Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, Группа асинхронных автоматов и рациональные гомеоморфизмы множества Кантора, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 680–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:08:43

УДК 512

ГРУППА АСИНХРОННЫХ АВТОМАТОВ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ МНОЖЕСТВА КАНТОРА

Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич

Определена группа асинхронных автоматов и установлены основные ее свойства. Доказана вложимость многих известных групп в эту группу. Установлена независимость изоморфного типа этой группы от алфавита, что позволило определить группу рациональных гомеоморфизмов множества Кантора. Даны приложения группы асинхронных автоматов к теории динамических систем.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Группы конечных автоматов были определены в [1] в рамках исследований, проводимых в научной школе академика Глушкова, который предсказал их важное значение для теории групп, в частности для проблем бернсайдового типа [2]. В дальнейшем эта гипотеза блестяще подтвердилась, а именно, в этом классе групп были обнаружены самые простые примеры бесконечных конечно порожденных периодических групп [3]–[6], вопрос о существовании которых ставился Бернсайдом; был дан ответ на вопрос Милнора о существовании групп промежуточного роста [7], решена проблема Е. Зельманова о группах конечной ширины [8], получены новые результаты о спектрах бесконечных графов и групп [9], [10].

Однако упомянутые выше группы являются финитно-аппроксимируемыми, и это сужает область применяемых методов и спектр получаемых результатов.

Цель этой заметки – на базе понятия асинхронного автомата, теории которого в значительной степени посвящена монография С. Эйленберга [11], определить более широкие классы групп и полугрупп автоматов, лишенные феномена финитной аппроксимируемости, и отметить основные их свойства. В группу асинхронных автоматов вкладываются многие группы, играющие важную роль в теории групп и ее приложениях, например группы Р. Томпсона V , T и F (первые две из которых являются бесконечными конечно определенными простыми группами, а третья знаменита своим свойством быть конечно определенной группой без свободных подгрупп и без соотношений) [12].

В конце заметки мы отмечаем важность группы конечных асинхронных автоматов для теории динамических систем, интерпретируя ее как группу рациональных гомеоморфизмов множества Кантора.

Более подробное изложение указанных вопросов дано в [13].

2. Пространство последовательностей и асинхронные автоматы. Пусть X – конечное множество (алфавит), причем $|X| > 1$. Символом X^* мы будем обозначать свободный моноид, порожденный множеством X , элементы которого мы отождествляем с конечными словами (включая пустое слово $\emptyset$).

Слово $w \in X^*$ является *началом* или *префиксом* слова $u \in X^*$, если $u = wv$ для некоторого $v \in X^*$.

Множество всех бесконечных последовательностей (бесконечных слов) вида $x_1x_2x_3 \dots$, где $x_i \in X$, обозначим X^ω .

В пространстве X^ω вводится тихоновская топология, делающая это пространство гомеоморфным множеству Кантора. Таким образом, топологический тип этого пространства не зависит от алфавита X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенной последовательностной машиной* или *асинхронным автоматом* называется набор $A = \langle X, Y, Q, \pi, \lambda, q_0 \rangle$, где

X – входной алфавит;

Y – выходной алфавит, $|Y| > 1$;

Q – множество (*множество внутренних состояний автомата*);

$\pi: X \times Q \rightarrow Q$ – отображение (*функция перехода*);

$\lambda: X \times Q \rightarrow Y^*$ – отображение (*функция выхода*);

$q_0 \in Q$ – фиксированный элемент (*начальное состояние*).

Асинхронный автомат A называется *конечным*, если $|Q| < \infty$.

В синхронном автомате функция выхода λ принимает значения в множестве Y , а не в Y^* . Таким образом, синхронные автоматы на каждую входную букву отвечают буквой на выходе, тогда как асинхронные автоматы могут выдавать на выход любое конечное слово, в частности и пустое (см. [11]).

