Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юфэнг Лиу, Го Вэньбинь, В. А. Ковалева, А. Н. Скиба, Критерии p -разрешимости и p -сверхразрешимости конечных групп, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 455–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:51:56

Критерии p -разрешимости и p -сверхразрешимости конечных групп

Юфэнг Лиу, Вэньбинь Го, В. А. Ковалева, А. Н. Скиба

Пусть A , K и H – подгруппы группы G и $K \leq H$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K, H) , если $AH = AK$; A изолирует пару (K, H) , если $A \cap H = A \cap K$. Пара (K, H) из G называется максимальной, если K является максимальной подгруппой в H . В данной работе мы изучаем конечные группы, в которых некоторые подгруппы покрывают или изолируют выделенные системы максимальных пар этих групп. В частности, получено обобщение ряда известных результатов о (частичных) CAP-подгруппах.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8836

1. Введение. Все рассматриваемые группы являются конечными. Символом $\mathcal{U}$ будем обозначать класс всех сверхразрешимых групп. Напомним, что $\mathcal{U}$ -корадикалом группы G называется пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G , что $G/N \in \mathcal{U}$; $\mathcal{U}$ -корадикал группы G обозначают символом $G^{\mathcal{U}}$. Используется терминология, принятая в [1], [2].

Пусть A , K и H – подгруппы группы G и $K \leq H$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K, H) , если $AH = AK$; A изолирует пару (K, H) , если $A \cap H = A \cap K$. Заметим, что $AH = AK$ эквивалентно $H \leq K(A \cap H)$, и $A \cap H = A \cap K$ эквивалентно $A \cap H \leq K$. Подгруппа A группы G называется квазинормальной [3] или перестановочной [2], [4] в G , если $AE = EA$ для всех подгрупп E из G . Квазинормальные подгруппы имеют много интересных свойств. В частности, если A – квазинормальная подгруппа в G , то для всякой максимальной пары (K, H) из G , т.е. пары (K, H) , где K – максимальная подгруппа в H , A либо покрывает, либо изолирует (K, H) .

Следующий пример показывает, что даже если некоторая подгруппа группы G покрывает или изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G , то она может не быть квазинормальной.

ПРИМЕР. Пусть p и q – простые числа, где q делит $p - 1$. Пусть $A = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p^2 и B – группа порядка q . Пусть $G = A \wr B = [K]B$, где $K = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_q$ – база регулярного сплетения G . Пусть $L = \langle a^p \rangle^B$. Тогда $G/L \simeq \langle a^p \rangle \wr B$ и $L \leq \Phi(G)$. Следовательно, группа G сверхразрешима. Пусть R – подгруппа порядка p группы A_1 . Предположим, что R квазинормальна в G .

Так как R является силовой p -подгруппой в RB , то $B \leq N_G(R)$, и поэтому R нормальна в G ; противоречие. Следовательно, R не является квазинормальной в G . С другой стороны, так как группа G сверхразрешима и R субнормальна в G , то R покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G (см. ниже, следствие 4.3).

Необходимо отметить, что теория покрытия и изолирования максимальных пар имеет прямую связь с теорией $САР$ -подгрупп. Напомним, что подгруппа A группы G называется *САР-подгруппой* в G [2; А, определение 10.8], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H) , где H/K – главный фактор из G . Подгруппа A называется *частичной САР-подгруппой* группы G [5], [6], если A либо покрывает, либо изолирует каждую пару (K, H) , где H/K – фактор некоторого фиксированного главного ряда из G . Очевидно, что всякая $САР$ -подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что $L \leq K < H \leq T$, где T/L – главный фактор из G . С другой стороны, всякая частичная $САР$ -подгруппа группы G либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G такую, что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i , где $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ – некоторый фиксированный главный ряд из G .

В данной работе мы изучаем группы, в которых некоторые подгруппы покрывают или изолируют выделенные системы максимальных пар этих групп. В частности, получено обобщение ряда известных результатов о (частичных) $САР$ -подгруппах.

2. Предварительные результаты. Следующие результаты будут использованы в данной работе.

ЛЕММА 2.1. Пусть N – нормальная подгруппа группы G и (K, H) – максимальная пара из G . Если N изолирует (K, H) , то (KN, HN) – максимальная пара в G и $|HN : KN| = |H : K|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – такая подгруппа группы G , что $KN \leq R \leq HN$. Тогда $R = N(R \cap H)$ и $K \leq R \cap H \leq H$. Следовательно, либо $R \cap H = K$, либо $R \cap H = H$. Если $R \cap H = K$, то

$$R = R \cap HN = N(R \cap H) = KN.$$

Если $R \cap H = H$, то

$$R = R \cap HN = N(R \cap H) = HN.$$

Поэтому (KN, HN) – максимальная пара в G . Так как N изолирует (K, H) , то $H \cap N = K \cap N$, и поэтому $|HN : KN| = |H : K|$.

ЛЕММА 2.2. Пусть M – подгруппа группы G и (K, H) – максимальная пара из G . Если $H \leq V \leq G$ и M либо покрывает, либо изолирует (K, H) , то $M \cap V$ либо покрывает, либо изолирует (K, H) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H \leq V$, то $M \cap H \cap V = M \cap H$. Если M покрывает пару (K, H) , то

$$H = K(M \cap H) = K(M \cap V \cap H),$$

т.е. $M \cap V$ покрывает (K, H) . Если M изолирует (K, H) , то

$$M \cap H \leq K, \quad (M \cap V) \cap H \leq K,$$

т.е. $M \cap V$ изолирует (K, H) .

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 2.3. Пусть A и B – такие собственные подгруппы группы G , что $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всякого $x \in G$.

ЛЕММА 2.4. Пусть G – группа и p – простой делитель порядка G . Пусть подгруппа E из G либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что H не p -разрешима. Тогда в G найдется такая цепь подгрупп $E = E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_{n-1} \leq E_n = G$, что либо E_{i-1} нормальна в E_i , либо $E_i/(E_{i-1})_{E_i}$ p -разрешима, $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – такая максимальная подгруппа группы G , что $E \leq M$. Предположим, что G не является p -разрешимой. Так как M^x максимальна в G для всякого $x \in G$, то E либо покрывает, либо изолирует пару (M^x, G) . Если E покрывает (M^x, G) для некоторого x , то $EM^x = G$, поэтому $MM^x = G$, что противоречит лемме 2.3. Следовательно, E изолирует (M^x, G) для всякого $x \in G$, поэтому $E \leq M_G$. По индукции получаем, что найдется такая цепь подгрупп

$$E = E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_{t-1} \leq E_t = M_G,$$

что либо E_{i-1} нормальна в E_i , либо $E_i/(E_{i-1})_{E_i}$ p -разрешима, $i = 1, \dots, t$. А поскольку M_G нормальна в G , получаем утверждение леммы.

Подгруппа H группы G называется примитивной [7] или $\cap$ -неразложимой [8] в G , если H отлична от пересечения всех тех подгрупп группы G , в которых она содержится собственно.

