Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. О. Касьянов, Многозначная динамика решений автономного дифференциально-операторного уравнения с псевдомонотонной нелинейностью, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 225–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:40:05

Многозначная динамика решений автономного дифференциально-операторного уравнения с псевдомонотонной нелинейностью

П. О. Касьянов

Рассматривается нелинейное автономное дифференциально-операторное уравнение с псевдомонотонной зависимостью между определяющими параметрами задачи. Изучена динамика всех слабых решений, определенных на положительной полуоси времени. Доказано существование траекторного и глобально-го аттракторов. Исследована их структура. В качестве одного из возможных приложений рассмотрен класс нелинейных параболических уравнений высокого порядка.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Постановка задачи. В работе изучается предельное поведение при времени $t \rightarrow +\infty$ решений общих нелинейных эволюционных уравнений первого порядка вида

$$y'(t) + A(y(t)) = f, \quad (1.1)$$

Предполагается, что нелинейный оператор $A: V \rightarrow V^*$, действует в банаховом пространстве V , которое является рефлексивным и сепарабельным, причем для некоторого гильбертова пространства H справедливы вложения $V \subseteq H \equiv H \subset V^*$. Предполагается, что $f \in H$, а нелинейный оператор A является псевдомонотонным и удовлетворяет условиям диссипативности вида

$$\langle A(u), u \rangle_V \geq \alpha \|u\|_V^p - \beta \quad \forall u \in V, \quad (1.2)$$

где $p \geq 2$, $\alpha, \beta > 0$, и связанным с ним условиям степенного роста вида

$$\|A(u)\|_{V^*} \leq c(1 + \|u\|_V^{p-1}) \quad \forall u \in V \quad (1.3)$$

для некоторого $c > 0$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_V: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ – спаривание в $V^* \times V$, совпадающее на $H \times V$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в гильбертовом пространстве H .

Под *слабым решением* дифференциально-операторного уравнения (1.1) на отрезке $[\tau, T]$ понимаем элемент u пространства $L_p(\tau, T; V)$ такой, что

$$\forall \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V) \quad - \int_\tau^T (\xi'(t), u(t)) dt + \int_\tau^T \langle A(u(t)), \xi(t) \rangle_V dt = \int_\tau^T (f, \xi(t)) dt. \quad (1.4)$$

К виду (1.1) сводятся многие эволюционные уравнения с частными производными в области Ω , в которых старшая часть является нелинейным монотонным дифференциальным оператором степени p и в котором могут присутствовать младшие (уже немонотонные) слагаемые, с подчиненным ростом нелинейности. В этом случае пространство V является пространством Соболева соответствующего порядка, а пространство $H = L_2(\Omega)$. Такие уравнения весьма часто используются при описании сложных эволюционных процессов в различных моделях физики и механики.

Для уравнений вида (1.1) имеется хорошо разработанная техника построения глобальных (т.е. заданных при всех $t \geq 0$) слабых решений $y(t)$, $t \geq 0$, из пространства $L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$, причем $y'(\cdot) \in L_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^*)$ (здесь $1/p + 1/q = 1$). Известно, что такие слабые решения $y(t)$ являются непрерывными функциями со значениями в H , т.е. $y(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; H)$.

Задача заключается в изучении асимптотического поведения при $t \rightarrow +\infty$ семейств слабых решений $\{y(t)\}$ уравнения (1.1) по норме H при условии, что начальные данные $\{y(0)\}$ образуют ограниченное множество в H .

Отметим, что при выполнении дополнительных условий для нелинейного оператора $A(u)$, которые обеспечивают однозначную разрешимость для уравнения (1.1) задачи Коши $y|_{t=0} = y_0$ при любых $y_0 \in H$, в рассматриваемом классе слабых решений имеется весьма богатая и плодотворная теория динамических полугрупп и их глобальных аттракторов в бесконечномерных фазовых пространствах. Эта теория успешно развивается более тридцати лет, и основы ее были заложены в работах Ладыженской, Бабина, Вишика, Хейла, Темама и других известных математиков [1]–[6].

Задача существенно усложняется, если у соответствующей задачи Коши нет однозначной разрешимости или доказательство подобной теоремы не известно, отсутствует, затруднено и т.п. Такая ситуация часто возникает в сложных математических моделях. В этом случае “классический” метод однозначных полугрупп и глобальных аттракторов напрямую не применим. Однако известны два подхода к изучению динамики соответствующих слабых решений. Первый метод основан на теории многозначных полугрупп, и он разработан в пионерских работах Бабина и Вишика (см., например, [7]). Второй подход использует метод траекторных аттракторов, он был предложен в работах Чепыжова и Вишика [8], [9], а также независимо в работах Селла [10].

Новизна данной работы заключается в применении этих двух подходов при изучении асимптотического поведения слабых решений уравнения вида (1.1) с общим нелинейным псевдомонотонным оператором $A(u)$ без условий, гарантирующих единственность задачи Коши.

В работе доказана теорема о существовании глобального аттрактора $\mathcal{A}$ в пространстве H для многозначной полугруппы, отвечающей уравнению (1.1), а также доказана теорема о существовании траекторного аттрактора $\mathcal{P}$ в пространстве $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ для соответствующей полугруппы трансляций в пространстве всех слабых траекторий (слабых решений на полупрямой) уравнения (1.1). Описана структура глобального и траекторного аттракторов, а также установлена простая связь между этими аттракторами.

