Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Макаричев, Об асимптотике базисных функций
обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$, *Матем. за-
метки*, 2011, том 89, выпуск 5, 738–754

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:43:29

Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$

В. А. Макаричев

Рассмотрены базисные функции $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,p}$ обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$. Получены асимптотические разложения функций $\varphi_{n,0}^{(l)}$ и $\psi_{n,2 \cdot 4^n - 1}^{(l)}$. Доказано существование асимптотики для функций $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,p}$ при $k \neq 0$ и $p \neq 2 \cdot 4^n - 1$. Получен первый член асимптотических разложений этих функций.

Библиография: 8 названий.

1. Предварительные результаты. Рассмотрим класс функций

$$H_\rho = \{ \varphi \in C_{[-1,1]}^\infty : \|\varphi^{(n)}\|_{C_{[-1,1]}} \leq c(\varphi) \rho^n 2^{n(n+1)/2}, n = 0, 1, 2, \dots \}.$$

В [1] для функций данного класса был предложен ряд, названный *обобщенным рядом Тейлора* (ОРТ).

Пусть $N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1}\}$ при $n \neq 0$, $N_0 = \{-1, 0, 1\}$;

$$x_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}, \quad n \neq 0, \quad k \in N_n, \quad x_{0,k} = k, \quad k \in N_0.$$

В [1], [2] доказано, что если $f \in H_\rho$ при $1 \leq \rho < 2$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \varphi_{n,k}^{(l)}(x),$$

где ряд в правой части сходится равномерно на $[-1, 1]$ для каждого $l = 0, 1, 2, \dots$, и базисные функции $\varphi_{n,k}(x)$ однозначно определяются из условий

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k} &\in H_1, \quad \varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = \delta_n^m \cdot \delta_s^k, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad k \in N_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad s \in N_m, \end{aligned}$$

где δ_n^m – символ Кронекера. Функции $\varphi_{n,k}(x)$ были построены с использованием финитного решения функционально-дифференциального уравнения

$$y'(x) = 2 \cdot (y(2x + 1) - y(2x - 1)).$$

Отметим, что ОРТ для класса H_ρ позволяют восстанавливать функции по набору значений производных в точках достаточно простых конечных множеств.

Построению ОРТ для более широких классов бесконечно дифференцируемых функций посвящены работы [3], [4].

В 1986 г. была поставлена задача [5; задача 44, с. 59]: исследовать поведение базисных функций $\varphi_{n,k}(x)$ обобщенного ряда Тейлора с большими номерами n и найти удобные формулы для их вычисления.

Решению данной задачи посвящена статья Рвачевой [6]. В работе были получены асимптотические формулы для $\varphi_{n,k}(x)$ при больших n .

В настоящей работе рассматриваются базисные функции $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,p}$ обобщенного ряда Тейлора для класса функций

$$H_{\rho,2} = \{f \in C_{[-1,1]}^\infty : |f^{(n)}(x)| \leq c(f)\rho^n 2^{n^2}\}.$$

В [7] было изучено поведение при $n \rightarrow \infty$ функций $\varphi_{n,0}$ и ψ_{n,α_n} , где $\alpha_n = 2 \cdot 4^n - 1$.

Целью статьи является изучение поведения при $n \rightarrow \infty$ базисных функций $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,p}$ для случая, когда $k \neq 0$ и $p \neq \alpha_n$. Для решения поставленной задачи существенным образом будут использованы результаты статьи [7].

Пусть

$$N_n = \{-2 \cdot 4^{n-1}, -2 \cdot 4^{n-1} + 1, \dots, 2 \cdot 4^{n-1} - 1, 2 \cdot 4^{n-1}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad N_0 = \{-1, 0, 1\},$$

$$x_{n,k} = \frac{k}{2 \cdot 4^{n-1}}, \quad k \in N_n, \quad n > 0, \quad x_{0,k} = k, \quad k \in N_0,$$

$$D_0 = \{1, 3\}, \quad D_1 = \{1, 3, \dots, 15\}, \quad \dots, \quad D_n = \{1, 3, \dots, 4^{n+1} - 1\},$$

$$x_{n,p}^* = -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^n}, \quad p \in D_n.$$

Обозначим $\Delta_h^2(f(x)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ – вторая разность с шагом h .

Согласно [3], если $f \in H_{\rho,2}$, $1 < \rho < 4$, то

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_n} a_{n,k} \varphi_{n,k}^{(l)}(x) + \sum_{p \in D_n} b_{n,p} \psi_{n,p}^{(l)}(x) \right),$$

где $a_{n,k} = f^{(n)}(x_{n,k})$, $b_{n,p} = \Delta_h^2(f^{(n)}(x_{n,p}^*))$ – вторые разности в точках $x_{n,p}^*$ с шагом $h = 1/(2 \cdot 4^n)$. При этом ряд в правой части сходится равномерно для любого $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Функции $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ однозначно определяются из условий

$$\varphi_{n,k}(x) \in H_{1,2}, \quad \psi_{n,p}(x) \in H_{1,2},$$

$$\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,s}) = \delta_n^l \delta_k^s, \quad (1.1)$$

$$\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,s}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\Delta_h^2(\varphi_{n,k}^{(l)}(x_{l,p}^*)) = 0, \quad (1.3)$$

$$\Delta_h^2(\psi_{n,p}^{(l)}(x_{l,q}^*)) = \delta_n^l \delta_p^q, \quad (1.4)$$

где вторые разности берутся с шагом $h = 1/(2 \cdot 4^l)$.