ЛЕММА 2.5 [8; с. 133]. Если K – подгруппа группы G и E – $\cap$ -неразложимая подгруппа группы K , то в G найдется такая $\cap$ -неразложимая подгруппа X , что $E = K \cap X$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $G = MN$, где N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Если $E \leq N \cap M$ и E субнормальна в G , то $E \leq M_G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как E субнормальна в G , то по [2; А, теорема 14.5] $N \leq N_G(E)$, и поэтому $E^G = E^{NM} = E^M \leq M$. Значит, $E \leq M_G$.

ЛЕММА 2.7 [9; лемма 2.8]. Пусть G – p -сверхразрешимая группа. Если выполнено $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.

ЛЕММА 2.8 [10; лемма 2.8]. Пусть $G = [N]M$, где N – минимальная нормальная подгруппа группы G и M – разрешимая максимальная подгруппа из G . Тогда N является абелевой группой.

ЛЕММА 2.9 [11; лемма 1]. Если N – нормальная подгруппа группы G и V – CAP-подгруппа из G , то NV – CAP-подгруппа в G .

ЛЕММА 2.10. Пусть E – разрешимая нормальная подгруппа группы G . Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы E является CAP-подгруппой в G . Если M – некоторая максимальная подгруппа из G такая, что $EM = G$, и V – максимальная подгруппа некоторой силовской подгруппы из E , то найдется такой элемент $x \in G$, что V покрывает или изолирует пару (M^x, G) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|G : M| = q^a$ и V – максимальная подгруппа силовой p -подгруппы P группы G . Предположим, что $V \not\leq M^x$ для всякого $x \in G$. Тогда $q = p$. Покажем, что $VM = G$. Ввиду леммы 2.9, не нарушая общности доказательства, мы можем предполагать, что $M_G = 1$, поэтому $G = [N]M$ для некоторой минимальной нормальной подгруппы N из G , содержащейся в E . Предположим, что $N \not\leq V$. Тогда $V \cap N = 1$, откуда ввиду максимальной подгруппы V в P получаем, что $V = 1$. Значит, $N \leq V$, и поэтому $G = VM$.

3. Критерии p -разрешимости и разрешимости групп. В этом разделе, основываясь на теории покрытия и изолирования максимальных пар, мы даем новые критерии p -разрешимости и разрешимости групп.

Пусть p – простое число. Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабой SAP_p -подгруппой* в G , если в G существует такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G,$$

что A либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i , где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не является p -разрешимой группой.

Напомним, что *нильпотентным корадикалом* группы G называется пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G , что G/N nilьпотентна.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть G – группа, p – простое число. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G p -разрешима;
- (2) каждая подгруппа из G является слабой SAP_p -подгруппой в G ;
- (3) каждая максимальная подгруппа из G является слабой SAP_p -подгруппой в G ;
- (4) каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой SAP_p -подгруппой в G ;
- (5) каждая силовая p -подгруппа из G является слабой SAP_p -подгруппой в G ;
- (6) либо G является примарной группой, т.е. группой, порядок которой является степенью некоторого простого числа, либо в G существуют две p -разрешимые максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $(|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r, q и некоторых $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и M_1 и M_2 являются слабыми SAP_p -подгруппами в G ;
- (7) каждая несверхразрешимая подгруппа Шмидта из G является слабой SAP_p -подгруппой в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как группа G p -разрешима, каждая подгруппа из G также является p -разрешимой, поэтому каждая подгруппа из G является слабой SAP_p -подгруппой по определению.

Импликации (2) $\Rightarrow$ (3)–(5) и (2) $\Rightarrow$ (7) очевидны.

(3), (4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что каждая 2-максимальная (каждая максимальная) подгруппа M из G является слабой SAP_p -подгруппой в G . Покажем, что группа G p -разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Прежде покажем, что G/N p -разрешима, где N – произвольная минимальная нормальная подгруппа из G . Если N – максимальная или 2-максимальная

подгруппа в G , то это очевидно. Пусть N не является максимальной (в случае (3)) или 2-максимальной (в случае (4)) подгруппой в G . Проверим, что условие теоремы справедливо для G/N . Пусть M/N – максимальная (2-максимальная) подгруппа из G/N . Тогда M является максимальной (2-максимальной) подгруппой в G . Поэтому по условию теоремы M является слабой CAP_p -подгруппой в G , и, значит, найдется такой композиционный ряд $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ в G , что M либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (Q, R) из G , что $G_{i-1} \leq Q < R \leq G_i$ для некоторого i , где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и R не p -разрешима.

Рассмотрим ряд

$$1 = G_0N/N < G_1N/N < \dots < G_nN/N = G/N.$$

Ввиду изоморфизмов

$$G_iN/G_{i-1}N \simeq G_iNG_{i-1}/G_{i-1}N \simeq G_i/G_i \cap G_{i-1}N = G_i/G_{i-1}(G_i \cap N),$$

не нарушая общности доказательства, мы можем предполагать, что этот ряд является композиционным в G/N , причем $|G_i : G_{i-1}| = |G_iN/N : G_{i-1}N/N|$. Пусть $(K/N, H/N)$ – максимальная пара из G/N и

$$G_{i-1}N/N \leq K/N < H/N \leq G_iN/N$$

для некоторого i , где p делит $|G_iN/N : G_{i-1}N/N|$ и H/N не является p -разрешимой группой. Покажем, что M/N покрывает или изолирует пару $(K/N, H/N)$.

Заметим, что $G_{i-1}N \leq K < H \leq G_iN$ и (K, H) – максимальная пара в G . Так как $K = N(K \cap G_i)$ и $H = N(H \cap G_i)$, то

$$\begin{aligned} |H : K| &= (|H \cap G_i||N|/|G_i \cap H \cap N|) : (|K \cap G_i||N|/|G_i \cap K \cap N|) \\ &= (|H \cap G_i||N|/|G_i \cap N|) : (|K \cap G_i||N|/|G_i \cap N|) = |H \cap G_i : K \cap G_i|. \end{aligned}$$

Следовательно, $K \cap G_i \neq H \cap G_i$. Покажем, что $(K \cap G_i, H \cap G_i)$ – максимальная пара в G . Так как $K \neq H$, то $N(K \cap G_i) \neq N(H \cap G_i)$, т.е. N не покрывает пару $(K \cap G_i, H \cap G_i)$. Поэтому в G существует такая максимальная пара (L, T) , что

$$K \cap G_i \leq L < T \leq H \cap G_i$$

и N не покрывает (L, T) . Действительно, если N покрывает каждую такую максимальную пару (U, W) , что

$$K \cap G_i \leq U < W \leq H \cap G_i,$$

то, очевидно, N покрывает пару $(K \cap G_i, H \cap G_i)$; противоречие. Так как N нормальна в G , то N либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару из G . Поэтому N изолирует пару (L, T) . Тогда по лемме 2.1 (LN, TN) – максимальная пара в G и $|TN : LN| = |T : L|$. Но

$$K = N(K \cap G_i) \leq NL < NT \leq N(H \cap G_i) = H.$$

Следовательно, $K \cap G_i = L$ и $H \cap G_i = T$. Поэтому $(K \cap G_i, H \cap G_i)$ – максимальная пара в G . При этом легко заметить, что $G_{i-1} \leq K \cap G_i < H \cap G_i \leq G_i$. Так как H/N