2. Предварительные результаты. Для фиксированных $\tau < T$ рассмотрим

$$\begin{aligned} X_{\tau,T} &= L_p(\tau, T; V), & X_{\tau,T}^* &= L_q(\tau, T; V^*), & W_{\tau,T} &= \{u \in X_{\tau,T} \mid u' \in X_{\tau,T}^*\}, \\ \mathcal{A}_{\tau,T}: X_{\tau,T} &\rightarrow X_{\tau,T}^*, & \mathcal{A}_{\tau,T}(y)(t) &= A(y(t)) \quad \text{для почти всех (п.в.) } t \in (\tau, T), \\ f_{\tau,T} &\in X_{\tau,T}^*, & f_{\tau,T}(t) &= f \quad \text{для п.в. } t \in (\tau, T), \end{aligned}$$

где u' – производная элемента $u \in X_{\tau,T}$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}([\tau, T]; V^*)$ (см., например, [11; определение IV.1.10, с. 168]), $q > 1$ такое, что выполнено $1/p + 1/q = 1$. Отметим, что пространство $W_{\tau,T}$ является рефлексивным банаховым пространством с нормой графика производной (см., например, [12; утверждение 4.2.1, с. 291]):

$$\|u\|_{W_{\tau,T}} = \|u\|_{X_{\tau,T}} + \|u'\|_{X_{\tau,T}^*}, \quad u \in W_{\tau,T}. \quad (2.1)$$

Из [14; лемма 7, с. 516] (см. также [13; теорема 2.2, с. 7–11] и ссылки там¹) и условий на оператор A следует, что $\mathcal{A}_{\tau,T}: X_{\tau,T} \rightarrow X_{\tau,T}^*$ удовлетворяет следующим условиям:

(B₁) существует $C_1 > 0$ такая, что

$$\forall y \in X_{\tau,T} \quad \|\mathcal{A}_{\tau,T}(y)\|_{X_{\tau,T}^*} \leq C_1(1 + \|y\|_{X_{\tau,T}}^{p-1});$$

(B₂) существуют $C_2, C_3 > 0$ такие, что

$$\forall y \in X_{\tau,T} \quad \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y), y \rangle_{X_{\tau,T}} \geq C_2 \|y\|_{X_{\tau,T}}^p - C_3;$$

(B₃) оператор $\mathcal{A}_{\tau,T}: X_{\tau,T} \rightarrow X_{\tau,T}^*$ псевдомонотонный на $W_{\tau,T}$, т.е. из того, что $y_n \rightarrow y$ слабо в $W_{\tau,T}$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_n), y_n - y \rangle_{X_{\tau,T}} \leq 0$$

следует, что

$$\forall \omega \in X_{\tau,T} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_n), y_n - \omega \rangle_{X_{\tau,T}} \geq \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y), y - \omega \rangle_{X_{\tau,T}}.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_{\tau,T}}: X_{\tau,T}^* \times X_{\tau,T} \rightarrow \mathbb{R}$ – спаривание в $X_{\tau,T}^* \times X_{\tau,T}$, совпадающее на $L_2(\tau, T; H) \times X_{\tau,T}$ со скалярным произведением в $L_2(\tau, T; H)$, т.е.

$$\forall u \in L_2(\tau, T; H) \quad \forall v \in X_{\tau,T} \quad \langle u, v \rangle_{X_{\tau,T}} = \int_{\tau}^T (u(t), v(t)) dt.$$

Заметим также (см. [11; теорема IV.1.17, с. 177]), что вложение $W_{\tau,T} \subset C([\tau, T]; H)$ непрерывно и плотно, более того,

$$\forall u, v \in W_{\tau,T} \quad (u(T), v(T)) - (u(\tau), v(\tau)) = \int_{\tau}^T [\langle u'(t), v(t) \rangle_V + \langle v'(t), u(t) \rangle_V] dt. \quad (2.2)$$

Из определения производной в смысле $\mathcal{D}([\tau, T]; V^*)$ и равенства (1.4) непосредственно следует такое утверждение.

¹ Отметим, что в силу [13; лемма 5.3] требуемая в [13; теорема 2.2] измеримость оператора A непосредственно следует из его деминепрерывности, что в свою очередь следует из псевдомонотонности, ограниченности A и рефлексивности V^* . На самом деле, анализируя доказательство [13; теорема 2.2, с. 7–11], можно прийти к выводу, что условие измеримости A в “автономном” случае можно не накладывать в принципе.

ЛЕММА 1. Каждое слабое решение $u \in X_{\tau,T}$ дифференциально-операторного уравнения (1.1) на отрезке $[\tau, T]$ принадлежит пространству $W_{\tau,T}$. Более того,

$$u' + \mathcal{A}_{\tau,T}(u) = f_{\tau,T}. \quad (2.3)$$

Наоборот, если $u \in W_{\tau,T}$ удовлетворяет (2.3), то u является слабым решением (1.1) на $[\tau, T]$.

Существование слабого решения задачи Коши (1.1) с начальным условием

$$y(\tau) = y_\tau \quad (2.4)$$

на отрезке $[\tau, T]$ для произвольного $y_\tau \in H$ гарантируют условия (B₁)–(B₃), [15; замечание 2.7.12, с. 253], [15; с. 335] и [15; теорема 3.1.1, с. 329]. Таким образом, имеет место следующий результат.

ЛЕММА 2. Для любых $\tau < T$, $y_\tau \in H$ задача Коши (1.1), (2.4) имеет слабое решение на отрезке $[\tau, T]$. Более того, каждое слабое решение $u \in X_{\tau,T}$ задачи Коши (1.1), (2.4) на отрезке $[\tau, T]$ принадлежит $W_{\tau,T} \subset C([\tau, T]; H)$ и удовлетворяет (2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $W_{\tau,T} \subset C([\tau, T]; H)$, то для каждого слабого решения задачи (1.1) в силу леммы 1 начальное условие (2.4) имеет смысл.

Для фиксированных $\tau < T$ введем обозначение

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) = \{u(\cdot) \mid u - \text{слабое решение (1.1) на } [\tau, T], u(\tau) = u_\tau\}, \quad u_\tau \in H.$$

Из леммы 2 следует, что $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) \neq \emptyset$ и

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau) \subset W_{\tau,T} \quad \forall \tau < T, \quad u_\tau \in H.$$

Завершим этот пункт проверкой того, что трансляция и конкатенация слабых решений является также слабым решением.

ЛЕММА 3. Если $\tau < T$, $u_\tau \in H$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau)$, то

$$v(\cdot) = u(\cdot + s) \in \mathcal{D}_{\tau-s, T-s}(u_\tau) \quad \forall s.$$

Если $\tau < t < T$, $u_\tau \in H$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau,t}(u_\tau)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{D}_{t,T}(u(t))$, то

$$z(s) = \begin{cases} u(s), & s \in [\tau, t], \\ v(s), & s \in [t, T], \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{D}_{\tau,T}(u_\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения решения (1.4), леммы 1 и того, что $z \in W_{\tau,T}$, как только $v \in W_{\tau,t}$, $u \in W_{t,T}$ и $v(t) = u(t)$. При доказательстве последнего можно использовать определение производной в смысле $\mathcal{D}([\tau, T]; V^*)$, (2.2) и [11; лемма IV.1.12, с. 174] про плотность $C^1([t_1, t_2]; V)$ в W_{t_1, t_2} для $t_1 < t_2$.

