Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. О. Ермилов, Восстановление тетраэдров по заданному набору длин ребер, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 530–538

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:12:58

Восстановление тетраэдров по заданному набору длин ребер

Н. О. Ермилов

В работе изучен вопрос о нахождении тетраэдров по известному набору длин их ребер. Этот вопрос является частным случаем задачи об определении положения, с точностью до движения, полных графов в $\mathbb{R}^3$ при известном множестве значений всевозможных попарных расстояний между вершинами, без знания их распределения по ребрам графа. Такая проблема возникает при исследовании в физике молекулярных кластеров. Традиционно задача поиска минимума потенциальной энергии молекулярного кластера сводится к сложной в вычислительном отношении задаче глобальной оптимизации. Однако для анализа полученного решения важно знать, сохраняется ли конгруэнтность многогранных конструкций при перестановках длин ребер.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Известная теорема Коши утверждает, что все выпуклые многогранники однозначно, с точностью до движения в $\mathbb{R}^3$, определяются своей метрикой и комбинаторным строением. В случае, когда все грани треугольные, можно считать, что метрика задается длинами ребер. Однако, это утверждение требует уточнения, а именно, нужно знать не только длины ребер, но и их распределение по пронумерованным ребрам, так как могут существовать такие распределения длин ребер, при которых получаются неконгруэнтные многогранники. Поэтому естественно поставить следующий вопрос: сколько неконгруэнтных многогранников с данной комбинаторной структурой можно построить, используя один и тот же набор длин ребер. В данной работе мы приводим решение этой задачи для тетраэдра. Аналогичные вопросы идентификации симплексов рассмотрены в работе Протасова [1].

2. Максимальное число тетраэдров с заданным набором длин ребер. Пусть нам даны шесть отрезков такие, что при любом их распределении по пронумерованным ребрам всегда реализуется тетраэдр в $\mathbb{R}^3$. Если нам неизвестно распределение длин по ребрам, то, оказывается, возможны различные варианты построения тетраэдра. Кроме того, в данном наборе могут быть равные отрезки, что, конечно, сокращает возможное число различных вариантов, но не всегда обеспечивает единственность возможной конструкции. Таким образом, чтобы получить оценки максимального числа неконгруэнтных тетраэдров с одинаковым набором длин ребер,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант РНП 2.1.1.3704).

нам надо решить переборную задачу с большим числом возможных вариантов. Для того чтобы перебор был более коротким, будем работать с заведомо неконгруэнтными тетраэдрами. Для этого будем проверять следующие необходимые условия конгруэнтности:

- а) равенство длин всех пар скрещающихся ребер как множеств;
- б) равенство граней как треугольников;
- в) равенство наборов длин ребер, выходящих из одной вершины.

Разобьем данный нам набор длин ребер на группы, где внутри каждой группы окажутся отрезки одинаковой длины. Таким образом, внутри групп могут оказаться 1, 2, 3, 4, 5, 6 отрезков. Для того чтобы перебрать возможные распределения длин отрезков, составим следующую табл. 1: в верхней ячейке каждого столбца стоит описание отрезков в одной из групп, в остальных ячейках этого столбца представлены возможные распределения оставшихся в наборе отрезков. Каждое распределение описано буквенным названием, где одинаковым буквам соответствуют равные отрезки в наборе.

Таблица 1

—	a, a	a, a, a	a, a, a, a	a, a, a, a, a	a, a, a, a, a, a
a, b, c, d, e, f	b, c, d, e	b, c, d	b, c	—	—
—	b, b, c, d	b, b, c	b, b	—	—
—	b, b, c, c	b, b, b	—	—	—
—	b, b, b, c	—	—	—	—
—	b, b, b, b	—	—	—	—

Теперь, двигаясь по столбцам сверху вниз, рассмотрим каждый из случаев.

- 1) a, b, c, d, e, f (т.е. все ребра разной длины).

Пусть сначала ребра a и b расположены в одной грани. Третью сторону этой грани можно выбрать 4-мя способами, для каждого из которых есть еще $3! = 6$ вариантов распределения оставшихся ребер.