не является p -разрешимой группой, то $H \cap G_i$ также не является p -разрешимой, так как

$$H/N = (H \cap G_i)N/N \simeq H \cap G_i / H \cap G_i \cap N.$$

Поэтому по условию теоремы M либо покрывает, либо изолирует $(K \cap G_i, H \cap G_i)$. Если M покрывает $(K \cap G_i, H \cap G_i)$, то

$$MH = MN(G_i \cap H) = MN(G_i \cap K) = MK,$$

т.е. M покрывает (K, H) . Тогда

$$(M/N)(H/N) = MH/N = MK/N = (M/N)(K/N),$$

т.е. M/N покрывает $(K/N, H/N)$. Если M изолирует $(K \cap G_i, H \cap G_i)$, то

$$\begin{aligned} M \cap H &= M \cap N(G_i \cap H) = N(M \cap G_i \cap H) = N(M \cap K \cap G_i) \\ &= M \cap N(K \cap G_i) = M \cap K, \end{aligned}$$

т.е. M изолирует (K, H) . Значит,

$$(M/N) \cap (H/N) = (M \cap H)/N = (M \cap K)/N = (M/N) \cap (K/N),$$

т.е. M/N изолирует $(K/N, H/N)$. Следовательно, условие теоремы справедливо для G/N , поэтому согласно выбору группы G факторгруппа G/N p -разрешима. Так как класс всех p -разрешимых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , N не является абелевой, p делит $|N|$ и $N \not\leq \Phi(G)$. Таким образом, $C_G(N) = 1$.

Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ – прямое произведение изоморфных простых групп. Покажем, что в группе G существует такая максимальная подгруппа V , что p не делит $|G : V|$, $NV = G$ и $N_i \neq V \cap N_i \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, t$.

Пусть $N_p \leq P$, где N_p – силовская p -подгруппа группы N и P – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $N \cap P = N_p$ нормальна в P , и поэтому $P \leq N_G(N_p)$. Следовательно, в G существует такая максимальная подгруппа V , что $N_G(N_p) \leq V$. Тогда $G = NN_G(N_p) = NV$, и поэтому $V_G = 1$. Так как $N_G(N_p) \leq V$, то $P \leq V$. Пусть P_i – силовская p -подгруппа из N_i . Тогда $P_i \leq P^x$ для некоторого $x \in G$. Так как $G = NV$, то $x = vn$, где $n \in N$ и $v \in V$. Поэтому $P_i \leq (P^v)^n$, где $P^v \leq V$. Следовательно, $(P_i)^{n^{-1}} \leq V$. Так как N_i нормальна в N , то $(P_i)^{n^{-1}} \leq N_i$. Поэтому $V \cap N_i \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, t$. Если $N_i \leq V$ для некоторого i , то по лемме 2.6 $N_i \leq V_G = 1$; противоречие. Следовательно, $V \cap N_i \neq N_i$ для всех i .

Пусть $D = V \cap N_1$, и пусть M_1 – такая максимальная подгруппа из V , что $D \leq M_1$ (в случае (4)), либо $M_1 = V$ (в случае (3)). По условию теоремы в группе G найдется такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G,$$

что M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i , где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не p -разрешима. Так как G_1 – минимальная субнормальная подгруппа в G , то по [2; А, теорема 14.5] получаем, что $N \leq N_G(G_1)$. Следовательно, $G_1 \leq N$, так как в противном случае $NG_1 = N \times G_1$, и поэтому, $G_1 \leq C_G(N) = 1$, что невозможно. Поэтому,

не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $G_1 = N_1$. Тогда M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из N_1 , что H не является p -разрешимой группой. Следовательно, по лемме 2.2 получаем, что $D = M_1 \cap N_1$ либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из N_1 , что W не p -разрешима. Поэтому по лемме 2.4 найдется такая цепь подгрупп

$$D = M_1 \cap N_1 = D_0 \leq D_1 \leq \dots \leq D_{t-1} \leq D_t = N_1$$

в N_1 , что либо D_{i-1} нормальна в D_i , либо $D_i/(D_{i-1})_{D_i}$ p -разрешима, $i = 1, \dots, t$. Так как $N_1 = G_1$ и $1 \neq D \neq N_1$, то D_{t-1} не является нормальной подгруппой в N_1 . Значит, $N_1/(D_{t-1})_{N_1}$ p -разрешима, причем, так как G_1 – простая группа, $(D_{t-1})_{N_1} = 1$. Следовательно, N_1 p -разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликаций (3) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

(5) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

– такой композиционный ряд из G , что P либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i , где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H не p -разрешима. Так как G не p -разрешима, найдется такой индекс i , что G_i/G_{i-1} – простая неабелева группа и p делит $|G_i/G_{i-1}|$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $i = 1$. Тогда $P \cap G_1 \neq G_1$. По лемме 2.2 $P \cap G_1$ либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из G_1 , что W не p -разрешима. Тогда по лемме 2.4 найдется такая цепь подгрупп

$$P \cap G_1 = P_0 \leq P_1 \leq \dots \leq P_{t-1} \leq P_t = G_1$$

в G_1 , что либо P_{i-1} нормальна в P_i , либо $P_i/(P_{i-1})_{P_i}$ p -разрешима, $i = 1, \dots, t$. Так как G_1 – простая группа и $P \cap G_1 \neq G_1$, то P_{t-1} не является нормальной в G_1 . Значит, $G_1/(P_{t-1})_{G_1}$ p -разрешима. Но так как $(P_{t-1})_{G_1} = 1$, то G_1 также p -разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (5) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (6) Пусть G не является примарной группой. Тогда в G найдутся две такие максимальные подгруппы M_1 и M_2 , что $|G : M_1| = p^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$ и p не делит $|G : M_2|$. Тогда $(|G : M_1|, |G : M_2|) = 1$. Согласно (2) группа M_i является слабой SAP_p -подгруппой в G . Поэтому (1) $\Rightarrow$ (6).

(6) $\Rightarrow$ (1) Пусть в группе G существуют две p -разрешимые максимальные подгруппы M_1 и M_2 такие, что $(|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r, q и некоторых $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и M_1 и M_2 являются слабыми SAP_p -подгруппами в G . Покажем, что G p -разрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Предположим, что $N \leq M_1 \cap M_2$. Тогда M_1/N и M_2/N – p -разрешимые максимальные подгруппы в G/N и

$$(|G/N : M_1/N|, |G/N : M_2/N|) = (|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b.$$

Кроме того, M_1/N и M_2/N являются слабыми CAP_p -подгруппами в G/N (см. доказательство импликации $(3) \Rightarrow (1)$). Значит, условие теоремы справедливо для G/N . Поэтому по выбору группы G факторгруппа G/N p -разрешима. С другой стороны, если $N \not\leq M_1 \cap M_2$, например $N \not\leq M_1$, то $G/N = M_1N/N \simeq M_1/M_1 \cap N$ является p -разрешимой. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , $N \not\leq \Phi(G)$, N не является абелевой и p делит $|N|$.

Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ – множество простых делителей порядка группы N . Так как N не p -разрешима, то $t > 2$ и $G = NM_1 = NM_2$. С другой стороны, поскольку $(|G : M_1|, |G : M_2|) = r^a q^b$ для некоторых простых чисел r и q и $t > 2$, то найдется такое $p_i \in \pi$ и такая силовская p_i -подгруппа P_i из G , что либо $P_i \leq M_1$, либо $P_i \leq M_2$. Пусть $P_i \leq M_1$, и пусть L – такая минимальная субнормальная подгруппа группы G , что M_1 либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) , что $K < H \leq L$ и H не p -разрешима. Как и при доказательстве импликации $(3) \Rightarrow (1)$, можно показать, что $1 \neq M_1 \cap L \neq L$, что ввиду леммы 2.4 приводит к противоречию.

$(7) \Rightarrow (1)$ Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Покажем, что условие теоремы справедливо для подгрупп группы G . Пусть V – произвольная подгруппа из G и M – несверхразрешимая подгруппа Шмидта группы V . Тогда по условию теоремы M является слабой CAP_p -подгруппой в G . Значит, найдется такой композиционный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

в G , что M либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K_1, H_1) из G , что $G_{i-1} \leq K_1 < H_1 \leq G_i$ для некоторого i , где p делит $|G_i/G_{i-1}|$ и H_1 не p -разрешима. Рассмотрим ряд

$$1 = G_0 \cap V \leq G_1 \cap V \leq \dots \leq G_n \cap V = V.$$

Пусть (K, H) – такая максимальная пара, что

$$G_{i-1} \cap V \leq K < H \leq G_i \cap V,$$

где p делит $|(G_i \cap V)/(G_{i-1} \cap V)|$ и H не p -разрешима. Тогда $KG_{i-1} \neq HG_{i-1}$ (в противном случае

$$H = H \cap HG_{i-1} = H \cap KG_{i-1} = K(H \cap G_{i-1}) \leq K(V \cap G_{i-1}) \leq K,$$

что противоречит выбору пары (K, H)). Значит, G_{i-1} не покрывает пару (K, H) . Но так как G_{i-1} – нормальная подгруппа в G_i , то G_{i-1} изолирует (K, H) . Следовательно, по лемме 2.1 $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$ – максимальная пара в G_i . Кроме того, $G_{i-1} \leq G_{i-1}K < G_{i-1}H \leq G_i$. Так как

$$G_i \cap V / G_{i-1} \cap V \simeq (G_i \cap V)G_{i-1} / G_{i-1},$$

то p делит $|G_i/G_{i-1}|$, и поскольку H не p -разрешима, то $G_{i-1}H$ также не является p -разрешимой. Следовательно, по условию теоремы M либо покрывает, либо изолирует $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$. Если M изолирует $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$, то $M \cap G_{i-1}K =$

$M \cap G_{i-1}H$, и поэтому

$$\begin{aligned} M \cap K &= M \cap K(V \cap G_{i-1}) = M \cap V \cap G_{i-1}K \\ &= M \cap V \cap G_{i-1}H = M \cap H(V \cap G_{i-1}) = M \cap H, \end{aligned}$$

т.е. M изолирует (K, H) . Если M покрывает $(G_{i-1}K, G_{i-1}H)$, то имеем $MG_{i-1}K = MG_{i-1}H$, и поэтому

$$MH = M(V \cap G_{i-1}H) = V \cap MG_{i-1}H = V \cap MG_{i-1}K = M(G_{i-1}K \cap V) = MK,$$

т.е. M покрывает (K, H) . Таким образом, условие теоремы справедливо для подгрупп группы G . Следовательно, согласно выбору группы G все подгруппы из G p -разрешимы. Понятно, что G не q -нильпотентна, где q – наименьший простой делитель $|G|$, и поэтому ввиду [12; IV, теорема 5.4] в G существует q -замкнутая подгруппа Шмидта H . Пусть Q – нильпотентный корадикал группы H . По [1; теорема 26.1] получаем, что Q – нормальная силовская q -подгруппа группы H и $Q/\Phi(Q)$ – нецентральный главный фактор из H . Если H сверхразрешима, то $|Q/\Phi(Q)| = q$ и $|H/C_H(Q/\Phi(Q))|$ делит $q - 1$. Следовательно, $C_H(Q/\Phi(Q)) = H$; противоречие. Поэтому H не является сверхразрешимой. Предположим, что группа G проста. Тогда в G существует единственный композиционный ряд $1 < G$. По условию теоремы (7) H либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (U, W) из G , что W не p -разрешима, что ввиду леммы 2.4 приводит к противоречию. Следовательно, группа G не является простой.

Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа группы G , что G/M не является абелевой и p делит $|G/M|$. Пусть L – собственная субнормальная подгруппа из G . Тогда $L \leq M$. Действительно, если $L \not\leq M$, то $G = ML$ p -разрешима, что противоречит выбору группы G . Предположим, что $M \neq \Phi(G)$. Тогда в G найдется такая максимальная подгруппа E , что $EM = G$. Но так как подгруппы E и M p -разрешимы, то G также p -разрешима. Это противоречие показывает, что $M = \Phi(G)$.

Пусть $H \leq E$, где E – максимальная подгруппа из G . Так как $M = \Phi(G)$, то по условию теоремы H либо покрывает, либо изолирует (E^x, G) для всякого $x \in G$. Если H покрывает (E^x, G) для некоторого x , то $HE^x = G$, и поэтому $EE^x = G$, что противоречит лемме 2.3. Следовательно, H изолирует пару (E^x, G) для всех $x \in G$, т.е. $H \leq E^x$ для всякого $x \in G$. Поскольку $M = \Phi(G) \leq E$ и E_G – наибольшая нормальная подгруппа из G , содержащаяся в E , то $E_G = M$. Значит, $H \leq E_G = M = \Phi(G)$, и, следовательно, H нильпотентна, что противоречит выбору подгруппы H . Следовательно, (7) $\Rightarrow$ (1). Теорема доказана.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является *слабой CAP-подгруппой* в G , если она является слабой CAP_p -подгруппой в G для всякого простого делителя p порядка группы G .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть G – группа. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G разрешима;
- (2) каждая подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G ;
- (3) каждая максимальная подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G ;
- (4) каждая 2-максимальная подгруппа из G является слабой CAP-подгруппой в G ;