3. Дополнительные свойства решений. Доказательство существования компактного глобального и траекторного аттрактора уравнений типа (1.1) как правило опирается на свойства совокупности слабых решений задачи (1.1), связанных с абсорбируемостью порожденного m -полупотока решений и его асимптотической компактностью (см., например, работы [1]–[10], [16]–[18] и ссылки там). Следующая лемма про априорные оценки решений и теорема 1 про зависимость решений от начальных данных будут играть ключевую роль при исследовании динамики решений задачи (1.1) при $t \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 4. *Существуют $c_4, c_5, c_6, c_7 > 0$ такие, что для любого конечного интервала времени $[\tau, T]$ каждое слабое решение u задачи (1.1) на $[\tau, T]$ удовлетворяет оценкам: для любых $t \geq s$, $t, s \in [\tau, T]$,*

$$\|u(t)\|_H^2 + c_4 \int_s^t \|u(\xi)\|_V^p d\xi \leq \|u(s)\|_H^2 + c_5(1 + \|f\|_H^2)(t - s), \quad (3.1)$$

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u(s)\|_H^2 e^{-c_6(t-s)} + c_7(1 + \|f\|_H^2). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартным образом следует из условий на параметры задачи (1.1) и леммы Гронуолла–Беллмана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\tau < T$, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ – произвольная последовательность слабых решений (1.1) на $[\tau, T]$ такая, что $u_n(\tau) \rightarrow \eta$ слабо в H . Тогда существуют $\{u_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{u_n\}_{n \geq 1}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau, T}(\eta)$ такие, что*

$$\forall \varepsilon \in (0, T - \tau) \quad \max_{t \in [\tau + \varepsilon, T]} \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_H \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполняются условия теоремы 1. Тогда вследствие леммы 1 для любого $n \geq 1$ $u_n(\cdot) \in W_{\tau, T} \subset C([\tau, T]; H)$. Более того, из леммы 4 и соотношения (2.3) получим, что

$$\exists C > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \|u_n\|_{X_{\tau, T}} + \|u'_n\|_{X_{\tau, T}^*} + \|u_n\|_{C([\tau, T]; H)} \leq C. \quad (3.4)$$

Отсюда, из непрерывности вложения $W_{\tau, T} \subset C([\tau, T]; H)$ [11; теорема IV.1.17, с. 177], из условия (B₁), из компактности вложений $V \subset H$ и $W_{\tau, T} \subset L_2(\tau, T; H)$ (см. [15; теорема 1.5.1, с. 70]), а также из рефлексивности пространства $W_{\tau, T}$ с нормой графика производной (2.1) следует, что с точностью до подпоследовательности $\{u_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{u_n\}_{n \geq 1}$ для некоторых $u \in W_{\tau, T}$, $d \in X_{\tau, T}^*$ имеют место такие сходимости:

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u && \text{слабо в } X_{\tau, T}, \\ u'_{n_k} &\rightarrow u' && \text{слабо в } X_{\tau, T}^*, \\ \mathcal{A}_{\tau, T}(u_{n_k}) &\rightarrow d && \text{слабо в } X_{\tau, T}^*, \\ u_{n_k} &\rightarrow u && \text{слабо в } C([\tau, T]; H), \\ u_{n_k} &\rightarrow u && \text{в } L_2(\tau, T; H), \\ u_{n_k}(t) &\rightarrow u(t) && \text{в } H \text{ для п.в. } t \in (\tau, T), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Завершим доказательство теоремы в несколько “шагов”.

Шаг 1. Докажем, что

$$\forall t \in (\tau, T] \quad u_{n_k}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{в } H, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

Из леммы 4 следует, что для всех $k \geq 1$, $t \geq s$, $t, s \in [\tau, T]$,

$$\|u_{n_k}(t)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)t \leq \|u_{n_k}(s)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)s. \quad (3.7)$$

Более того, из (3.5) получим, что для п.в. $s \in (\tau, T)$ для п.в. $t \in (s, T)$

$$\|u(t)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)t \leq \|u(s)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)s.$$

Поскольку $u \in W_{\tau, T} \subset C([\tau, T]; H)$, то для всех $t \geq s$, $t, s \in [\tau, T]$,

$$\|u(t)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)t \leq \|u(s)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)s. \quad (3.8)$$

Поэтому функции

$$J_k(t) = \|u_{n_k}(t)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)t, \quad (3.9)$$

$$J(t) = \|u(t)\|_H^2 - c_5(1 + \|f\|_H^2)t \quad (3.10)$$

непрерывные и монотонно невозрастающие на $[\tau, T]$.

Более того, поскольку $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ в H для п.в. $t \in (\tau, T)$, то

$$J_k(t) \rightarrow J(t), \quad k \rightarrow +\infty \quad \text{для п.в. } t \in (\tau, T). \quad (3.11)$$

Покажем, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} J_k(t) \leq J(t) \quad \forall t \in (\tau, T]. \quad (3.12)$$

Из (3.11) следует, что

$$\forall t \in (\tau, T] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{t} \in (\tau, t) \quad |J(\bar{t}) - J(t)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} J_k(\bar{t}) = J(\bar{t}).$$

Поэтому, для всех $k \geq 1$

$$J_k(t) - J(t) \leq J_k(\bar{t}) - J(t) \leq |J_k(\bar{t}) - J(\bar{t})| + |J(\bar{t}) - J(t)| < \varepsilon + |J_k(\bar{t}) - J(\bar{t})|.$$

Таким образом,

$$\forall t \in (\tau, T] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} J_k(t) \leq J(t) + \varepsilon,$$

откуда следует (3.12) и, в частности, неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}(t)\|_H^2 \leq \|u(t)\|_H^2 \quad \forall t \in (\tau, T].$$

Из слабой сходимости $u_{n_k}(t)$ к $u(t)$ в H при $k \rightarrow +\infty \quad \forall t \in [\tau, T]$, неравенства (3.12) и [11; теорема I.5.12, с. 21] получим (3.6).