Если ребра a и b скрещающиеся, то каждое из оставшихся ребер обязательно пересекается с этими ребрами. Без ограничения общности можно считать, что следующим в рассмотрении будет ребро c . Ребро, которое будет скрещающимся с c , можно выбрать 3-мя способами, для каждого из которых, в свою очередь, существует еще 2 варианта подбора ребер.

В результате мы получаем $4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 30$ неконгруэнтных тетраэдров.

- 2) a, a, b, c, d, e .

Пусть ребра a, a лежат в одной грани. Третью сторону этой грани можно выбрать 4-мя способами. Без ограничения общности можно считать, что мы выбрали ребро b . Теперь выберем ребро, скрещающееся с b , пусть это будет ребро c . При любом распределении оставшихся ребер (d и e) мы получим конгруэнтные тетраэдры (см. рис. 1)

Если скрещающимся к ребру b выбрать другое ребро (d или e), то мы получаем в каждом из случаев единственный тетраэдр. Значит, в этом случае имеется 12 различных тетраэдров.

Рис. 1

Рассмотрим теперь случай, когда ребра a, a скрещиваются. Пусть следующим в рассмотрении будет ребро b . Ребро, скрещивающиеся с b , можно выбрать 3-мя способами, пусть это будет ребро c , тогда оставшиеся отрезки однозначно задают тетраэдр. На рис. 2 представлена натуральная развертка этого тетраэдра.

Рис. 2

Итого, в результате у нас получается $4 \cdot 3 + 3 = 15$ неконгруэнтных тетраэдров.

3) a, a, b, b, c, d .

Пусть ребра c и d лежат в одной грани. Грань с участием этих ребер достраиваем одним ребром a , тогда оставшееся ребро a можно разместить 3-мя способами. Если строить грань из ребер c, d, b , то мы получаем еще 3 неконгруэнтных тетраэдра.

Пусть ребра c и d скрещиваются. Рассмотрим распределение отрезков a, a, b, b по парам скрещивающихся ребер тетраэдра: если ребро a скрещивается с ребром a , то мы получаем единственный тетраэдр, если ребро a скрещивается с ребром b , то мы получаем 2 различных тетраэдра.

В результате получается $3 + 3 + 2 + 1 = 9$ неконгруэнтных тетраэдров.

4) a, a, b, b, c, c .

Пусть ребра a, a пересекаются. Грань с участием этих ребер достраиваем одним ребром b , в зависимости от положения оставшегося ребра b мы получаем 2 неконгруэнтных тетраэдра. Еще 2 неконгруэнтных тетраэдра мы получим, если рассмотрим грань, состоящую из ребер a, a, c .

Пусть теперь ребра a , a скрещиваются. Рассмотрим ребро b . Если ребро b скрещивается со вторым ребром b , то мы получаем единственный тетраэдр. Если же ребро b скрещивается с ребром c , то мы так же получаем единственный тетраэдр.

В результате получается $2 + 2 + 1 + 1 = 6$ неконгруэнтных тетраэдров.

5) a, a, b, b, b, c .

Рассмотрим ребра b, b, b . Так как в тетраэдре существуют только пары скрещивающихся ребер, то 2 ребра в этом наборе обязательно пересекаются. В зависимости от положения третьего ребра b существуют 3 принципиально различных типа распределения: ребра b образуют грань, ребра b выходят из одной вершины, ребра b образуют незамкнутую ломаную.

Если все ребра b лежат в одной грани, то оставшиеся ребра выходят из одной вершины, следовательно, в этом случае получается единственный тетраэдр.

Если ребра b выходят из одной вершины, то оставшиеся ребра образуют грань, значит, в этом случае у нас тоже получается единственный тетраэдр.

Если ребра b являются звеньями незамкнутой ломаной, то оставшиеся ребра тоже образуют незамкнутую ломаную. В зависимости от порядка следования отрезков a , a , c имеются 2 вида ломаных: (a, a, c) , (a, c, a) .