- (5) каждая силовская подгруппа из G является слабой САР-подгруппой в G ;
- (6) в G существует такая разрешимая максимальная подгруппа M , что M является слабой САР-подгруппой в G ;
- (7) каждая несверхразрешимая подгруппа Шмидта из G является слабой САР-подгруппой в G ;
- (8) каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из G является слабой САР-подгруппой в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 3.1 нам нужно лишь доказать импликации $(6) \Rightarrow (1)$ и $(8) \Rightarrow (1)$. Предположим, что импликация $(6) \Rightarrow (1)$ не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G . Если $N \not\leq M$, то $G = NM$, и поэтому $G/N = NM/N \simeq M/M \cap N$ разрешима. Пусть $N \leq M$. Тогда M/N – разрешимая максимальная подгруппа в G/N . Как и при доказательстве импликации $(3) \Rightarrow (1)$ теоремы 3.1, можно показать, что M/N является слабой САР-подгруппой в G/N . Следовательно, для G/N справедливо условие следствия, и поэтому по выбору группы G факторгруппа G/N разрешима. Значит, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , N не является абелевой и $G = NM$. Если $N \cap M = 1$, то $G = [N]M$, и поэтому по лемме 2.8 N – абелева группа. Но тогда G разрешима, что противоречит выбору группы G . Полученное противоречие показывает, что $M \cap N \neq 1$, что ввиду леммы 2.4 так же, как и при доказательстве импликации $(3) \Rightarrow (1)$ в теореме 3.1, приводит к противоречию.

$(8) \Rightarrow (1)$ Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть P – силовская p -подгруппа из G , где p – наименьший простой делитель $|G|$, и V – максимальная подгруппа из P . Пусть

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

– такой композиционный ряд из G , что V либо покрывает, либо изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что $G_{i-1} \leq K < H \leq G_i$ для некоторого i и H не является разрешимой. Прежде предположим, что G_1 не является абелевой. Тогда p делит $|G_1|$ и для силовской p -подгруппы W из G_1 имеем $W \neq G_1$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $V \cap G_1 \leq W$. Если $V \cap W = 1$, то, так как V максимальна в P , $|W| = p$. Следовательно, G_1 p -нильпотентна по [12; V, теорема 2.8], что противоречит минимальности G_1 . Следовательно, $V \cap W \neq 1$, что ввиду лемм 2.2 и 2.4 приводит к противоречию. Значит, G_1 – q -группа для некоторого простого числа q . Следовательно, $O_q(G) \neq 1$ по [13]. Если N – минимальная нормальная подгруппа из G , содержащаяся в $O_q(G)$, то так же, как в доказательстве импликации $(7) \Rightarrow (1)$ в теореме 3.1, можно показать, что условие теоремы справедливо для G/N . Поэтому G/N разрешима по выбору группы G . Но тогда группа G также разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство импликации $(8) \Rightarrow (1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является САР-подгруппой в G .*

СЛЕДСТВИЕ 3.4 (Фан, Го, Шам [14]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является частичной САР-подгруппой в G .*

Пусть H – подгруппа группы G . H называется s -нормальной [15] в G , если найдется такая нормальная подгруппа N из G , что $G = HN$ и $H \cap N \leq H_G$. Легко заметить, что s -нормальная подгруппа группы G является частичной SAP -подгруппой в G .

СЛЕДСТВИЕ 3.5 (Ванг [15]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G s -нормальна в G .*

СЛЕДСТВИЕ 3.6 (Го, Шам [10]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является SAP -подгруппой в G , то G разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 3.7 (Фан, Го, Шам [14]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является частичной SAP -подгруппой в G , то группа G разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 3.8 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G найдется такая максимальная подгруппа M , что M – разрешимая SAP -подгруппа в G .*

СЛЕДСТВИЕ 3.9 (Ванг [15]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G найдется такая максимальная подгруппа M , что M – разрешимая s -нормальная подгруппа в G .*

СЛЕДСТВИЕ 3.10 (Го, Шам [10]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G является SAP -подгруппой в G .*

СЛЕДСТВИЕ 3.11 (Фан, Го, Шам [14]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа из G является частичной SAP -подгруппой в G .*

4. Критерии p -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп. Пусть A , K и H – подгруппы группы G и $K \leq H$. Мы говорим, что A условно покрывает или изолирует пару (K, H) , если найдется такой элемент $h \in H$, что A покрывает или изолирует пару (K^h, H) .

В работе [11] Эскуэрро получил характеристики p -сверхразрешимых групп в терминах SAP -подгрупп. В этом разделе мы даем новые характеристики для p -сверхразрешимых, p -нильпотентных и сверхразрешимых групп в терминах условного покрытия и изолирования максимальных пар.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть G – группа и p – простое число. Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) G p -сверхразрешима;
- (2) каждая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что p делит $|H : K|$;
- (3) G p -разрешима и всякая субнормальная подгруппа из G покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что p делит $|H : K|$;
- (4) G p -разрешима и всякая $\cap$ -неразложимая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что p делит $|H : K|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть A – некоторая подгруппа группы G и (K, H) – такая максимальная пара из G , что p делит $|H : K|$. Тогда $|H : K| = p$. Если $H < G$,

то по выбору группы G подгруппа $A \cap H$ условно покрывает или изолирует (K, H) , т.е. найдется такой $h \in H$, что $A \cap H$ покрывает или изолирует (K^h, H) . Если $A \cap H$ покрывает (K^h, H) , то $K^h(A \cap H) = H(A \cap H) = H$, откуда $K^h A = HA$, т.е. A покрывает (K^h, H) . Если $A \cap H$ изолирует (K^h, H) , то $(A \cap H) \cap H = (A \cap H) \cap K^h$, и поэтому $A \cap H = A \cap K^h$, т.е. A изолирует (K^h, H) . Поэтому мы можем предполагать, что $H = G$ и K – максимальная подгруппа в G .

Прежде предположим, что $K_G = 1$. Тогда G – примитивная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $NK = G$, и поэтому $|G : K| = p$ делит $|N|$. Так как G p -сверхразрешима, то $|N| = p$. Кроме того, $C_G(N) = N$ по [2; А, теорема 15.2]. Следовательно,

$$K \simeq NK/N = G/N = G/C_G(N) \leq \text{Aut}(N),$$

где $|\text{Aut}(N)| = p - 1$. Следовательно, p не делит $|K|$. Поэтому K является p' -холловой подгруппой группы G . Если p делит $|A|$, то

$$|AK| = |A||K|/|A \cap K| \geq |K|p = |G|.$$

Следовательно, $AK = G$, т.е. A покрывает (K, G) . Если p не делит $|A|$, то по теореме Холла–Чунихина [12; VI, теорема 1.7] найдется такой элемент $g \in G$, что $A \leq K^g$, т.е. A условно изолирует (K, G) .