Шаг 2. Покажем, что

$$u' = f_{\tau, T} - d. \quad (3.13)$$

В силу леммы 1 для любых $k \geq 1$, $\xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V)$ справедливо соотношение

$$-\langle \xi', u_{n_k} \rangle_{X_{\tau, T}} + \langle \mathcal{A}_{\tau, T}(u_{n_k}), \xi \rangle_{X_{\tau, T}} = \langle f_{\tau, T}, \xi \rangle. \quad (3.14)$$

Переходя в последнем к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получим

$$\forall \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V) \quad -\langle \xi', u \rangle_{X_{\tau, T}} + \langle d, \xi \rangle_{X_{\tau, T}} = \langle f_{\tau, T}, \xi \rangle.$$

Таким образом, используя свойства интеграла Бохнера, для всех $\varphi \in C_0^\infty([\tau, T])$, $h \in V$

$$\begin{aligned} -\left(\int_{\tau}^T u(s)\varphi'(s) ds, h\right) &= -\int_{\tau}^T (h, u(s))_H \varphi'(s) ds = \int_{\tau}^T \langle f - d(s), h \rangle_V \varphi(s) ds \\ &= \left\langle \int_{\tau}^T [f_{\tau, T}(s) - d(s)] \varphi(s) ds, h \right\rangle_V. \end{aligned}$$

Из определения производной элемента $u \in X_{\tau, T}$ в смысле $\mathcal{D}^*([\tau, T]; V^*)$ непосредственно вытекает соотношение (3.13).

Шаг 3. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, T - \tau)$ и покажем, что

$$d(t) = A(u(t)) \quad \text{для п.в.} \quad t \in (\tau + \varepsilon, T), \quad (3.15)$$

используя псевдомонотонность $\mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}$ на $W_{\tau+\varepsilon, T}$.

Из сходимостей (3.5), (3.6) имеем, что

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u && \text{слабо в } W_{\tau+\varepsilon, T}, \\ \mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}(u_{n_k}) &\rightarrow d && \text{слабо в } X_{\tau+\varepsilon, T}^*, \\ \forall t \in [\tau + \varepsilon, T] \quad u_{n_k}(t) &\rightarrow u(t) && \text{в } H, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle_{X_{\tau+\varepsilon, T}} = 0. \quad (3.17)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1 \quad &\int_{\tau+\varepsilon}^T \langle A(u_{n_k}(s)), u_{n_k}(s) - u(s) \rangle_V ds \\ &= \int_{\tau+\varepsilon}^T (f, u_{n_k}(s) - u(s)) ds - \int_{\tau+\varepsilon}^T \langle u'_{n_k}(s), u_{n_k}(s) - u(s) \rangle_V ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.16) следует, что

$$\int_{\tau+\varepsilon}^T (f, u_{n_k}(s) - u(s)) ds \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.19)$$

Из (2.2) и (3.16) получим, что

$$\begin{aligned} &\int_{\tau+\varepsilon}^T \langle u'_{n_k}(s), u(s) - u_{n_k}(s) \rangle_V ds \\ &= \int_{\tau+\varepsilon}^T \langle u'_{n_k}(s), u(s) \rangle_V - \frac{1}{2} (\|u_{n_k}(T)\|_H^2 - \|u_{n_k}(\tau + \varepsilon)\|_H^2) \\ &\rightarrow \int_{\tau+\varepsilon}^T \langle u'(s), u(s) \rangle_V - \frac{1}{2} (\|u(T)\|_H^2 - \|u(\tau + \varepsilon)\|_H^2) = 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Переходя к пределу в (3.18) при $k \rightarrow +\infty$, из (3.19) и (3.20) получим (3.17).

Таким образом, из (3.16), (3.17) и из псевдомонотонности $\mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}$ на $W_{\tau+\varepsilon, T}$ получим, что для любого $w \in X_{\tau+\varepsilon, T}$

$$\langle d, u - w \rangle_{X_{\tau+\varepsilon, T}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}(u_{n_k}), u_{n_k} - w \rangle_{X_{\tau+\varepsilon, T}} \geq \langle \mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}(u), u - w \rangle_{X_{\tau+\varepsilon, T}}.$$

Следовательно, $d = \mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}(u)$. Принимая во внимание определение $\mathcal{A}_{\tau+\varepsilon, T}$, приходим к соотношению (3.15).

Шаг 4. Из произвольности $\varepsilon \in (0, T - \tau)$, сходимостей (3.5), соотношения (3.15) и из определения $\mathcal{A}_{\tau, T}$ следует, что $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau, T}(\eta)$.

Шаг 5. Докажем (3.3) от противного. Предположим, что существуют $\varepsilon > 0$, $L > 0$, $\{u_{k_j}\}_{j \geq 1} \subset \{u_{n_k}\}_{k \geq 1}$ такие, что

$$\forall j \geq 1 \quad \max_{t \in [\tau+\varepsilon, T]} \|u_{k_j}(t) - u(t)\|_H = \|u_{k_j}(t_j) - u(t_j)\|_H \geq L.$$

Не теряя общности, можем считать, что $t_j \rightarrow t_0 \in [\tau+\varepsilon, T]$, $j \rightarrow +\infty$. Следовательно, в силу непрерывности $u: [\tau, T] \rightarrow H$ имеем

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u_{k_j}(t_j) - u(t_0)\|_H \geq L. \quad (3.21)$$

С другой стороны, покажем, что

$$u_{k_j}(t_j) \rightarrow u(t_0) \quad \text{в } H, \quad j \rightarrow +\infty. \quad (3.22)$$

Шаг 5.1. Сначала докажем, что

$$u_{k_j}(t_j) \rightarrow u(t_0) \quad \text{слабо в } H, \quad j \rightarrow +\infty. \quad (3.23)$$

Для фиксированного $h \in V$ из (3.5) следует, что последовательность действительных функций $(u_{n_k}(\cdot), h): [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Принимая во внимание неравенство (3.4) и плотность вложения $V \subset H$, получим, что $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в H равномерно на $[\tau, T]$, $k \rightarrow +\infty$, откуда следует (3.23).