Базисные функции $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ ($\alpha_n = 2 \cdot 4^n - 1$) были построены с помощью функции

$$\text{mur}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2t/4^k)}{(4t/4^k) \sin(t/4^k)} dt,$$

которая является финитным решением уравнения

$$y'(x) = 2(y(4x+3) - y(4x-1) + y(4x+1) - y(4x-3)).$$

Для описания поведения функций $\varphi_{n,0}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в [7] была использована функция $ab_2(x)$, которая на сегменте $[-1, 0]$ определена формулой

$$\begin{aligned} ab_2(x) = \text{mur}_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) + \dots \\ + \lambda^k \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right) + \dots, \end{aligned}$$

где λ – наименьший по модулю корень функции $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{mur}_2(-1 + 1/(2 \cdot 4^k)) z^k$. С точностью 10^{-6} было найдено $\lambda = -9.617232$. Кроме того, была рассмотрена функция $V(z) = -\Lambda(z)/\Phi(z)$, где

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{4^{k+1}}\right) z^k.$$

Было установлено, что функция $V(z)$ в круге $|z| \leq 58$ имеет единственный полюс λ первого порядка. С точностью 10^{-6} было также найдено значение $d = \text{Res}_{\lambda} V(z) = -3.827878$.

Пусть $ab_{2,c}(x)$ – это функция $ab_2(x)$, четно продленная на $[-1, 1]$, а $ab_{2,s}(x) - ab_2(x)$, продленная на $[-1, 1]$ нечетно. Основной результат статьи [7] относительно базисных функций $\varphi_{n,0}(x)$ следующий.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} \frac{2^{(2n)^2}}{c_{2n}} \varphi_{2n,0}(x) &= ab_{2,c}(x) + R_{2n}(x), \\ \frac{2^{(2n-1)^2}}{c_{2n-1}} \varphi_{2n-1,0}(x) &= ab_{2,s}(x) + R_{2n-1}(x), \end{aligned}$$

где $c_k = -d/\lambda^k$, причем для функций $R_n(x)$ справедливы оценки

$$|R_n(x)| \leq M_0 \frac{n|\lambda|^n}{32^n}.$$

Подобный результат был получен и для функций $\psi_{n,\alpha_n}(x)$. Были рассмотрены функции

$$T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}}\right) z^k, \quad W(z) = \frac{\Lambda(z) - 2 \cdot T(z)}{\Phi(z)}.$$

Установлено, что функция $W(z)$ в круге $|z| \leq 58$ имеет единственный полюс λ первого порядка. С точностью 10^{-6} было найдено $\ell = \text{Res}_\lambda W(z) = 1.341544$.

Пусть

$$ap_2 = \begin{cases} ab_2(x), & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда согласно [7] имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{2^{n^2}}{b_n} \psi_{n, \alpha_n}(x) = ap_2(x) + R_n(x),$$

где $b_k = -\ell/\lambda^k$, причем для функций $R_n(x)$ справедливы оценки

$$|R_n(x)| \leq M_1 \frac{n|\lambda|^n}{32^n}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства функции $\text{mur}_2(x)$:

- 1) $\text{supp } \text{mur}_2(x) = [-1, 1]$, при этом $\text{mur}_2(x)$ является четной [3];
- 2) $\text{mur}_2(x) \in C_{[-1, 1]}^\infty$, $\|\text{mur}_2^{(k)}\|_{C_{[-1, 1]}} = 2^{k^2}$ [3];
- 3) $\int_{-\infty}^\infty \text{mur}_2(x) dx = 1$, а также $\text{mur}_2(0) = 1$ [3];
- 4) функция $\text{mur}_2(x)$ на промежутке $[-1, 0]$ монотонно возрастает;
- 5) производная порядка l функции $\text{mur}_2(x)$ может быть найдена по формуле

$$\text{mur}_2^{(l)}(x) = 2^{l^2} \sum_{k=1}^{4^l} \delta_k^{(l)} \text{mur}_2(4^l x + 4^l - 2k + 1),$$

где $\delta_1^{(l)} = 1$, $|\delta_i^{(l)}| = 1$ при $i = 2, 3, \dots, 4^l$ (для нас важно значение только $\delta_1^{(l)}$);

- 6) выполнено

$$\text{mur}_2(-1) = \text{mur}_2(1) = 0, \quad \text{mur}_2^{(l)}(2s/4^l) = 0,$$

где $s \in \{-4^l/2, -4^l/2 + 1, \dots, 4^l/2\}$;

- 7) $\Delta_h^2(\text{mur}_2^{(l)}(s/(2 \cdot 4^l))) = 0$ с шагом $h = 1/(2 \cdot 4^l)$, $s \in \{-2 \cdot 4^l + 1, \dots, 2 \cdot 4^l - 1\}$, $s \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, $l = 0, 1, 2, \dots$;
- 8) значения функции $\text{mur}_2(x)$ в точках вида $-1 + 1/4^k$ и $-1 + 1/(2 \cdot 4^k)$ вычисляются по формулам: $\text{mur}_2(-1 + 1/4^k) = \nu_{k-1}/(2^{k^2}(k-1)!)$ и

$$\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right) = \frac{1}{2^{(k+1)^2}} \sum_{s=0}^k \frac{\mu_s}{s!(k-s)!},$$

где $\nu_k = \int_0^1 x^k \text{mur}_2(x) dx$, $\mu_s = \int_{-1}^1 x^s \text{mur}_2(x) dx$;

- 9) величины $\nu_k = \int_0^1 x^k \text{mur}_2(x) dx$, $\mu_s = \int_{-1}^1 x^s \text{mur}_2(x) dx$ могут быть найдены по следующим формулам: $\mu_0 = 1$, $\mu_{2n-1} = 0$,

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{4(4^{2n} - 1)} \sum_{k=1}^n \frac{1 + 3^{2k+1}}{(2n - 2k)!(2k + 1)!} \mu_{2n-2k},$$