Предположим теперь, что $K_G \neq 1$. Тогда согласно выбору группы G AK_G/K_G условно покрывает или изолирует $(K/K_G, G/K_G)$. Следовательно, найдется такой $gK_G \in G/K_G$, что AK_G/K_G покрывает или изолирует $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$. Если AK_G/K_G покрывает $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$, то $(AK_G/K_G)(K/K_G)^{gK_G} = G/K_G$. Следовательно, $AK_G K^g = AK^g = G$, и поэтому A покрывает (K^g, G) . Если AK_G/K_G изолирует $((K/K_G)^{gK_G}, G/K_G)$, то $(AK_G/K_G) \cap (K/K_G)^{gK_G} = AK_G/K_G$. Следовательно, $A \cap K^g = A$, т.е. A изолирует (K^g, G) . Это показывает, что каждая подгруппа группы G условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что p делит $|H : K|$, что противоречит выбору группы G . Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Прежде покажем, что условие теоремы переносится на факторгруппы группы G . Действительно, пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G , A/N – произвольная подгруппа из G/N и $(K/N, H/N)$ – такая максимальная пара из G/N , что p делит $|H/N : K/N| = |H : K|$. Тогда по условию A условно покрывает или изолирует пару (K, H) , т.е. найдется такой $x \in H$, что либо $AK^x = AH$, либо $A \cap K^x = A \cap H$. В первом случае получаем, что

$$(A/N)(K/N)^{xN} = (A/N)(H/N) \quad (xN \in H/N),$$

т.е. A/N покрывает пару $((K/N)^{xN}, H/N)$. Во втором случае имеет место

$$(A/N) \cap (K/N)^{xN} = (A/N) \cap (H/N),$$

т.е. A/N изолирует пару $((K/N)^{xN}, H/N)$. Следовательно, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N , причем $N \not\leq \Phi(G)$ и N – нециклическая p -группа. Следовательно, найдется такая максимальная подгруппа M группы G , что $G = [N]M$. Пусть L – подгруппа порядка p из N . Тогда, очевидно,

L не изолирует максимальную пару (M^x, G) при любом $x \in G$. Так как p делит $|G : M|$, существует такой элемент $x \in G$, что L покрывает пару (M^x, G) , и поэтому $LM^x = G$. Следовательно, $|G : M^x| = |G : M| = |L| = |N| = p$. Это противоречие завершает доказательство импликации $(2) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (3)$ Пусть V – произвольная субнормальная подгруппа из G и (K, H) – такая максимальная пара из G , что p делит $|H : K|$. Тогда $|H : K| = p$ и $V \cap H$ субнормальна в H . Следовательно, не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что $H = G$. Тогда K – максимальная подгруппа в G . Предположим, что $V \not\leq K$. Если $K_G \neq 1$, то по индукции VK_G/K_G покрывает $(K/K_G, G/K_G)$. Поэтому $(K_G V/K_G)(K/K_G) = G/K_G$ и, следовательно, $VK = G$, т.е. V покрывает (K, G) . Предположим теперь, что $K_G = 1$. Тогда G – примитивная группа. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Так как $K_G = 1$, то $G = NK$. Так как G p -сверхразрешима и p делит $|N|$, то $|N| = p$. Так как G примитивна, то $C_G(N) = 1$. Следовательно, $G = [N]K$ и $K \simeq G/C_G(N)$ – абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Поэтому K – p' -холлова подгруппа группы G и $|G : K| = p$. Если p не делит $|V|$, то $V \subseteq O_{p'}(G)$, и поэтому $O_{p'}(G) \not\leq K$. Тогда $G = KO_{p'}(G)$, и, следовательно, $|G : K| \neq p$; противоречие. Поэтому p делит $|V|$. Значит,

$$|VK| = |V||K|/|V \cap K| \geq |K|p = |G|,$$

и, следовательно, $VK = G$, т.е. V покрывает (K, G) . Таким образом, $(1) \Rightarrow (3)$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Понятно, что условие (3) сохраняется в любой факторгруппе группы G (см. доказательство импликации $(2) \Rightarrow (1)$). Поэтому в группе G существует лишь единственная минимальная нормальная подгруппа N , $N \not\leq \Phi(G)$ и N – нециклическая p -группа. Следовательно, $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G и $N = C_G(N) = O_p(G)$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа из N . Тогда $L \neq N$ и по условию теоремы L покрывает или изолирует (M, G) . Так как $N \cap M = 1$, то L не изолирует (M, G) . Поэтому L покрывает (M, G) . Следовательно, $ML = G$, и поэтому $|N| = |G : M| \leq |L| < |N|$; противоречие. Следовательно, G p -сверхразрешима.

$(4) \Rightarrow (1)$ Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть E – подгруппа из G и V – $\cap$ -неразложимая подгруппа из E . Тогда по лемме 2.5 найдется такая $\cap$ -неразложимая подгруппа X из G , что $V = E \cap X$. Пусть (K, H) – такая максимальная пара из E , что p делит $|H : K|$. Тогда существует такой элемент $h \in H$, что X покрывает или изолирует (K^h, H) . Если X покрывает пару (K^h, H) , то $XK^h = XH$, поэтому

$$K^h V = K^h (E \cap X) = E \cap X K^h = E \cap X H = H (E \cap X) = H V,$$

т.е. V покрывает (K^h, H) . Если X изолирует пару (K^h, H) , т.е. $X \cap H \leq K^h$, то

$$V \cap H = X \cap E \cap H = X \cap H \leq K^h,$$

т.е. V изолирует (K^h, H) . Таким образом, условие теоремы справедливо для подгрупп группы G . Следовательно, все максимальные подгруппы из G p -сверхразрешимы по выбору группы G .

Пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа из G . Легко видеть, что условие теоремы сохраняется для G/N . Следовательно, G/N p -сверхразрешима по выбору группы G . Так как класс всех p -сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G , $N \not\leq \Phi(G)$ и N – нециклическая p -группа. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G , что $N \not\leq M$. Тогда $G = [N]M$ и $M_G = 1$. Следовательно, $N = C_G(N)$ по [2; А, теорема 15.2] и M p -сверхразрешима.

(а) N – максимальная подгруппа силовой p -подгруппы P группы G .

Прежде покажем, что $N \neq P$. Предположим, что $N = P$ и V – максимальная подгруппа из N . Тогда V – $\cap$ -неразложимая подгруппа в N , поэтому по лемме 2.5 найдется такая $\cap$ -неразложимая подгруппа X из G , что $V = X \cap N$. Тогда $N \not\leq X$. По условию теоремы существует такой элемент $x \in G$, что X покрывает или изолирует (M^x, G) . Если X покрывает (M^x, G) , т.е. $XM^x = G$, то $XM = G$ по лемме 2.3. Поскольку $N = P$, то M – p' -группа, и поэтому $P = N \leq X$. Полученное противоречие показывает, что X изолирует пару (M^x, G) , т.е. $X \leq M^x$. Значит, $V \leq M^x$. Но тогда $V = 1$, а значит, N – циклическая группа. Полученное противоречие показывает, что $N \neq P$. Следовательно, p делит $|M|$. Так как M p -сверхразрешима, в M существует такая максимальная подгруппа E , что $|M : E| = p$. Так как $G = [N]M$, очевидно, $EN \neq G$. Следовательно, EN p -сверхразрешима. Кроме того, $O_{p'}(EN) = 1$, так как $C_G(N) = N$. По лемме 2.7 группа EN сверхразрешима. Следовательно, так как $N = C_G(N)$, силовая p -подгруппа P_1 из EN нормальна в EN . Очевидно также, что P_1 – максимальная подгруппа некоторой силовой p -подгруппы из G . Следовательно, P_1 нормальна в G , так как по лемме 2.3 $PE = G = P^xE$ для любого $x \in G$. Но так как $C_G(N) = N$ и $|O_p(G/N)| = |O_p(M)| = 1$, то $N = P_1$ – максимальная подгруппа в P .