Шаг 5.2. Докажем, что

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \|u_{k_j}(t_j)\|_H \leq \|u(t_0)\|_H. \quad (3.24)$$

Для этого рассмотрим непрерывные, монотонно невозрастающие функции J, J_{k_j} , $j \geq 1$, определенные в (3.10), (3.9). Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Из (3.11) и из непрерывности J следует, что

$$\exists \bar{t} \in (\tau, t_0) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} J_{k_j}(\bar{t}) = J(\bar{t}) \quad \text{и} \quad |J(\bar{t}) - J(t_0)| < \varepsilon_1.$$

Тогда для достаточно больших $j \geq 1$

$$J_{k_j}(t_j) - J(t_0) \leq |J_{k_j}(\bar{t}) - J(\bar{t})| + |J(\bar{t}) - J(t_0)| \leq |J_{k_j}(\bar{t}) - J(\bar{t})| + \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} J_{k_j}(t_j) \leq J(t_0) + \varepsilon_1.$$

Из произвольности $\varepsilon_1 > 0$ и того, что $t_j \rightarrow t_0$, $j \rightarrow +\infty$, получим (3.24).

Шаг 5.3. Сходимость (3.22) непосредственно следует из (3.23), (3.24) и из [11; теорема I.5.12, с. 21].

Шаг 5.4. Для завершения доказательства теоремы отметим, что (3.22) вступает в противоречие с (3.21). Следовательно, истинность (3.3) проверена.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\tau < T$, $\{u_n\}_{n \geq 1}$ – произвольная последовательность слабых решений (1.1) на $[\tau, T]$ такая, что

$$u_n(\tau) \rightarrow \eta \quad \text{в } H, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Тогда существуют $u(\cdot) \in \mathcal{D}_{\tau, T}(\eta)$ и $\{u_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{u_n\}_{n \geq 1}$ такие, что

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{в } C([\tau, T]; H), \quad k \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственное принципиальное отличие от доказательства теоремы 1 состоит в проверке неравенства

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} J_{k_j}(t_j) \leq J(t_0),$$

когда $t_0 = \tau$, $t_j \rightarrow t_0$, $j \rightarrow +\infty$, $\{t_j\}_{j \geq 1} \subset [\tau, T]$ (см. шаг 5.2 доказательства теоремы 2). В этом случае

$$\forall j \geq 1 \quad J_{k_j}(t_j) - J(\tau) \leq J_{k_j}(\tau) - J(\tau).$$

Поскольку $u_n(\tau) \rightarrow u(\tau)$ в H , $n \rightarrow +\infty$, то $J_{k_j}(\tau) \rightarrow J(\tau)$, $j \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} J_{k_j}(t_j) \leq J(t_0).$$

4. Существование глобального аттрактора. Вначале рассмотрим конструкции, введенные в [16]. В качестве $P(H)$ ($\mathcal{B}(H)$) обозначим совокупность всех непустых (непустых ограниченных) подмножеств пространства H . Напомним, что *м-полупоток* называется многозначное отображение $G: \mathbb{R} \times H \rightarrow P(H)$ для которого

а) $G(0, \cdot) = \text{Id}$ (тождественное отображение),

б) $G(t + s, x) \subset G(t, G(s, x))$ для всех $x \in H$, $t, s \in \mathbb{R}_+$;

м-полупоток называется *строгим*, если

$$G(t + s, x) = G(t, G(s, x)) \quad \forall x \in H, \quad t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Из леммы 3 и леммы 4 следует, что любое слабое решение может быть продолжено до глобального, определенного на $[0, +\infty)$. Для произвольного $y_0 \in H$ пусть $\mathcal{D}(y_0)$ – совокупность всех слабых решений (определенных на $[0, +\infty)$) задачи (1.1) с начальными данными $y(0) = y_0$.

Определим м-полупоток G так:

$$G(t, y_0) = \{y(t) \mid y(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)\}.$$

ЛЕММА 5. *м-Полупоток G является строгим м-полупотоком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in G(t + s, y_0)$. Тогда $y = u(t + s)$, где $u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$. Из леммы 3 следует, что $v(\cdot) = u(s + \cdot) \in \mathcal{D}(u(s))$. Следовательно,

$$y = v(t) \in G(t, u(s)) \subset G(t, G(s, y_0)).$$

Обратно, если $y \in G(t, G(s, y_0))$, то

$$\exists u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0), \quad v(\cdot) \in \mathcal{D}(u(s)) \quad y = v(t).$$

Определим отображение

$$z(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in [0, s], \\ v(\xi - s), & \xi \in [s, t + s]. \end{cases}$$

Из леммы 3 следует, что $z(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$. Следовательно, $y = z(t + s) \in G(t + s, y_0)$.

Напомним, что множество $\mathcal{A}$ называется *глобальным аттрактором* G , если

- 1) $\mathcal{A}$ – отрицательно полуинвариантное множество (т.е. $\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A})$ для всех $t \geq 0$);
- 2) $\mathcal{A}$ – притягивающее множество, т.е.

$$\text{dist}(G(t, B), \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \forall B \in \mathcal{B}(H), \quad (4.1)$$

где

$$\text{dist}(C, D) = \sup_{c \in C} \inf_{d \in D} \|c - d\|_H$$

– полуметрика Хаусдорфа;

- 3) для любого замкнутого множества $Y \subset H$, удовлетворяющего (4.1), выполнено вложение $\mathcal{A} \subset Y$ (минимальность).

Глобальный аттрактор называется *инвариантным*, если $\mathcal{A} = G(t, \mathcal{A})$ для любого $t \geq 0$.

Докажем существование инвариантного компактного глобального аттрактора.