где коэффициенты y_i удовлетворяют бесконечной треугольной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{4}\right) + 2\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) + y_0 \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ -\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{4^2}\right) + 2\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^2}\right) \\ \quad + y_0 \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) + y_1 \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{4^n}\right) + 2\text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \\ \quad + y_0 \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}\right) + \dots + y_{n-1} \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Согласно теореме 3 из [7] для любого $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ верно $\tilde{\psi}_n(x) \equiv 2^{n^2} \psi_{n, \alpha_n}(x)$. Поэтому функции $\tilde{\psi}_n(x)$ с точностью до множителя удовлетворяют условиям (1.2) и (1.4). Для коэффициентов y_k также были получены разложения

$$y_k = -\frac{\ell}{\lambda^{k+1}} + v_k, \quad |v_k| \leq \frac{B}{58^k}, \quad (2.2)$$

где $B = \max_{|z|=58} |W(z) - \ell/(z - \lambda)|$. С точностью 10^{-6} найдено $B = 4.21404$.

Таким образом, для того, чтобы исследовать поведение $\varphi_{n,0}^{(l)}(x)$ и $\psi_{n,\alpha_n}^{(l)}(x)$ при $n \rightarrow \infty$, мы можем использовать функции $\tilde{\varphi}_n(x)$ и $\tilde{\psi}_n(x)$.

ЛЕММА 1. Для любых $i, n \in \mathbb{N}$, $i < n$ и $x \in [-1; -1/(2 \cdot 4^n)]$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \left| \frac{1}{c_n} \tilde{\varphi}_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x) \right| \leq \frac{1}{|c_n|} \left(\frac{1}{2^{n^2-2ni}(n-i-1)!} + \frac{C_1(i)(n-i)}{32^n} + \frac{C_2(i)}{58^n} \right), \\ \text{б) } \left| \frac{1}{b_n} \tilde{\psi}_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x) \right| \leq \frac{1}{|b_n|} \left(\frac{3}{2^{n^2-2ni}(n-i-1)!} + \frac{C_3(i)(n-i)}{32^n} + \frac{C_4(i)}{58^n} \right), \end{array}$$

где $c_n = -d/\lambda^n$, $b_n = -\ell/\lambda^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любые $i, n \in \mathbb{N}$, $i < n$ и $x \in [-1; -1/(2 \cdot 4^n)]$. Из свойства 1) функции $\text{mur}_2(x)$ следует, что

$$ab_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right)$$

при указанных значениях x .

Получим сначала первую оценку.

Пусть

$$h_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x) - \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) = \sum_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^s}\right).$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{c_n} \widetilde{\varphi}_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x) \right| \leq \left| \frac{1}{c_n} \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) \right| + \left| \frac{1}{c_n} h_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x) \right|.$$

Оценим первое слагаемое. Из свойства 5) функции $\text{mur}_2(x)$ следует, что

$$\text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) = 2^{i^2} \sum_{s=1}^{4^i} \delta_s^{(i)} \cdot \text{mur}_2\left(4^i \cdot x + \frac{1}{4^{n-i}} - 2s + 1\right).$$

Так как при $s > 1$ имеет место $4^i \cdot x + 1/4^{n-i} - 2s + 1 \leq -1$, в силу свойства 1)

$$\text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) = 2^{i^2} \cdot \text{mur}_2\left(4^i \cdot x + \frac{1}{4^{n-i} - 1}\right).$$

Из свойств 2), 4), 8) следует

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c_n} \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) \right| &\leq \frac{2^{i^2} \text{mur}_2(-1 + 1/4^{n-i})}{|c_n|} \leq \frac{2^{i^2}}{|c_n| 2^{(n-i)^2} (n-i-1)!} \\ &= \frac{1}{|c_n| 2^{n^2-2ni} (n-i-1)!}. \end{aligned}$$

Оценим теперь $|(1/c_n)h_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x)|$. Используя (2.1), получаем

$$\frac{1}{c_n} h_n(x) - ab_2(x) = \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n u_{k-1} \cdot \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} h_n^{(i)}(x) - ab_2^{(i)}(x) &= \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{n-i} u_{k-1} \cdot \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{c_n} \sum_{k=n-i+1}^n u_{k-1} \cdot \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right). \end{aligned}$$

Оценим первую сумму. Согласно свойству 5) функции $\text{mur}_2(x)$ выполняется

$$\text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) = 2^{i^2} \sum_{s=1}^{4^i} \delta_s^{(i)} \cdot \text{mur}_2\left(4^i x + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k-i}} - 2s + 1\right).$$

При $s > 1$ имеет место

$$4^i x + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k-i}} - 2s + 1 \leq -1,$$

что в силу свойства 1) дает

$$\text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) = 2^{i^2} \text{mur}_2\left(4^i x + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k-i}} - 1\right).$$

Используя свойства 2), 4), 8), при $k \leq n - i - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) &\leq 2^{i^2} \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k-i}}\right) \leq 2^{i^2} \text{mur}_2\left(-1 + \frac{1}{4^{n-k-i}}\right) \\ &\leq \frac{2^{i^2}}{2^{(n-k-i)^2}(n-k-i-1)!} \leq \frac{2^{i^2}}{2^{(n-k-i)^2}}. \end{aligned}$$

Откуда с использованием (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n-i} u_{k-1} \cdot \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{n-i-1} u_{k-1} \cdot \frac{2^{i^2}}{2^{(n-k-i)^2}} + u_{n-i-1} \right| \\ &\leq 2^{i^2} M \sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{58^{k-1} \cdot 2^{(n-i-k)^2}} \leq 2^{i^2} \cdot 58 \cdot M \sum_{k=1}^{n-i} 2^{-(n-k-i)^2-5k}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\max_k (-(n-k-i)^2 - 5k)$ достигается при $k = n - i - 5/2$. Поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{n-i} u_{k-1} \cdot \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) \right| \leq \frac{C_1(i) \cdot (n-i)}{32^n}.$$

Оценим теперь вторую сумму. Из свойства 2) функции $\text{mur}_2(x)$ и (2.1) следует

$$\left| \sum_{k=n-i+1}^n u_{k-1} \cdot \text{mur}_2^{(i)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^{n-k}}\right) \right| \leq 2^{i^2} \cdot \frac{M}{58^{n-i}} \cdot i = \frac{C_2(i)}{58^n}.$$

Итак, справедливость первой оценки доказана.