В результате мы получим $1 + 1 + 2 = 4$ неконгруэнтных тетраэдра.

6) a, a, b, b, b, b .

Здесь мы получаем 2 неконгруэнтных тетраэдра: у одного из них ребра a , a пересекаются, а у другого ребра a , a скрещиваются.

7) a, a, a, b, c, d .

Аналогично п. 5) рассмотрим 3 различных распределения ребра a .

Если все ребра a лежат в одной грани, то оставшиеся ребра выходят из одной вершины, следовательно, в этом случае получается единственный тетраэдр.

Если ребра a выходят из одной вершины, то оставшиеся ребра образуют грань, значит, в этом случае у нас тоже получается единственный тетраэдр.

Если ребра a являются звеньями незамкнутой ломаной, то оставшиеся ребра тоже образуют незамкнутую ломаную. В зависимости от порядка следования отрезков b , c , d имеются 3 вида ломаных: (b, c, d) , (b, d, c) , (c, b, d) .

В результате мы получим $1 + 1 + 3 = 5$ неконгруэнтных тетраэдров.

8) a, a, a, b, b, b .

Здесь в каждом из трех случаев, аналогичных п. 5), получится по одному тетраэдру.

9) a, a, a, a, b, c .

Здесь мы получаем 2 неконгруэнтных тетраэдра: у одного ребра b и c пересекаются, а у другого ребра b и c скрещиваются.

10) a, a, a, a, a, b .

Так как всевозможные распределения задаются положением ребра b , то мы получаем единственный тетраэдр.

11) a, a, a, a, a, a .

Существует единственный правильный тетраэдр.

Нами не рассматривались случаи a, a, a, b, b, c и a, a, a, a, b, b , так как они были рассмотрены в п. 5) и п. 6) соответственно.

Итоговый результат наших рассуждений приводится в табл. 2, где в первом столбце указано распределение равных ребер, а во втором столбце соответствующее максимальное количество неконгруэнтных тетраэдров.

ТАБЛИЦА 2

a, b, c, d, e, f	30
a, a, c, d, e, f	15
a, a, b, b, c, d	9
a, a, b, b, c, c	6
a, a, a, b, c, d	5
a, a, b, b, b, c	4
a, a, a, b, b, b	3
a, a, b, b, b, b	2
a, a, a, a, b, c	2
a, a, a, a, a, b	1
a, a, a, a, a, a	1

При получении верхних оценок в каждом из рассмотренных нами случаев мы исходили из того, что все неконгруэнтные конструкции реализуются в $\mathbb{R}^3$.

Для того чтобы показать точность полученных оценок, рассмотрим набор длин вида

$$l_k = 1 + (k - 1) \cdot \varepsilon.$$

Если, например, у нас случай a, a, a, b, b, c , то мы возьмем следующие длины ребер тетраэдра: $l_1, l_1, l_1, l_2, l_2, l_3$. Выбирая достаточно маленькое значение ε , мы всегда можем добиться условий реализуемости тетраэдра с данной метрикой и данным комбинаторным строением: выполнение строгого неравенства треугольника для каждой грани и положительность квадрата объема тетраэдра (см. [2]). Действительно, воспользовавшись формулой для объема тетраэдра (см., например, [3]), независимо от распределения длин по ребрам мы получим для объема тетраэдра равенство вида

$$144 \cdot V^2 = 2 + \sum_{i=1}^6 b_i \cdot \varepsilon^i.$$

Так как b_i ограничены, то за счет выбора ε всегда можно добиться того, чтобы для любого распределении было $V^2 > 0$.

3. Тетраэдры с равным объемом и одинаковым набором длин ребер. Рассмотрим набор длин $l_k = 1 + (k - 1) \cdot \varepsilon$. Приведем пример двух распределений длин по ребрам, при реализации которых тетраэдр имеет один и тот же объем. Рассмотрим плоский граф, который соответствует комбинаторному представлению тетраэдра (см. рис. 3).