ТЕОРЕМА 2. *м-Полупоток G обладает инвариантным компактным в фазовом пространстве H глобальным аттрактором $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что

$$\exists R, \tilde{\alpha} > 0 \quad \forall y_0 \in H, \quad y(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0), \quad t \geq 0 \quad \|y(t)\|_H^2 \leq \|y_0\|_H^2 e^{-\tilde{\alpha}t} + R. \quad (4.2)$$

Таким образом, шар $B_0 = \{u \in H \mid \|u\|_H \leq \sqrt{R+1}\}$ является абсорбирующим множеством, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{B}(H) \quad \exists T(B) > 0 \quad \forall t \geq T(B) \quad G(t, B) \subset B_0.$$

В частности, из (4.2) следует, что множество $\bigcup_{t \geq 0} G(t, B)$ ограничено в H для любого $B \in \mathcal{B}(H)$.

Отметим также, что из теоремы 1 следует, что отображение $G(t, \cdot): H \rightarrow \mathcal{B}(H)$ принимает компактные значения и является компактным при $t > 0$ в том смысле, что переводит ограниченные множества в предкомпактные.

Покажем, что отображение $u_0 \rightarrow G(t, u_0)$ полунепрерывно сверху [19; определение 1.4.1, с. 38]. Для этого достаточно показать [20; с. 45], что

$$\begin{aligned} \forall u_0 \in H, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(u_0, \varepsilon) > 0 \quad \forall u \in B_\delta(u_0) \\ G(t, u) \subset B_\varepsilon(G(t, u_0)) = \{z \in H \mid \text{dist}(z, G(t, u_0)) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Если это не так, то существуют $u_0 \in H$, $\varepsilon > 0$, $\{\delta_n\}_{n \geq 1} \subset (0, +\infty)$, $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset H$ такие, что

$$\forall n \geq 1 \quad u_n \in B_{\delta_n}(u_0), \quad G(t, u_n) \not\subset B_\varepsilon(G(t, u_0)), \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Тогда

$$\forall n \geq 1 \quad \exists v_n(\cdot) \in \mathcal{D}(u_n) \quad v_n(t) \notin B_\varepsilon(G(t, u_0)).$$

Поскольку $u_n \rightarrow u_0$ в H , $n \rightarrow +\infty$, то из теоремы 1 следует, что $v_n(t) \rightarrow v(t) \in G(t, u_0)$ в H , $n \rightarrow +\infty$, для некоторого $v(\cdot) \in \mathcal{D}(u_0)$. Мы пришли к противоречию с тем, что для любого $n \geq 1$ выполняется оценка $\|v_n(t) - v(t)\|_H \geq \varepsilon$.

Таким образом, существование глобального аттрактора с требуемыми свойствами непосредственно следует из [16; предложение 2, теорема 3, замечание 8].

5. Существование траекторного аттрактора. Рассмотрим семейство $\mathcal{K}_+ = \bigcup_{y_0 \in H} \mathcal{D}(y_0)$ всех слабых решений уравнения (1.1), определенных на $[0, +\infty)$. Заметим, что $\mathcal{K}_+$ является *трансляционно инвариантным*, т.е.

$$\forall u(\cdot) \in \mathcal{K}_+ \quad \forall h \geq 0 \quad u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+, \quad \text{где } u_h(s) = u(h + s), \quad s \geq 0.$$

На $\mathcal{K}_+$ зададим *полугруппу трансляций*

$$\{T(h)\}_{h \geq 0}, \quad T(h)u(\cdot) = u_h(\cdot), \quad h \geq 0, \quad u \in \mathcal{K}_+.$$

В силу трансляционной инвариантности $\mathcal{K}_+$ заключаем, что $T(h)\mathcal{K}_+ \subset \mathcal{K}_+$ при $h \geq 0$.

Построим аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(h)\}_{h \geq 0}$, действующей на $\mathcal{K}_+$. На $\mathcal{K}_+$ будем рассматривать топологию, индуцированную из пространства Фреше $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$. Отметим, что

$$f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot) \quad \text{в } C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$$

равносильно

$$\forall M > 0 \quad \Pi_M f_n(\cdot) \rightarrow \Pi_M f(\cdot) \quad \text{в } C([0, M]; H),$$

где Π_M – оператор ограничения на отрезок $[0, M]$ [17; с. 18]. Обозначим в качестве Π_+ оператор ограничения на $[0, +\infty)$.

Напомним, что множество $\mathcal{P} \subset C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ называется *притягивающим* для пространства траекторий $\mathcal{K}_+$ уравнения (1.1) в топологии $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, если для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}_+$ и произвольного числа $M \geq 0$ выполняется соотношение

$$\text{dist}_{C([0, M]; H)}(\Pi_M T(t)\mathcal{B}, \Pi_M \mathcal{P}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.1)$$

Множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$ называется *траекторным аттрактором* в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ относительно топологии $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ (см., например, [17; определение 1.2, с. 197]), если

- i) $\mathcal{U}$ компактно в $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$;
- ii) $\mathcal{U}$ строго инвариантно относительно $\{T(h)\}_{h \geq 0}$, т.е. $T(h)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всех $h \geq 0$;
- iii) $\mathcal{U}$ является притягивающим множеством для пространства траекторий $\mathcal{K}_+$ в топологии $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$.

Рассмотрим уравнение (1.1) на всей числовой прямой. По аналогии с пространством $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ пространство $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$ снабжается топологией локальной равномерной сходимости на каждом отрезке $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ (см., например, [17; с. 198]). Функция $u \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H) \cap L_\infty(\mathbb{R}; H)$ называется *полной траекторией* уравнения (1.1), если для всех $h \in \mathbb{R}$ выполнено $\Pi_+ u_h(\cdot) \in \mathcal{K}_+$ [17; с. 198]. Пусть $\mathcal{K}$ – совокупность всех полных траекторий уравнения (1.1). Стоит отметить, что

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{K} \quad u_h(\cdot) \in \mathcal{K}. \quad (5.2)$$

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор из теоремы 2. Тогда

$$\forall y(\cdot) \in \mathcal{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathcal{A}, \quad (5.3)$$

$$\forall y_0 \in \mathcal{A} \quad \exists y(\cdot) \in \mathcal{K} \quad y(0) = y_0. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем (5.3). Для любого $y \in \mathcal{K}$ (в случае, когда $\mathcal{K} \neq \emptyset$)

$$\exists d > 0 \quad \|y(t)\|_H \leq d \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$B = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{y(t)\} \in \mathcal{B}(H).$$

Отметим, что

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y(\tau) = y_{\tau-t}(t) \in G(t, y_{\tau-t}(0)) \subset G(t, B).$$

Из теоремы 2 и из (4.1) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T > 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad \text{dist}(y(\tau), \mathcal{A}) \leq \text{dist}(G(T, B), \mathcal{A}) < \varepsilon.$$

Поэтому, учитывая компактность $\mathcal{A}$ в H , для любых $u(\cdot) \in \mathcal{K}$, $\tau \in \mathbb{R}$ получаем, что $u(\tau) \in \mathcal{A}$.