Доказательство второй оценки аналогично приведенным выше рассуждениям.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ и $x \in [-1/(2 \cdot 4^n); 0]$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \left| \frac{1}{c_n} \cdot \tilde{\varphi}_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{C_0 \cdot |\lambda|^n}{(n-k)! \cdot 2^{n^2-n(2k-1)-k}}, \\ \text{б)} \quad & \left| \frac{1}{b_n} \cdot \tilde{\psi}_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{C_1 \cdot |\lambda|^n}{(n-k)! \cdot 2^{n^2-n(2k-1)-k}}, \\ \text{в)} \quad & |ab_2^{(k)}(x)| \leq \frac{C(k)}{64^n}, \end{aligned}$$

где $c_n = -d/\lambda^n$, $b_n = -\ell/\lambda^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любые $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ и $x \in [-1/(2 \cdot 4^n); 0]$.

Для получения первой оценки разложим функцию $\tilde{\varphi}_n^{(k)}(x)$ по формуле Тейлора до $(n - (k + 1))$ -го порядка:

$$\tilde{\varphi}_n^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{n-k-1} \frac{\tilde{\varphi}_n^{(s+k)}(0)}{s!} \cdot x^s + \frac{1}{(n-k-1)!} \cdot \int_0^x (x-t)^{n-k-1} \cdot \tilde{\varphi}_n^{(n)}(t) dt.$$

Из (1.1) следует, что $\tilde{\varphi}_n^{(s+k)}(0) = 0$ для любого $s = 0, \dots, n - k - 1$. Поэтому имеет место равенство

$$\tilde{\varphi}_n^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-k-1)!} \cdot \int_0^x (x-t)^{n-k-1} \cdot \tilde{\varphi}_n^{(n)}(t) dt.$$

Оценим величину $|\tilde{\varphi}_n^{(n)}(x)|$. Для этого воспользуемся разложениями (2.1), откуда получаем

$$|x_k| \leq \left| \frac{d}{\lambda^{k+1}} \right| + \frac{M}{58^k}.$$

Значит,

$$1 + |x_0| + |x_1| + \dots + |x_n| \leq 1 + \frac{|d|}{|\lambda| - 1} + \frac{58M}{57} = C.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_n^{(n)}(x)| &= \left| \text{mur}_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{4^n}\right) + \sum_{s=0}^{n-1} x_{n-s-1} \text{mur}_2^{(n)}\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^s}\right) \right| \\ &\leq \|\text{mur}_2^{(n)}\|_{C_{[-1,1]}} \cdot (1 + |x_0| + \dots + |x_{n-1}|) \leq 2^{n^2} C \end{aligned}$$

(последний переход следует из свойства 2) функции $\text{mur}_2(x)$). Итак, $|\tilde{\varphi}_n^{(n)}(x)| \leq 2^{n^2} C$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c_n} \cdot \tilde{\varphi}_n^{(k)}(x) \right| &\leq \frac{1}{|c_n|} \cdot 2^{n^2} C \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} \cdot \int_x^0 (t-x)^{n-k-1} dt \\ &\leq \frac{1}{|c_n|} \cdot 2^{n^2} C \cdot \frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!} \leq \frac{2^{n^2} \cdot C}{|c_n|(n-k)!} \left(\frac{1}{2 \cdot 4^n} \right)^{n-k} \\ &= \frac{C_0 \cdot |\lambda|^n}{(n-k)! \cdot 2^{n^2 - n(2k-1) - k}}. \end{aligned}$$

Итак, первая оценка получена.

Аналогично проводится доказательство второй оценки.

Установим справедливость третьей оценки. Для этого запишем $ab_2(x)$ в виде

$$ab_2(x) = \text{mur}_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \cdot \text{mur}_2\left(x - 1 + \frac{1}{2 \cdot 4^k}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned} ab_2'(x) &= \text{mur}_2'\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\lambda ab_2(4x), \\ ab_2''(x) &= \text{mur}_2''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8\lambda \cdot \text{mur}_2'\left(4x - \frac{1}{2}\right) + 16\lambda^2 ab_2(16x), \\ ab_2'''(x) &= \text{mur}_2'''\left(x - \frac{1}{2}\right) + 32\lambda \cdot \text{mur}_2''\left(4x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + 256\lambda^2 \cdot \text{mur}_2'\left(16x - \frac{1}{2}\right) + 512\lambda^3 \cdot ab_2(64x), \\ &\dots \end{aligned}$$

Так как λ – корень функции $\Phi(z)$, имеет место $ab_2(0) = \Phi(\lambda) = 0$. Используя свойство 6) функции $\text{mur}_2(x)$, получаем

$$ab'_2(0) = \text{mur}'_2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\lambda \cdot ab_2(0) = 0.$$

Аналогично, $ab''_2(0) = ab'''_2(0) = 0$. Нетрудно также видеть, что для любого $i \in \mathbb{N}$ верно $ab^{(i)}_2(0) = 0$. Поэтому разложив $ab^{(k)}_2(x)$ по формуле Тейлора до второго порядка:

$$ab^{(k)}_2(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{ab^{(k+i)}_2(0)}{i!} x^i + \frac{1}{2!} \cdot \int_0^x (x-t)^2 ab^{(k+3)}_2(t) dt,$$

получаем равенство

$$ab^{(k)}_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 ab^{(k+3)}_2(t) dt.$$

Любую производную $ab_2(x)$ можно оценить на $[-1, 0]$ константой: $|ab^{(i)}_2(x)| \leq c(i)$. Значит,

$$|ab^{(k)}_2(x)| \leq \frac{c(k+3)}{6} \cdot (-x)^3 \leq \frac{c(k+3)}{6} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4^n}\right)^3 = \frac{C(k)}{64^k}.$$

Итак, лемма доказана.