(b) Каждая максимальная подгруппа V из N нормальна в некоторой силовой p -подгруппе из G .

Пусть X – такая $\cap$ -неразложимая подгруппа из G , что $V = X \cap N$. Тогда согласно условию найдется такой элемент $x \in G$, что X покрывает или изолирует (M^x, G) . Если X покрывает (M^x, G) , то выполнено $XM^x = G = XM$ по лемме 2.3. Согласно (а) $|M_p| = p$, где M_p – силовая p -подгруппа из M . Следовательно, каждая силовая p -подгруппа из X является максимальной подгруппой в некоторой силовой p -подгруппе из G . Пусть $V \leq X_p$, где X_p – силовая p -подгруппа из X . Тогда X_p – максимальная подгруппа некоторой силовой p -подгруппы G_p из G . Следовательно, X_p нормальна в G_p . Поэтому $V = N \cap X = N \cap X_p$ нормальна в G_p . Заметим, наконец, что поскольку $V \neq 1$ и $V \leq X$, то X не может изолировать пару (M^x, G) .

(с) Заключительное противоречие.

Пусть E – p' -холлова подгруппа группы M . Тогда $S = NE < G$ p -сверхразрешима. Так как $N = C_G(N)$, то $O_{p'}(S) = 1$. Следовательно, EN сверхразрешима по лемме 2.7. Поэтому некоторая максимальная подгруппа V из N нормальна в S . Кроме того, согласно (b), существует такая силовая p -подгруппа G_p в G , что $G_p \leq N_G(V)$. Следовательно, $G = SG_p \leq N_G(V)$, что противоречит минимальности N . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть G – группа, p – наименьший простой делитель $|G|$. Группа G p -нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая подгруппа из G

условно покрывает или изолирует каждую такую максимальную пару (K, H) из G , что p делит $|H : K|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как p – наименьший простой делитель $|G|$, группа G p -нильпотентна тогда и только тогда, когда G p -сверхразрешима. Следовательно, утверждение следствия прямо следует из теоремы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть G – группа. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G сверхразрешима;
- (2) каждая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G ;
- (3) каждая $\cap$ -неразложимая подгруппа из G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G ;
- (4) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из G условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G ;
- (5) G разрешима и каждая субнормальная подгруппа из G покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 4.1 нам нужно лишь доказать импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (1) По индукции каждая максимальная подгруппа из G сверхразрешима. Поэтому по [1; теорема 26.3] группа G разрешима. Тогда по теореме 4.1 группа G сверхразрешима.

(4) $\Rightarrow$ (1) Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Очевидно, что условие теоремы справедливо для каждой подгруппы из G . Следовательно, G – минимальная несверхразрешимая группа. Поэтому по [1; теорема 26.3] справедливы следующие утверждения:

- (a) G разрешима;
- (b) $G^{\mathcal{U}}$ – силовская p -подгруппа из G для некоторого простого числа p , делящего $|G|$;
- (c) $G^{\mathcal{U}}/\Phi(G^{\mathcal{U}})$ – нециклический главный фактор из G ;
- (d) если $p > 2$, то $G^{\mathcal{U}}$ – группа экспоненты p , а если $p = 2$, то экспонента группы $G^{\mathcal{U}}$ делит 4.

Пусть $P = G^{\mathcal{U}}$ и $X/\Phi(P)$ – подгруппа из $P/\Phi(P)$ порядка p . Пусть $x \in X \setminus \Phi(P)$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$. Тогда согласно гипотезе (4) получаем, что L условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару из G . Так как $\mathcal{U}$ – насыщенная формация и $G/G^{\mathcal{U}}$ сверхразрешима, то $P \not\leq \Phi(G)$. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G , что $PM = G$. Тогда L условно покрывает или изолирует пару (M, G) . Следовательно, существует такой элемент $h \in G$, что L либо покрывает, либо изолирует (M^h, G) . По [2; А, теорема 9.2(e)] имеет место $\Phi(P) \leq \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(P) \leq M^h$. Тогда $G/\Phi(P) = [P/\Phi(P)](M^h/\Phi(P))$. Так как $L \not\leq \Phi(P)$, то $L \not\leq M^h$. Это показывает, что L не изолирует (M^h, G) . Следовательно, $LM^h = LM = G$. Тогда $|P/\Phi(P)| = |G : M| = p$, что противоречит тому, что $P/\Phi(P)$ – нециклический фактор. Таким образом, (4) $\Rightarrow$ (1).

Следуя [16], мы будем использовать символ $Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$ для обозначения произведения всех таких нормальных подгрупп из G , у которых все их нефраттиньевы G -главные факторы являются циклическими.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $X \leq E$ – разрешимые нормальные подгруппы группы G . Предположим, что каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы из X условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G) , где $MX = G$. Если $X = E$ или $X = F(E)$, то $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде предположим, что $X = E$. Предположим, что в этом случае теорема не верна, и пусть (G, E) – контрпример с минимальным $|G||E|$. Прежде покажем, что $E/N \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/N)$ для всякой минимальной нормальной подгруппы N из G , содержащейся в E . Действительно, ввиду выбора группы (G, E) нам нужно только проверить, что условие теоремы справедливо для $(G/N, E/N)$. Пусть N – p -группа, Q/N – силовская q -подгруппа из E/N и V/N – максимальная подгруппа из Q/N . Пусть T/N – такая максимальная подгруппа из G/N , что $(T/N)(E/N) = G/N$. Тогда $TE = G$. Предположим, что $q \neq p$. Тогда $V = NM$ и $Q = NP$, где M – силовская q -подгруппа из V и P – силовская q -подгруппа из Q , содержащая M . Тогда P – силовская q -подгруппа в E , поэтому существует такой элемент $x \in G$, что M покрывает или изолирует пару (T^x, G) . Если $M \leq T^x$, то

$$V/N = NM/N \leq T^x/N = (T/N)^{xN}.$$

В противном случае $MT^x = G$, что влечет $(M/N)(T/N)^{xN} = G/N$. Если $q = p$, то аналогично проверяется, что V/N условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару $(M/N, G/N)$, где $(M/N)(E/N) = G/N$. Поэтому $E/N \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/N)$ для всякой минимальной нормальной подгруппы N из G , содержащейся в E . Следовательно, $N \not\leq \Phi(G)$ и $|N| > p$ по выбору (G, E) .