Теперь проверим (5.4). Пусть $y_0 \in \mathcal{A}$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}(y_0)$. Из (3.2), (4.1) получим, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ $y(t) \in \mathcal{A}$. Из теоремы 2 следует, что $G(1, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Поэтому,

$$\forall \eta \in \mathcal{A} \quad \exists \xi \in \mathcal{A} \quad \exists \varphi_\eta(\cdot) \in \mathcal{D}_{0,1}(\xi) \quad \varphi_\eta(1) = \eta.$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ положим

$$y(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi_{y(-k+1)}(t+k), & t \in [-k, -k+1), \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отметим, что $y \in C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$, $y(t) \in \mathcal{A}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (следовательно, $y \in L_\infty(\mathbb{R}; H)$) и в силу леммы 3 $y \in \mathcal{K}$. При этом $y(0) = y_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 6 следует, что $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор из теоремы 2. Тогда в пространстве $\mathcal{K}_+$ существует траекторный аттрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$. При этом имеет место формула

$$\mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K} = \Pi_+ \{y \in \mathcal{K} \mid y(t) \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что в пространстве $\mathcal{K}_+$ существует траекторный аттрактор $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_+$. Из оценки (4.2) и из теоремы 1 вытекает, что полугруппа трансляций $\{T(h)\}_{h \geq 0}$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+$ имеет компактное поглощающее множество. Это множество можно построить следующим образом:

- 1) рассмотрим $\mathcal{P}$ – пересечение $\mathcal{K}_+$ с шаром в $C_b(\mathbb{R}_+; H)$ достаточно большого радиуса;
- 2) сдвинем полученное множество на любое фиксированное $h > 0$.

Получим $T(h)\mathcal{P}$ – множество с требуемыми свойствами. Напомним, что полугруппа $\{T(h)\}_{h \geq 0}$ непрерывна. Тогда применима, например, теорема 1.1 из работы [17; с. 197]. В данном случае пространства E и E_0 совпадают с H . На самом деле, здесь применима классическая теорема о глобальном аттракторе (однозначной) непрерывной полугруппы в полном метрическом пространстве, у которой имеется компактное притягивающее (а тем более поглощающее) множество (см., например, [3], [4]).

Первое равенство в формуле (5.5) следует из [17; теорема 1.2, с. 198], доказательство которой в более общем случае содержится в [9]. Второе равенство в формуле (5.5) вытекает из леммы 6.

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество $\mathcal{K}$ непустое, компактное в $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}; H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение непосредственно следует из теоремы 3 в силу строгой инвариантности траекторного аттрактора.

6. Комментарии. Из результатов пп. 4 и 5 следует, что m -полупоток G , построенный на всех слабых решениях (1.1), обладает компактным инвариантным глобальным аттрактором $\mathcal{A}$. Для всех слабых решений (1.1), определенных на $[0, +\infty)$, существует траекторный аттрактор $\mathcal{U}$. При этом

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}(0) = \{y(0) \mid y \in \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{U} = \Pi_+ \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ – совокупность всех полных траекторий дифференциально-операторного уравнения (1.1) в $C^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H) \cap L_\infty(\mathbb{R}; H)$. Таким образом, доказано равенство глобальных аттракторов как в смысле [16; определение 6, с. 88], так и в смысле [17; определение 2.2, с. 201].

В данной работе мы не касались вопросов, связанных со связностью и оценкой размерности построенных аттракторов в общем случае. Отметим, что предложенные в работах [1]–[10], [16], [17] подходы опираются на свойства решений эволюционных объектов. Здесь же мы опираемся на свойства функции взаимодействия A из (1.1) и свойства фазовых пространств.

Сформулируем условия, при которых задача (1.1) однозначно разрешима, например, если дополнительно $A: V \rightarrow V^*$ монотонный [11; теорема VI.1.1, с. 239] или выполнены условия теоремы 3.1 из [21]. Тогда полугруппа G будет однозначной и у нее в силу доказанной теоремы 2 имеется обычный классический глобальный аттрактор.

Анализируя доказательства результатов из предыдущих пунктов, вместо условия псевдомонотонности на A можно рассматривать более слабое условие на отображение $A: V \rightarrow V^*$: из того, что $u_n \rightarrow u$ слабо в V , $A(u_n) \rightarrow d$ слабо в V^* и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A(u_n), u_n - u \rangle_V = 0$, следует, что $d = A(u)$.

В работе [22] построен траекторный аттрактор для системы реакции-диффузии в “самой сильной” топологии, отвечающей данной задаче с использованием универсального метода энергетических тождеств вида

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y(t)\|_H^2 + \langle A(y(t)), y(t) \rangle_V = \langle f(t), y(t) \rangle_V \quad \text{для п.в. } t > 0,$$

которое справедливо для любого слабого решения задачи (1.1). Анализируя доказательство теоремы 2 из [22] и доказательство [13; теорема 2.2, с. 7–11], можно получить теорему о траекторном аттракторе в пространстве

$$W^{\text{loc}} = \{y \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \mid y' \in L_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^*)\}$$

уравнений вида (1.1) с псевдомонотонной нелинейностью при дополнительных предположениях: оператор $A: V \rightarrow V^*$ и порожденный им оператор Немыцкого непрерывны и обладают (S) -свойством [11; определение III.1.4, с. 81], что соотносится с соответствующими рассуждениями из [22].

