathcal{F}, \gamma_{\theta}, e^{i\theta}),$$

являются борелевскими функциями соответственно второго и четвертого классов. В частности, для любого замкнутого подмножества $\mathfrak{F} \subset 2^R$ множества $\lambda^{-1}(\mathfrak{F})$, $\mu^{-1}(\mathfrak{F})$ имеют типы $F_{\sigma\delta}$ и $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ на окружности $S = \partial D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $r_m = 1 - 2^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$,

$$\gamma_{\theta}^m = \{re^{i\theta} : r_m \leq r < 1\}, \quad \gamma_{\theta}^{mk} = \{re^{i\theta} : r_m \leq r \leq r_k\}, \quad k > m.$$

Согласно формуле (1)

$$\lambda(e^{i\theta}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{f(\gamma_{\theta}^m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\bigcup_{k=m+1}^{\infty} f(\gamma_{\theta}^{mk})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{f(\gamma_{\theta}^{mk})}.$$

Здесь мы использовали равенства $\lim A_n = \bigcap_n \overline{A_n}$ и $\lim A_n = \overline{\bigcup_n A_n}$, справедливые соответственно для убывающей и возрастающей по включению последовательности множеств $\{A_n\}$ [13; с. 347].

Так как функция f непрерывна в области D , при фиксированных номерах m, n отображение $S \ni e^{i\theta} \mapsto f(\gamma_{\theta}^{mk}) \in 2^R$ непрерывно, т.е. борелевское класса 0. Но предельный переход увеличивает класс функции максимум на 1 (см. [13; с. 394]), поэтому $\lambda(e^{i\theta})$ – борелевская функция второго класса.

Далее, согласно формуле (2)

$$\begin{aligned} \mu(e^{i\theta}) &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} f_n(\gamma_{\theta}^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n(\gamma_{\theta}^m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{p=n}^{\infty} f_p(\gamma_{\theta}^m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \bigcup_{j=n}^p \overline{f_j(\gamma_{\theta}^m)} = \lim_{m, n, p \rightarrow \infty} \bigcup_{j=n}^p \lim_{k \rightarrow \infty} f_j(\gamma_{\theta}^{mk}) \\ &= \lim_{m, n, p, k \rightarrow \infty} \bigcup_{j=n}^p f_j(\gamma_{\theta}^{mk}). \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы $\text{Ls } A_n = \text{Ls } \overline{A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{p=n}^{\infty} A_n}$ [13; с. 345], а также свойство $\lim(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n$, справедливое в случае топологической сходимости последовательностей множеств $\{A_n\}, \{B_n\}$ [13; с. 347].

Так как функции $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывны в круге D , при фиксированных номерах m, n, p, k отображение $S \ni e^{i\theta} \mapsto \bigcup_{j=n}^p f_j(\gamma_{\theta}^{mk}) \in 2^R$ непрерывно. Поэтому $\mu(e^{i\theta})$ – борелевская функция четвертого класса. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функционал $g: 2^R \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывен в метрике Хаусдорфа. Тогда

1) если функции f и $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^\infty$ произвольны в D , то функции

$$gC(f, D, e^{i\theta}), \quad gC(\mathcal{F}, D, e^{i\theta}), \quad g\underline{C}(\mathcal{F}, D, e^{i\theta})$$

являются борелевскими функциями первого класса на окружности $S = \partial D$;

2) если функции f и $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^\infty$ непрерывны в D , то функции

$$gC(f, \gamma_\theta, e^{i\theta}), \quad gC(\mathcal{F}, \gamma_\theta, e^{i\theta})$$

являются борелевскими функциями соответственно второго и четвертого классов на окружности $S = \partial D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из теорем 1 и 2, если принять во внимание, что композиция борелевского отображения с непрерывным не может повысить его борелевский класс.

Примером функционала, непрерывного в метрике Хаусдорфа, может служить диаметр множества $gM = \text{diam } M$.

В заключение отметим, что отображение $\nu(e^{i\theta}) = \underline{C}(\mathcal{F}, \gamma_\theta, e^{i\theta})$ нами не рассмотрено, так как автору не удалось установить его борелевость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Носиро, *Предельные множества*, ИЛ, М., 1963.
- [2] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, Библиотека сборника “Математика”, Мир, М., 1971.
- [3] А. Ловатер, “Граничное поведение аналитических функций”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **10**, ВИНТИ, М., 1973, 99–259.
- [4] В. И. Кругликов, “Предельные множества последовательности функций”, *ДАН*, **357**:1 (1997), 16–18.
- [5] А. П. Девятков, В. И. Кругликов, “О стирании особенностей последовательностей аналитических функций”, *ДАН*, **406**:5 (2006), 591–592.
- [6] А. П. Девятков, “Две иллюстрации понятия предельного множества последовательности функций”, *Вест. ТюмГУ*, 2007, № 5, 3–12.
- [7] А. П. Девятков, *Предельные множества, граничные свойства и устранимые особенности последовательностей функций*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Тюмень, 2008.
- [8] Н. Б. Малышева, “О топологических свойствах отображений, порождаемых предельными множествами”, *Сиб. матем. журн.*, **21**:5 (1980), 185–186.
- [9] Н. Б. Малышева, “О предельных множествах отображений топологических пространств”, *ДАН СССР*, **264**:5 (1982), 1069–1073.
- [10] А. Н. Тихонов, “Об универсальном топологическом пространстве”, *ДАН СССР*, **3**:2 (1936), 49–51.
- [11] В. И. Пономарев, “Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов”, *Матем. сб.*, **48**:2 (1959), 191–212.
- [12] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, ОНТИ, М.–Л., 1937.
- [13] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.

А. П. Девятков

Тюменский государственный университет

E-mail: anglin@mail.ru

Поступило

15.03.2010

Исправленный вариант

16.03.2012