Пусть d_{ij} – расстояние между вершинами графа с соответствующими номерами. Рассмотрим распределение длин

$$\begin{aligned} d_{12} &= 1 + 5 \cdot \varepsilon, & d_{23} &= 1 + 4 \cdot \varepsilon, & d_{31} &= 1 + 3 \cdot \varepsilon, \\ d_{14} &= 1, & d_{24} &= 1 + 2 \cdot \varepsilon, & d_{43} &= 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Рис. 3

В результате мы получаем следующий многочлен для объема:

$$Q_1 = 2 + 30 \cdot \varepsilon + 131 \cdot \varepsilon^2 - 4 \cdot \varepsilon^3 - 1405 \cdot \varepsilon^4 - 3434 \cdot \varepsilon^5 - 2545 \cdot \varepsilon^6.$$

Теперь рассмотрим другое распределение длин

$$\begin{aligned} d_{12} &= 1 + 5 \cdot \varepsilon, & d_{23} &= 1 + 4 \cdot \varepsilon, & d_{31} &= 1, \\ d_{14} &= 1 + 3 \cdot \varepsilon, & d_{24} &= 1 + 2 \cdot \varepsilon, & d_{43} &= 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Для этого распределения длин получаем следующий многочлен для объема:

$$Q_2 = 2 + 30 \cdot \varepsilon + 107 \cdot \varepsilon^2 - 16 \cdot \varepsilon^3 - 553 \cdot \varepsilon^4 - 626 \cdot \varepsilon^5 - 169 \cdot \varepsilon^6.$$

После того как мы приравняем многочлены для объема, задача сведется к нахождению корней уравнения

$$24 \cdot \varepsilon^2 + 12 \cdot \varepsilon^3 - 852 \cdot \varepsilon^4 - 2808 \cdot \varepsilon^5 - 2376 \cdot \varepsilon^6 = 0.$$

Нас не интересует тривиальное решение $\varepsilon = 0$, поэтому можно понизить степень многочлена. После деления многочлена на наибольший общий делитель его коэффициентов приходим к уравнению

$$2 + \varepsilon - 71 \cdot \varepsilon^2 - 234 \cdot \varepsilon^3 - 198 \cdot \varepsilon^4 = 0.$$

Полученное уравнение имеет 4 действительных корня:

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{11} + \frac{\sqrt{26}}{22}, \quad -\frac{1}{11} - \frac{\sqrt{26}}{22}.$$

Из условия положительности данного нам набора чисел и неравенства треугольника получаем оценку $-1/5 < \varepsilon < 1/4$. Корень

$$\varepsilon = -\frac{1}{11} + \frac{\sqrt{26}}{22} \approx 0.14$$

удовлетворяет этим условиям.

Условие реализуемости объема проверяется непосредственной подстановкой в любой из рассмотренных нами многочленов:

$$V = \frac{\sqrt{Q_1(-1/11 + \sqrt{26}/22)}}{12} = \frac{114127198 + 22370448 \cdot \sqrt{26}}{63888} \approx 0.24.$$

4. Тетраэдры с одинаковым набором длин ребер, вписанные в одну сферу. Рассмотрим сферу радиуса 10 ($R = 10$) и вписанный в нее тетраэдр со сторонами 15, 15, 15, 15, x , y . Покажем, что из этих длин можно составить два неконгруэнтных тетраэдра. Основная идея построения примера состоит в получении уравнений связи для параметров x и y . Для этого воспользуемся формулой, выражающей радиус описанной сферы через ребра тетраэдра (см. [4]):

$$36 \cdot V^2 \cdot R^2 = Q \cdot (Q - a_1 \cdot a_2) \cdot (Q - c_1 \cdot c_2) \cdot (Q - b_1 \cdot b_2),$$

где $Q = (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2)/2$ (см. рис. 4)

Рис. 4

Чтобы понизить степень уравнений связи, сделаем замену переменных $x^2 = u$, $y^2 = v$. Если отрезки x и y пересекаются, то уравнение связи имеет вид

$$G(u, v) = 400 \cdot u^2 \cdot v - u^2 \cdot v^2 + 400 \cdot v^2 \cdot u - 157500 \cdot u \cdot v = 0.$$