7. Приложение. Приведем пример класса нелинейных граничных задач, для которых можно исследовать динамику решений при $t \rightarrow +\infty$. Отметим, что при изложении мы не претендуем на общность.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 2$, $1 < q \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Через N_1 (соответственно N_2) обозначается число дифференцирований по x порядка $\leq m-1$ (соответственно порядка $= m$). Пусть $A_\alpha(x, \eta; \xi)$ – семейство вещественных функций ($|\alpha| \leq m$), определенных в $\Omega \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

- (C₁) для п.в. $x \in \Omega$ функция $(\eta, \xi) \rightarrow A_\alpha(x, \eta, \xi)$ непрерывна в $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$;
- (C₂) для любых $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ функция $x \rightarrow A_\alpha(x, \eta, \xi)$ измерима в Ω ;
- (C₃) существуют такие $c_1 \geq 0$ и $k_1 \in L_q(\Omega)$, что для п.в. $x \in \Omega$, для всех $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$$|A_\alpha(x, \eta, \xi)| \leq c_1[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k_1(x)];$$

- (C₄) существуют такие $c_2 > 0$ и $k_2 \in L_1(\Omega)$, что для п.в. $x \in \Omega$, для всех $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi) \xi_\alpha \geq c_2 |\xi|^p - k_2(x);$$

- (C₅) для п.в. $x \in \Omega$, для всех $\eta \in \mathbb{R}^{N_1}$, для всех $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^{N_2}$, $\xi \neq \xi^*$, выполняется

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, \eta, \xi) - A_\alpha(x, \eta, \xi^*)) (\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) > 0.$$

Введем обозначения:

$$D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\}, \quad \delta u = \{u, Du, \dots, D^{m-1}u\}$$

(см. [15; с. 194]).

Для произвольной фиксированной внешней силы $f \in L_2(\Omega)$ исследуем динамику при $t \rightarrow +\infty$ всех слабых (обобщенных) решений, определенных на $[0, +\infty)$, такой

задачи:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, \delta y(x, t), D^m y(x, t))) = f(x) \quad \text{на } \Omega \times (0, +\infty), \quad (7.1)$$

$$D^\alpha y(x, t) = 0 \quad \text{на } \Gamma \times (0, +\infty), \quad |\alpha| \leq m - 1. \quad (7.2)$$

Введем обозначения (подробнее см. [15; с. 195]): $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{m,p}(\Omega)$ – действительное пространство Соболева,

$$a(u, \omega) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x)) D^\alpha \omega(x) dx, \quad u, \omega \in V.$$

Отметим, что компактность вложения $V \subset H$ имеет место в силу теоремы Соболева о компактности вложения. Принимая во внимание условия (C_1) – (C_5) и [15; с. 192–199], получаем, что оператор $A: V \rightarrow V^*$, определенный формулой

$$\langle A(u), \omega \rangle_V = a(u, \omega) \quad \forall u, \omega \in V,$$

является псевдомонотонным и удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Следовательно, можно перейти от задачи (7.1), (7.2) к соответствующей задаче в “обобщенной” постановке (1.1). Отметим, что

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, \delta u, D^m u)) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Таким образом, для слабых (обобщенных) решений задачи (7.1), (7.2) выполняются все утверждения из предыдущих пунктов, в частности, теоремы 1–3 и леммы 1–6.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве приложений можно рассматривать также новые классы задач с вырождением, задачи на многообразии, задачи с запаздыванием, стохастические дифференциальные уравнения с частными производными и т.п. [15], [10], [23], [18] с дифференциальными операторами псевдомонотонного типа при соответствующем выборе фазовых пространств.

8. Заключение. Для класса автономных дифференциально-операторных уравнений с псевдомонотонной нелинейной зависимостью между определяющими параметрами задачи исследована динамика при $t \rightarrow +\infty$ всех глобальных слабых решений, определенных на $[0, +\infty)$. Доказано существование глобального компактного аттрактора и компактного траекторного аттрактора, изучена их структура, проверено равенство глобальных аттракторов как в смысле определения 6 из [16], так и в смысле определения 2.2 из [17]. Полученные результаты позволяют исследовать динамику решений новых классов эволюционных уравнений из нелинейных математических моделей геофизических и социальноэкономических процессов и полей с функцией взаимодействия псевдомонотонного типа, удовлетворяющей условию “не более, чем полиномиального роста” и стандартному знаковому условию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская, “О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1972, 91–115.

- [2] О. А. Ладыженская, “О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье–Стокса и других диссипативных систем”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, 14, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **115**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, 137–155.
- [3] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989.
- [4] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] O. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [6] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Math. Surveys Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [7] А. В. Бабин, М. И. Вишик, “Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям”, *Матем. сб.*, **126**:3 (1985), 397–419.
- [8] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Trajectory attractors for evolution equations”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:10 (1995), 1309–1314.
- [9] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Evolution equations and their trajectory attractors”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **76**:10 (1997), 913–964.
- [10] G. R. Sell, “Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations”, *J. Dynam. Differential Equations*, **8**:1 (1996), 1–33.
- [11] X. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [12] М. З. Згуровский, П. О. Касьянов, В. С. Мельник, *Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах*, Наукова думка, К., 2008.
- [13] K. Kuttler, “Non-degenerate implicit evolution inclusions”, *Electron. J. Differential Equations*, 2000, № 34, 1–20.
- [14] S. Migórski, “Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications”, *J. Global Optim.*, **31**:3 (2005), 505–533.
- [15] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [16] V. S. Melnik, J. Valero, “On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions”, *Set-Valued Anal.*, **6**:1 (1998), 83–111.
- [17] М. И. Вишик, В. В. Чепызов, “Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса”, *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 194–213.
- [18] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **27**:4 (2010), 1493–1509.
- [19] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Systems Control Found. Appl., **2**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [20] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **264**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [21] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*, RAM Res. Appl. Math., **37**, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [22] М. И. Вишик, С. В. Зелик, В. В. Чепызов, “Сильный траекторный аттрактор диссипативной системы реакции-диффузии”, *ДАН*, **435**:2 (2010), 155–159.
- [23] Ю. А. Дубинский, “Нелинейные параболические уравнения высокого порядка”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **37**, ВИНТИ, М., 1990, 89–166.

П. О. Касьянов

Национальный технический университет Украины

“Киевский политехнический институт”

E-mail: kasyanov@i.ua

Поступило

18.06.2010

Исправленный вариант

12.07.2011