Сформулируем основной результат относительно $\varphi^{(k)}_{n,0}$ и $\psi^{(k)}_{n,\alpha_n}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ при $k < n$ справедливы асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} \frac{2^{(2n)^2}}{c_{2n}} \varphi^{(k)}_{2n,0}(x) &= ab^{(k)}_{2,c}(x) + r_{2n,k}(x), \\ \frac{2^{(2n-1)^2}}{c_{2n-1}} \varphi^{(k)}_{2n-1,0}(x) &= ab^{(k)}_{2,s}(x) + r_{2n-1,k}(x), \\ \frac{2^{n^2}}{b_n} \psi^{(k)}_{n,\alpha_n}(x) &= ap^{(k)}_2(x) + \rho_{n,k}(x), \end{aligned}$$

где $c_j = -d/\lambda^j$ и $b_j = -\ell/\lambda^j$, причем для функций $r_{n,k}(x)$ и $\rho_{n,k}(x)$ справедливы оценки

$$|r_{n,k}(x)| \leq M_0(k) \cdot \frac{(n-k)|\lambda|^n}{32^n}, \quad |\rho_{n,k}(x)| \leq M_1(k) \cdot \frac{(n-k)|\lambda|^n}{32^n}.$$

Доказательство теоремы следует из лемм 1 и 2.

3. Асимптотика для $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ при $k \neq 0$ и $p \neq 2 \cdot 4^n - 1$. Для того, чтобы исследовать поведение при $n \rightarrow \infty$ базисных функций $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$, где $k \neq 0$ и $p \neq \alpha_n$, будет использован следующий метод: устанавливается связь базисных функций $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ с некоторыми вспомогательными функциями, посредством изучения поведения которых при $n \rightarrow \infty$ будут исследованы функции $\varphi_{n,k}(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$.

Введем в рассмотрение функции $\widehat{\varphi}_{n,t}$ и $\widehat{\psi}_{n,r}$, где $t = k$ при $n = 0$ и $k \in N_0$; $t = k/(2 \cdot 4^{n-1})$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in N_n$; $r = -1 + p/(2 \cdot 4^n)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и $p \in D_n$.

Функции $\widehat{\varphi}_{n,0}$ и $\widehat{\psi}_{n,-1/(2 \cdot 4^n)}$ определяются так:

$$\widehat{\varphi}_{n,0}(x) = \widetilde{\varphi}_n(x), \quad \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}} = \widetilde{\psi}_n(x).$$

Остальные функции $\widehat{\varphi}_{n,t}$ и $\widehat{\psi}_{n,r}$ строим по индукции следующим образом:

а) имеем

$$\widehat{\varphi}_{0,-1}(x) = \widehat{\varphi}_{0,0}(x+1), \quad \widehat{\varphi}_{0,1}(x) = \widehat{\varphi}_{0,0}(x-1), \quad \widehat{\psi}_{0,\frac{1}{2}}(x) = \widehat{\psi}_{0,-\frac{1}{2}}(x-1);$$

б) для $t = k/2 \cdot 4^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in N_n$ положим

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{n,t}(x) = & \widehat{\varphi}_{n,0}(x-t) \\ & - [\widehat{\varphi}_{n,0}(-1-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + \widehat{\varphi}_{n,0}(-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) + \widehat{\varphi}_{n,0}(1-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x)] \\ & - \sum_{l=2}^n \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t\right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1,\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(x) \\ & - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0 \pmod{2}}}^{4^{l-1}} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2 \left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - t\right) \right) \cdot \widehat{\psi}_{l-1,-1+\frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(x); \end{aligned}$$

для $r = -1 + \frac{k}{2 \cdot 4^n}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in D_n$ положим

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{n,r}(x) = & \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}\left(x - r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \\ & - \left[\widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}\left(-1 - r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}\left(-r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) \right. \\ & \quad \left. + \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}\left(1 - r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x) \right] \\ & - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}^{(l-1)}\left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1,\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(x) \\ & - \sum_{l=1}^n \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0 \pmod{2}}}^{4^{l-1}} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2 \left(\widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}^{(l-1)}\left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - r - \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right) \right) \cdot \widehat{\psi}_{l-1,-1+\frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(x). \end{aligned}$$

Установим связь между $\widehat{\varphi}_{n,t}$, $\widehat{\psi}_{n,r}$ и базисными функциями $\varphi_{n,k}$, $\psi_{n,p}$.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие высказывания:*

- а) $\widehat{\varphi}_{0,k}(x) \equiv \varphi_{0,k}(x)$, где $k \in N_0$;
- б) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in N_n$ при $t = k/(2 \cdot 4^{n-1})$ верно $\widehat{\varphi}_{n,t}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \varphi_{n,k}(x)$;
- в) для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ и любого $k \in D_n$ при $r = -1 + k/(2 \cdot 4^n)$ выполняется $\widehat{\psi}_{n,r}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \psi_{n,k}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $\widehat{\varphi}_{n,0}(x) = \widetilde{\varphi}_n(x)$ и $\widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}} = \widetilde{\psi}_n(x)$, откуда следует

$$\widehat{\varphi}_{n,0}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \varphi_{n,0}(x), \quad \widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \psi_{n,2 \cdot 4^n - 1}(x) \quad (3.1)$$

для любого $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому для функций $\widehat{\varphi}_{n,0}$ и $\widehat{\psi}_{n,-\frac{1}{2 \cdot 4^n}}$ с точностью до множителя выполняются равенства (1.1)–(1.4).