Функции λ, π можно продолжить на множество конечных слов следующими рекуррентными правилами:

$$\begin{aligned}\lambda(\emptyset, q) &= \emptyset, & \lambda(xw, q) &= \lambda(x, q)\lambda(w, \pi(x, q)), \\ \pi(\emptyset, q) &= q, & \pi(xw, q) &= \pi(w, \pi(x, q)),\end{aligned}$$

где $x \in X, q \in Q$ и $w \in X^*$ – произвольные элементы.

Асинхронный автомат называется *невыврожденным* (*почти положительным*), если для любого его состояния $q \in Q$ существует лишь конечное множество слов $w \in X^*$, для которых слово $\lambda(w, q)$ пусто.

Если автомат невыврожденный, то предыдущие рекуррентные формулы определяют значения $\lambda(w, q) \in Y^\omega$ для бесконечных слов $w \in X^\omega$.

Мы говорим, что отображение $f: X^\omega \rightarrow Y^\omega$ определяется автоматом A , если $f(w) = \lambda(w, q_0)$ для каждого $w \in X^\omega$. Два автомата, определяющие одно отображение, называются *эквивалентными*. Эквивалентные автоматы отождествляются.

Для двух автоматов A_1, A_2 , определяющих f_1, f_2 и таких, что выходной алфавит A_1 совпадает с входным алфавитом A_2 , их *произведением* (*суперпозицией*) называется автомат, определяющий суперпозицию отображений f_1, f_2 (такой автомат существует).

Отображения, определяемые асинхронными автоматами, имеют следующее описание.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $f: X^\omega \rightarrow Y^\omega$ является непрерывным тогда и только тогда, когда оно определяется некоторым невырожденным асинхронным автоматом.*

В общем случае, автомат, определяющий непрерывное отображение, является бесконечным.

Таким образом, множество всех асинхронных автоматов с входным и выходным алфавитом X образует полугруппу относительно суперпозиции. Эту полугруппу мы будем называть *полугруппой асинхронных автоматов* и обозначать $\mathcal{C}(X^\omega)$. В силу предложения 1 полугруппы асинхронных автоматов для разных алфавитов X изоморфны и совпадают с полугруппой непрерывных отображений множества Кантора.

Если отображение $f: X^\omega \rightarrow Y^\omega$, определенное некоторым асинхронным автоматом, биективно, то и обратное отображение f^{-1} тоже определяется некоторым асинхронным автоматом. Поэтому множество всех биективных отображений, определенных асинхронными автоматами с входным и выходным алфавитом X , образует группу. Эту группу мы называем *группой асинхронных автоматов* и обозначаем $\mathcal{H}(X^\omega)$. Она также не зависит от X , так как изоморфна группе гомеоморфизмов канторовского множества. Более того, для любых двух алфавитов X и Y существует конечный автомат $R_{X,Y}$ с входным алфавитом X и выходным алфавитом Y , сопрягающий группы $\mathcal{H}(X^\omega)$, $\mathcal{H}(Y^\omega)$ (а также полугруппы $\mathcal{C}(X^\omega)$, $\mathcal{C}(Y^\omega)$). Таким образом, можно ввести обозначения $\mathcal{C}$ и $\mathcal{H}$, не зависящие от алфавита.

Частичным асинхронным автоматом называется автомат, в котором функция выходов может быть частично определенной (см. [11]). Для частичных автоматов аналогично определяется их действие на бесконечных словах, при этом соответствующие отображения будут частично определенными. Таким образом, можно ввести полугруппу частичных автоматов и псевдогруппу частично определенных биективных автоматов (понятие псевдогруппы обсуждается, например, в [14]).