Пусть M – такая максимальная подгруппа в G , что $N \not\leq M$. Тогда $G = [N]M$ и $E = [N](E \cap M)$. Пусть W – силовская p -подгруппа из $E \cap M$, V – максимальная подгруппа в NW , содержащая W . Тогда по условию теоремы V условно покрывает или изолирует пару (M, G) . Если $VM^x = G$ для некоторого $x \in G$, то $VM = G$ по лемме 2.3, поэтому

$$|G| = |VM| = |V||M| : |V \cap M| = |V||M| : |W| < |N||M| = |G|,$$

что невозможно. Следовательно, $V \leq M^x$ для всякого $x \in G$. Значит, $V \leq M_G$, и поэтому $V \cap N = 1$. Поэтому $|N| = p$; противоречие. Это противоречие показывает, что в случае, когда $X = E$, теорема верна.

Предположим теперь, что $X = F(E)$. Предположим, что в этом случае теорема не верна, и пусть (G, E) – контрпример с минимальным $|G||E|$. Пусть $F = F(E)$ и P – силовская p -подгруппа из F , где p делит $|F|$.

(1) $P \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$ и $E/P \not\leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/P)$.

Так как P является характеристической подгруппой в F и F является характеристической подгруппой в E , то P нормальна в G . Следовательно, как и в случае $X = E$, получаем, что $P \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$. Поэтому $E/P \not\leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/P)$, так как в противном случае $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$, что противоречит выбору (G, E) .

(2) Если L – минимальная нормальная подгруппа в G и $L \leq P$, то $|L| > p$.

Предположим, что $|L| = p$. Пусть $C_0 = C_E(L)$. Тогда условие теоремы справедливо для $(G/L, C_0/L)$. Действительно, так как $F \leq C_0$ и $L \leq Z(F)$, то $F(C_0/L) = F/L$. Кроме того, как и в случае, когда $X = E$, можно доказать, что если M/L – такая максимальная подгруппа в G/L , что $(F/L)(M/L) = G/L$, Q/L – силовская

q -подгруппа из F/L и V/L – максимальная подгруппа из Q/L , то V/L условно покрывает или изолирует $(M/L, G/L)$. Следовательно, согласно выбору (G, E) имеет место $C_0/L \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/L)$, откуда ввиду G -изоморфизма $C_G(L)E/C_G(L) \simeq E/C_0$ получаем, что $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$. Полученное противоречие показывает, что имеет место (2).

(3) $\Phi(G) \cap P \neq 1$.

Предположим, что $\Phi(G) \cap P = 1$, и пусть L – минимальная нормальная подгруппа в G , содержащаяся в P . Пусть M – такая максимальная подгруппа из G , что $G = [L]M$. Пусть $P_1 = P \cap M$. Тогда $P = LP_1$ и $|P : P_1| = |N|$. Пусть V – максимальная подгруппа из P , содержащая P_1 . Тогда $L \not\leq V$ и по условию V условно покрывает или изолирует (M, G) . Если $V \leq M^x$ для всякого $x \in G$, то $V \cap N = 1$, поэтому $|L| = p$, что противоречит (2). Следовательно, $G = VM^x$ для всякого $x \in G$, поэтому $G = VM$ по лемме 2.3. Но тогда

$$|L| = |G : M| = |V||M| : |P_1||M| < |L|.$$

Это противоречие показывает, что $\Phi(G) \cap P \neq 1$.

Заключительное противоречие. Согласно (3), в G существует такая минимальная нормальная подгруппа L , что $L \leq \Phi(G) \cap P$. Тогда $F(E/L) = F/L$ по [2; А, теорема 9.3(с)]. Поэтому условие теоремы справедливо для $(G/L, E/L)$, и поэтому $E/L \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G/L)$ по выбору группы G . Но тогда $E \leq Z_{\mathcal{U}\Phi}(G)$, так как $L \leq \Phi(G)$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G , что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовой подгруппы из E условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G) , где $ME = G$, то G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.6 (Эскуэрро [11]). Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G , что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовой подгруппы из E является CAP-подгруппой в E , то G сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из следствия 4.5 и леммы 2.10.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G , что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовой подгруппы из $F(E)$ условно покрывает или изолирует каждую максимальную пару (M, G) , где $MF(E) = G$, то G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 4.8 (Эскуэрро [11]). Пусть E – такая разрешимая нормальная подгруппа группы G , что G/E сверхразрешима. Если каждая максимальная подгруппа каждой силовой подгруппы из $F(E)$ является CAP-подгруппой в E , то G сверхразрешима.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

- [2] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [3] O. Ore, “Contributions in the theory of groups of finite order”, *Duke Math. J.*, **5**:2 (1939), 431–460.
- [4] S. E. Stonehewer, “Permutable subgroups in Infinite Groups”, *Math. Z.*, **125** (1972), 1–16.
- [5] A. Ballester-Bolinchés, L. M. Ezquerro, A. N. Skiba, “Local embeddings of some families of subgroups of finite groups”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **25**:6 (2009), 869–882.
- [6] A. Ballester-Bolinchés, L. M. Ezquerro, A. N. Skiba, “Subgroups of finite groups with a strong cover-avoidance property”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **79**:3 (2009), 499–506.
- [7] D. L. Johnson, “A note on supersoluble groups”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 562–564.
- [8] H. G. Bray, W. E. Deskins, D. Johnson, J. F. Humphreys, B. M. Puttaswamaiah, P. Venzke, G. L. Walls, *Between Nilpotent and Solvable*, ed. M. Weinstein, Polygonal Publ. House, Washington, NJ, 1982.
- [9] W. Guo, *The Theory of Classes of Groups*, Math. Appl., **505**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [10] X. Guo, K. P. Shum, “Cover-avoidance properties and the structure of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2-3 (2003), 297–308.
- [11] L. M. Ezquerro, “A contribution to the theory of finite supersolvable groups”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **89** (1993), 161–170.
- [12] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Die Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [13] H. Wielandt, *Subnormal subgroups and permutation groups*, Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
- [14] Y. Fan, X. Y. Guo, K. P. Shum, “Remarks on two generalizations of normality of subgroups”, *Chinese J. Contemp. Math.*, **27**:2 (2006), 139–146.
- [15] Y. Wang, “ c -normality of groups and its properties”, *J. Algebra*, **180**:3 (1996), 954–965.
- [16] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, “On the $\mathcal{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups”, *J. Algebra*, **322**:6 (2009), 2106–2117.

Юфэнг Лиу

Shandong Institute of Business and Technology, Китай

E-mail: yfliu65@163.com

Поступило

22.02.2010

Исправленный вариант

14.01.2013

Вэньбинь Го

University of Science and Technology of China, Китай

E-mail: wbguo@ustc.edu.cn

В. А. Ковалева

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: vika.kovalyova@rambler.ru

А. Н. Скиба

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: alexander.skiba49@gmail.com