Доказательство леммы для оставшихся случаев будем проводить по индукции.

1. *База индукции.* Докажем, что $\widehat{\varphi}_{0,-1}(x) \equiv \varphi_{0,-1}(x)$. Для этого проверим выполнение условий теоремы 2 из [3], формулировка которой следующая: пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H_{1,2}$ и $\varphi_1(x_{l,s}) = \varphi_2(x_{l,s})$ для любых $l = 0, 1, 2, \dots$ и $s \in N_l$; пусть $\Delta_h^2(\varphi_1(x_{l,p})) = \Delta_h^2(\varphi_2(x_{l,p}))$ с шагом $h = 1/(2 \cdot 4^l)$ для всех $l = 0, 1, 2, \dots$ и $p \in D_l$; тогда $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Покажем, что $\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,s}) = 2^{l^2} \cdot \delta_0^l \cdot \delta_{-1}^s$, где $l = 0, 1, 2, \dots$ и $s \in N_l$.

Возьмем $l = 0$. В силу определения функции $\widehat{\varphi}_{0,-1}$ и равенства (1.1) имеет место

$$\widehat{\varphi}_{0,-1}(-1) = \widehat{\varphi}_{0,0}(0) = 1, \quad \widehat{\varphi}_{0,-1}(0) = \widehat{\varphi}_{0,0}(1) = 0.$$

Из свойства 1) функции $\text{шур}_2(x)$ следует, что функция $\widehat{\varphi}_{n,0}$ обращается в ноль вне отрезка $[-1, 1]$. Поэтому верно $\widehat{\varphi}_{0,-1}(1) = \widehat{\varphi}_{0,0}(2) = 0$.

Рассмотрим любое $l \in \mathbb{N}$. Пусть $s \in \{-2 \cdot 4^{l-1}, \dots, 0\}$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,s}) = \widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(\frac{j}{2 \cdot 4^{l-1}}\right) = 0, \quad \text{где } j = s + 2 \cdot 4^{l-1}.$$

Из того, что $j \in \{0, \dots, 2 \cdot 4^{l-1}\}$, в силу (1.1) следует $\widehat{\varphi}_{0,-1}(x_{l,s}) = 0$. Данное равенство также верно при $s \in \{1, \dots, 2 \cdot 4^{l-1}\}$ в силу того, что $s + 2 \cdot 4^{l-1}/(2 \cdot 4^{l-1}) \geq 1$. Таким образом, $\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,s}) = 2^{l^2} \cdot \delta_0^l \cdot \delta_{-1}^s$.

Докажем, что

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2(\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,p}^*)) = 0$$

при $l = 0, 1, \dots$ и $p \in D_l$.

Рассмотрим любое $l = 0, 1, 2, \dots$. Положим $h = 1/(2 \cdot 4^l)$.

Рассмотрим случай, когда $p \in \{1, \dots, 2 \cdot 4^l - 1\}$, $p \not\equiv 0 \pmod{2}$. Тогда получаем

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2(\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,p}^*)) = \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2\left(\widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(-1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l}\right)\right) = \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2\left(\widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(-1 + \frac{k}{2 \cdot 4^l}\right)\right).$$

Так как $k \in \{2 \cdot 4^l + 1, \dots, 4^{l+1} - 1\}$, $k \not\equiv 0 \pmod{2}$, в силу соотношений (3.1) и (1.3) получаем

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2(\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,p}^*)) = 0.$$

Пусть теперь $p \in \{2 \cdot 4^l + 1, \dots, 4^{l+1} - 1\}$, $p \not\equiv 0 \pmod{2}$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} -1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l} + h &> -1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l} > -1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l} - h \\ &= -1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l - 1}{2 \cdot 4^l} \geq -1 + \frac{2 \cdot 4^l + 2 \cdot 4^l + 1 - 1}{2 \cdot 4^l} = 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2(\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,p}^*)) &= \widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(-1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l} + h\right) - 2 \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(-1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l}\right) \\ &\quad + \widehat{\varphi}_{0,0}^{(l)}\left(-1 + \frac{p + 2 \cdot 4^l}{2 \cdot 4^l} - h\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^l}}^2(\widehat{\varphi}_{0,-1}^{(l)}(x_{l,p}^*)) = 0$.

Следовательно, согласно теореме 2 из [3] получаем $\widehat{\varphi}_{0,-1}(x) \equiv \varphi_{0,-1}(x)$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно доказать, что $\widehat{\varphi}_{0,1}(x) \equiv \varphi_{0,1}(x)$ и $\widehat{\psi}_{0,\frac{1}{2}}(x) \equiv \psi_{0,3}(x)$.

2. Рассмотрим любое $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что для всякого $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ верно следующее:

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_{i,t}(x) &\equiv 2^{i^2} \cdot \varphi_{i,j}(x), \quad t = \frac{j}{2 \cdot 4^{i-1}}, \quad \text{где } j \in N_i; \\ \widehat{\psi}_{i,r}(x) &\equiv 2^{i^2} \cdot \psi_{i,q}(x), \quad r = -1 + \frac{q}{2 \cdot 4^i}, \quad \text{где } q \in D_i;\end{aligned}$$

здесь в первой строке если $i = 0$, то берем $t = j$. Поэтому для функций $\widehat{\varphi}_{i,t}$ и $\widehat{\psi}_{i,r}$ с точностью до множителя выполняются равенства (1.1)–(1.4).

Докажем, что для любого $k \in N_n$ верно $\widehat{\varphi}_{n,t}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \varphi_{n,k}(x)$, где $t = k/(2 \cdot 4^{n-1})$. Для этого проверим выполнение условий теоремы 2 из [3].