3. Конечные автоматы и группа рациональных гомеоморфизмов. Непрерывные отображения, определяемые конечными асинхронными автоматами, будем называть *рациональными*. Они имеют следующую простую характеристику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $w \in X^*$ – конечное слово. *Ограничением* непрерывного отображения $f: X^\omega \rightarrow X^\omega$ в слове w называется отображение $f|_w: X^\omega \rightarrow X^\omega$, определенное равенством

$$f(wu) = v f|_w(u),$$

где $v \in X^*$ – наибольшее общее начало слов $\{f(wu) : u \in X^\omega\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Непрерывное отображение $f: X^\omega \rightarrow X^\omega$ определено некоторым невырожденным асинхронным автоматом тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число разных ограничений.*

ТЕОРЕМА 1. *Суперпозиция двух конечных автоматов снова является конечным автоматом.*

Если конечный асинхронный автомат определяет биективное отображение пространства бесконечных последовательностей, то обратное отображение тоже определяется конечным автоматом.

Таким образом, множество всех конечных автоматов образует полугруппу относительно суперпозиции. Эту полугруппу мы называем *полугруппой конечных асинхронных автоматов* и обозначаем $\mathcal{F}(X^\omega)$.

Из теоремы 1 также следует, что множество всех конечных асинхронных автоматов, определяющих биективные отображения, является группой относительно суперпозиции. Эту группу мы называем *группой конечных асинхронных автоматов* и обозначаем $\mathcal{Q}(X^\omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Изоморфные типы группы $\mathcal{Q}(X^\omega)$ и полугруппы $\mathcal{F}(X^\omega)$ не зависят от алфавита X ($|X| > 1$). Более того, группы $\mathcal{Q}(X^\omega)$, $\mathcal{Q}(Y^\omega)$ и полугруппы $\mathcal{F}(X^\omega)$, $\mathcal{F}(Y^\omega)$ сопряжены с помощью автомата $R_{X,Y}$.*

Сформулированное утверждение показывает, что естественным образом определены *полугруппа рациональных непрерывных отображений* и *группа рациональных гомеоморфизмов* множества Кантора, которые мы обозначаем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *В группе $\mathcal{Q}$ и полугруппе $\mathcal{F}$ разрешима проблема равенства.*

Таким образом, автоматически получаем разрешимость проблемы слов для групп, вложимых в $\mathcal{Q}$.

4. Применение к динамическим системам и примеры. Заметим, что в отличие от групп асинхронных автоматов группы синхронных автоматов зависят от мощности алфавита. Все они вкладываются в $\mathcal{H}$. Более того, $\mathcal{H}$ содержит произвольную счетную финитно-аппроксимируемую группу. И в то же время $\mathcal{Q}$ содержит много конечно порожденных финитно-аппроксимируемых подгрупп с необычными свойствами, отмеченными во введении.

Сама группа $\mathcal{Q}$ не является финитно-аппроксимируемой, ибо в нее вкладываются группы Ричарда Томпсона, не являющиеся финитно-аппроксимируемыми. В качестве примера, укажем автоматы над алфавитом $X = \{0, 1\}$, соответствующие двум стандартным образующим a, b группы Томпсона F .

На диаграмме состояния изображены окружностями, каждая стрелка от состояния q_1 к состоянию q_2 , помеченная меткой $x|w$, соответствует соотношениям $\pi(x, q_1) = q_2$ и $\lambda(x, q_1) = w$. Автомат с начальным состоянием a и автомат с начальным состоянием b соответствуют стандартным образующим группы Томпсона F .

Так как $V = \langle a, b, c \rangle$, где автомат s меняет только первый символ последовательности на противоположный, получаем вложение V в $\mathcal{Q}$. Так же просто строится вложение T в $\mathcal{Q}$.

Группа F является примером группы кусочно линейных гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$. Многие другие подгруппы группы кусочно линейных гомеоморфизмов вещественной прямой, впервые рассмотренной в [15], вложимы в $\mathcal{H}$ и даже в $\mathcal{Q}$.