Так как нас не интересует нулевое решение, то можно понизить степень полинома и выразить одну переменную через другую:

$$u = \frac{157500 - 400 \cdot v}{400 - v}.$$

Если отрезки скрещиваются, то мы получим соотношение

$$F(u, v) = 39375 \cdot u^2 + 39375 \cdot v^2 - 17718750 \cdot u - 17718750 \cdot v + 11250 \cdot u \cdot v + 1993359375 = 0.$$

Теперь задача сводится к поиску решения системы уравнений вида

$$\begin{cases} G(u, v) = 0, \\ F(u, v) = 0. \end{cases}$$

Исключая из системы переменную u , получим уравнение

$$7 \cdot v^4 - 7950 \cdot v^3 + 3219375 \cdot v^2 - 543375000 \cdot v + 31893750000 = 0.$$

Это уравнение имеет 4 положительных корня:

$$225, \quad \frac{2700}{7}, \quad \frac{525}{2} + \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105}, \quad \frac{525}{2} - \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105}.$$

В результате решением системы являются следующие пары чисел:

$$\begin{pmatrix} 225 \\ \frac{2700}{7} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2700}{7} \\ 225 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{525}{2} + \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105} \\ \frac{525}{2} - \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{525}{2} - \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105} \\ \frac{525}{2} + \frac{25}{2} \cdot \sqrt{105} \end{pmatrix}.$$

Теперь если перейти к самим отрезкам x и y , то наборы решений будут следующими:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 30 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 30 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cdot \sqrt{42 + 2 \cdot \sqrt{105}} \\ \frac{5}{2} \cdot \sqrt{42 - 2 \cdot \sqrt{105}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cdot \sqrt{42 - 2 \cdot \sqrt{105}} \\ \frac{5}{2} \cdot \sqrt{42 + 2 \cdot \sqrt{105}} \end{pmatrix}.$$

Первым двум сериям решений соответствует тетраэдр, у которого пять ребер одинаковые, а шестое ребро отличается от них по длине. В этом случае у нас получаются пара конгруэнтных тетраэдров.

Нетривиальными являются 3-я и 4-я серии решений, они дают следующие значения неизвестных ребер: $x \approx 11.59$, $y \approx 19.76$. Соотношение между найденными ребрами тетраэдра соответствует распределению a, a, a, a, b, c (см. табл. 2), поэтому мы получаем 2 неконгруэнтных тетраэдра.

Полученные нами значения параметров x и y удовлетворяют неравенству треугольника. Условие реализуемости объема выполняется, и объемы найденных тетраэдров имеют следующие значения:

$$V_1 = \frac{375 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 324.77, \quad V_2 = \frac{125 \cdot \sqrt{35}}{2} \approx 369.76.$$

Полученные нами значения объемов дополнительно подтверждают неконгруэнтность найденных тетраэдров.

5. Заключение. Таким образом, нами показано, что для однозначного восстановления тетраэдра не достаточно знания длин его ребер. В связи с этим встал вопрос поиска дополнительных признаков конгруэнтности тетраэдров с одинаковым набором длин ребер. Для этого нами была рассмотрена еще одна характеристика тетраэдра: объем или радиус описанной сферы. Однако построенные примеры показывают, что равенство объемов или радиусов описанной сферы для двух тетраэдров с общим набором длин ребер еще не обеспечивает их конгруэнтность.

Автор выражает благодарность И. Х. Сабитову за постановку задачи и постоянные консультации при ее решении. Так же автор признателен А. П. Афанасьеву за интерес к работе и помощь в ее выполнении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ю. Протасов, “Изоморфизм графов и равенство симплексов”, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 758–767.
- [2] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [3] И. Х. Сабитов, *Объемы многогранников*, МЦНМО, М., 2002.
- [4] М. Берже, *Геометрия*, т. 1, Мир, М., 1984.

Н. О. Ермилов

Институт системного анализа РАН, г. Москва

E-mail: nermilov@mail.ru

Поступило

11.06.2010

Исправленный вариант

16.10.2010