Покажем сначала, что $\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}) = 2^{v^2} \cdot \delta_v^n \cdot \delta_u^k$, где $v = 0, 1, 2, \dots$ и $u \in N_v$. Рассмотрим случай $v = 0$. По построению имеет место

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_{n,t}(-1) &= \widehat{\varphi}_{n,0}(-1-t) \\ &- [\widehat{\varphi}_{n,0}(-1-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(-1) + \widehat{\varphi}_{n,0}(-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(-1) + \widehat{\varphi}_{n,0}(1-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(-1)] \\ &- \sum_{l=2}^n \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t\right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(-1) \\ &- \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \not\equiv 0 \pmod{2}}}^{4^l-1} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2\left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - t\right)\right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(-1).\end{aligned}$$

Из нашего предположения и свойств (1.1)–(1.4) базисных функций ОРТ следует

$$\widehat{\varphi}_{n,t}(-1) = \widehat{\varphi}_{n,0}(-1-t) - \widehat{\varphi}_{n,0}(-1-t) = 0.$$

Аналогично получаем $\widehat{\varphi}_{n,t}(0) = \widehat{\varphi}_{n,t}(1) = 0$.

Рассмотрим теперь $v > 0$. В этом случае

$$\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u} - t) = \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}\left(\frac{u}{2 \cdot 4^{v-1}} - \frac{k}{2 \cdot 4^{n-1}}\right) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}\left(\frac{u - k \cdot 4^{v-n}}{2 \cdot 4^{v-1}}\right), & \text{если } v \geq n, \\ \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u} - t), & \text{если } v < n. \end{cases}$$

Согласно свойству (1.1) при $v \geq n$ имеет место

$$\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u} - t) = 2^{n^2} \cdot \delta_v^n \cdot \delta_{u-k \cdot 4^{v-n}}^0 = 2^{n^2} \cdot \delta_v^n \cdot \delta_k^u.$$

Кроме того, если $v \geq n$, то из нашего предположения и свойств (1.1)–(1.4) следует равенство

$$\widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}^{(v)}(x_{v,u}) = 0, \quad l = 2, \dots, n, \quad s \in \{-2 \cdot 4^{l-2}, \dots, 2 \cdot 4^{l-2}\},$$

а также

$$\widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}^{(v)}(x_{v,u}) = 0, \quad l = 1, \dots, n-1, \quad p = 1, \dots, 4^l - 1, \quad p \not\equiv 0 \pmod{2}.$$

Поэтому при $v \geq n$ имеет место $\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}) = 2^{n^2} \cdot \delta_v^n \cdot \delta_k^u$.

Для случая $v < n$ получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}) &= \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u} - t) - \sum_{l=2}^n \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t\right) \cdot 2^{v^2} \cdot \delta_{l-1}^v \cdot \delta_u^s \\ &= \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u} - t) - \widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}\left(\frac{u}{2 \cdot 4^{v-1}} - t\right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}) = 2^{n^2} \cdot \delta_n^v \cdot \delta_k^u$.

Докажем выполнение равенства

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}^*)) = 0 \quad \text{для любых } v = 0, 1, 2, \dots, \quad u \in D_v.$$

Если $v \geq n-1$, то в силу свойств (1.1)–(1.4) базисных функций ОРТ получаем

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}^*)) = \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2\left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}\left(-1 + \frac{u - k \cdot 4^{v-(n-1)}}{2 \cdot 4^v}\right)\right) = 0.$$

При $v \leq n-2$ имеет место

$$\begin{aligned} &\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}^*)) \\ &= \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u}^* - t)) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \not\equiv 0 \pmod{2}}}^{4^l-1} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2\left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)}\left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - t\right)\right) 2^{(l-1)^2} \cdot \delta_{l-1}^v \cdot \delta_p^u \\ &= \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}(x_{v,u}^* - t)) - \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2\left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(v)}\left(-1 + \frac{u}{2 \cdot 4^v} - t\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^v}}^2(\widehat{\varphi}_{n,t}^{(v)}(x_{v,u}^*)) = 0$.

Следовательно, согласно теореме 2 из [3] получаем $\widehat{\varphi}_{n,t}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \varphi_{n,k}(x)$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно доказать, что при $r = -1 + p/(2 \cdot 4^n)$ и $p \in D_n$ имеет место $\widehat{\psi}_{n,r}(x) \equiv 2^{n^2} \cdot \psi_{n,p}(x)$.

Итак, теорема доказана.

Отметим, что в выражениях, которые определяют функции $\widehat{\varphi}_{n,t}$ и $\widehat{\psi}_{n,r}$, некоторое число слагаемых может быть равным нулю. Следующая теорема устанавливает возможность упростить соответствующие выражения.

ТЕОРЕМА 5. Если $t = h/(2 \cdot 4^q)$, где $q \leq n-1$ и $h \not\equiv 0 \pmod{4}$, то

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{n, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}(x) &= \widehat{\varphi}_{n,0}(x - t) \\ &\quad - [\widehat{\varphi}_{n,0}(-1 - t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + \widehat{\varphi}_{n,0}(-t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) + \widehat{\varphi}_{n,0}(1 - t) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=2}^{q+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t \right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}} (x) \\
& - \sum_{l=1}^q \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \not\equiv 0 \pmod{2}}}^{4^{l-1}} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2 \left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - t \right) \right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}} (x).
\end{aligned}$$