Автоматы играют важную роль в теории динамических систем. Общеизвестны их применения к сдвигам конечного типа и софическим системам [16]. Новые приложения связаны с исследованием стабильных по Ляпунову аттракторов, а также унимодальных отображений, что приводит к изучению так называемых adding machine, которые в регулярном случае определяются конечными автоматами [17], [18], а также к исследованию групповых действий на сферически однородных корневых деревьях [13].

Преобразования, индуцированные асинхронным автоматом, имеют нулевую энтропию, в то время как с помощью асинхронных автоматов получаются примеры преобразований с положительной энтропией. Например, односторонний сдвиг Бернулли над алфавитом $\{0, 1\}$ задается автоматом

где s — начальное состояние.

Если отождествить бесконечную в обе стороны последовательность $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ букв алфавита X с последовательностью

$$(x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, x_{-3}, x_3, \dots, x_{-n}, x_n, \dots),$$

то двусторонний сдвиг Бернулли при таком отождествлении соответствует некоторому преобразованию пространства X^ω , которое также определяется конечным асинхронным автоматом. Таким образом, двусторонний сдвиг Бернулли топологически сопряжен некоторому рациональному гомеоморфизму. Централизатор этого гомоморфизма во всей группе гомеоморфизмов множества Кантора состоит из рациональных автоморфизмов и изоморфен группе автоморфизмов полного сдвига (см. [16]).

Справедливо и более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Группа автоморфизмов произвольного сдвига конечного типа изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathcal{Q}$.*

Минимальная динамическая система (система Вершика–Брателли), построенная по регулярной диаграмме Брателли, также моделируется подходящим конечным асинхронным автоматом.

ПРОБЛЕМА. Дать топологическую классификацию рациональных отображений множества Кантора.

Авторы выражают благодарность Патрику Дэрнуа за интерес к работе и В. И. Сушанскому за полезные обсуждения и помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ноёеіш Ж. Преобразования определенные конечными автоматами // Проблемы кибернетики. 1963. Т. 9. С. 23–26.
- [2] Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов // УМН. 1961. Т. 16. № 5. С. 3–62.
- [3] Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 5. С. 319–328.
- [4] Сушанский В. И. Периодические p -группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 3. С. 557–562.
- [5] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прилож. 1980. № 14. С. 41–43.
- [6] Gupta N., Sidki S. On the Burnside problem for periodic groups // Math. Z. 1982. № 182. P. 385–388.
- [7] Григорчук Р. И. Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР Сер. матем. 1984. № 5. С. 939–985.
- [8] Bartholdi L., Grigorchuk R. I. Lie methods in growth of groups and groups of finite width // Preprint, 1998.
- [9] Bartholdi L., Grigorchuk R. I. On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups // Preprint, 1999.
- [10] Grigorchuk R. I., Żuk A. The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton and its spectrum. Preprint of FIM ETH–Zürich, 1999.
- [11] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. V. A. New York–London: Acad. Press, 1974.
- [12] Cannon J. W., Floyd W. I., Parry W. R. Introductory notes on Richard Thompson groups // L'Enseignement Mathématique. 1996. V. 42. № 2. P. 215–256.
- [13] Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сушанский В. И. Динамические системы, автоматы и бесконечные группы (в печати).
- [14] де ля Арп Р., Григорчук Р. И., Чекерини-Сильберстайн Т. Аменабельность и парадоксальные разбиения псевдогрупп и дискретных метрических пространств // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 68–111.
- [15] Chehata C. G. An algebraically simple ordered group // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. P. 183–197.
- [16] Kitchens B. P. Symbolic Dynamics. Berlin: Springer, 1998.
- [17] Bass H., Otero-Espinar M., Rockmore D., Tresser C. P. L. Cyclic renormalization and the automorphism groups of rooted trees // Lecture Notes in Math. V. 1621. Berlin: Springer, 1995.
- [18] Buescu J., Stewart I. Liapunov stability and adding machines // Erg. Th. and Dynam. Systems. 1995.