Если $q \leq n$ и $h \not\equiv 0 \pmod{4}$, то

$$\begin{aligned}
& \widehat{\psi}_{n, \frac{h}{2 \cdot 4^q} - \frac{1}{2 \cdot 4^n}} (x) \\
& = \widehat{\psi}_{n, \frac{1}{2 \cdot 4^n}} \left(x - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \\
& \quad - \left[\widehat{\psi}_{n, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}} \left(-1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) \right. \\
& \quad \left. + \widehat{\psi}_{n, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}} \left(-\frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) + \widehat{\psi}_{n, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}} \left(1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x) \right] \\
& - \sum_{l=2}^{q+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} \widehat{\psi}_{n, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}} (x) \\
& - \sum_{l=1}^q \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \not\equiv 0 \pmod{2}}}^{4^{l-1}} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2 \left(\widehat{\psi}_{n, -\frac{1}{2 \cdot 4^n}}^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}} (x).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость первого утверждения. При $l-2 \geq q$

$$\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t \right) = \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) = \widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(\frac{s - h \cdot 4^{l-2-q}}{2 \cdot 4^{l-2}} \right).$$

Из свойства (1.1) и того, что вне отрезка $[-1, 1]$ функция $\widehat{\varphi}_{n,0}(x)$ обращается в ноль, следует

$$\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - t \right) = 0.$$

Применяя подобные рассуждения, получаем при $l-1 \geq q$

$$\Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}}^2 \left(\widehat{\varphi}_{n,0}^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \right) = 0.$$

Таким образом, первое утверждение доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение.

Теорема доказана.

Значит, количество слагаемых в выражениях, которые определяют $\widehat{\varphi}_{n,t}$ и $\widehat{\psi}_{n,r}$, не зависит от n , что вместе с теоремами 1–3 позволяет построить асимптотические разложения базисных функций $\varphi_{n,t}(x)$ и $\psi_{n,r}(x)$.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}^c (x) & = ab_{2,c} \left(x - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \\
& - \left[ab_{2,c} \left(-1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + ab_{2,c} \left(-\frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ab_{2,c} \left(1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x) \Big] \\
& - \sum_{l=2}^{q+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} ab_{2,c}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(x) \\
& - \sum_{l=1}^q \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0 \pmod{2}}}^{4^l-1} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-2}}}^2 \left(ab_{2,c}^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(x); \\
\Phi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}^s(x) & = ab_{2,s} \left(x - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \\
& - \left[ab_{2,s} \left(-1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + ab_{2,s} \left(-\frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) \right. \\
& \quad \left. + ab_{2,s} \left(1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x) \right] \\
& - \sum_{l=2}^{q+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} ab_{2,s}^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(x) \\
& - \sum_{l=1}^q \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0 \pmod{2}}}^{4^l-1} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-2}}}^2 \left(ab_{2,s}^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(x); \\
\Psi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}(x) & = ap_2 \left(x - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \\
& - \left[ap_2 \left(-1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,-1}(x) + ap_2 \left(-\frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,0}(x) + ap_2 \left(1 - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{0,1}(x) \right] \\
& - \sum_{l=2}^{q+1} \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{s=-2 \cdot 4^{l-2}}^{2 \cdot 4^{l-2}} ap_2^{(l-1)} \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \cdot \widehat{\varphi}_{l-1, \frac{s}{2 \cdot 4^{l-2}}}(x) \\
& - \sum_{l=1}^q \frac{1}{2^{(l-1)^2}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0 \pmod{2}}}^{4^l-1} \Delta_{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-2}}}^2 \left(ap_2^{(l-1)} \left(-1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}} - \frac{h}{2 \cdot 4^q} \right) \right) \widehat{\psi}_{l-1, -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^{l-1}}}(x).
\end{aligned}$$

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $x^* = h/(2 \cdot 4^q) \in [-1, 1]$, где $h \neq 0 \pmod{4}$. Тогда справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned}
\frac{2^{(2n)^2}}{c_{2n}} \varphi_{2n,k}(x) & = \Phi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}^c(x) + R_{2n,q}(x), & \frac{k}{2 \cdot 4^{2n-1}} & = x^*, & 2n-1 & \geq q, \\
\frac{2^{(2n+1)^2}}{c_{2n+1}} \varphi_{2n+1,k}(x) & = \Phi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}^s(x) + R_{2n+1,q}(x), & \frac{k}{2 \cdot 4^{2n}} & = x^*, & 2n & \geq q, \\
\frac{2^{n^2}}{b_n} \psi_{n,p}(x) & = \Psi_{2, \frac{h}{2 \cdot 4^q}}(x) + r_{n,q}(x), & -1 + \frac{p}{2 \cdot 4^n} & = x^* - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, & n & \geq q,
\end{aligned}$$

где $c_j = -d/\lambda^j$ и $b_j = -\ell/\lambda^j$, причем для функций $R_{n,q}(x)$ и $r_{n,q}(x)$ справедливы оценки

$$|R_{n,q}(x)| \leq M(q) \cdot \frac{n|\lambda|^n}{32^n}, \quad |r_{n,q}(x)| \leq m(q) \cdot \frac{n|\lambda|^n}{32^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 1–5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Рвачев, “Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций”, Математические методы анализа динамических систем, **6**, Харьков, 1982, 99–102.
- [2] В. А. Рвачев, “Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения”, *УМН*, **45:1** (1990), 77–103.
- [3] В. А. Рвачев, Г. А. Старец, “Некоторые атомарные функции и их применение”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1983, № 11, 22–24.
- [4] В. М. Кузниченко, “Обобщенные ряды Тейлора для класса функций $H(\bar{\rho}, \bar{m}, r)$ ”, *Матем. заметки*, **46:4** (1989), 120–122.
- [5] Ю. Г. Стоян, В. С. Проценко, Г. П. Манько, И. В. Гончарюк, Л. В. Курпа, В. А. Рвачев, Н. С. Синекон, И. Б. Сироджа, А. Н. Шевченко, Т. И. Шейко, *Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики*, Наукова думка, Киев, 1986.
- [6] Т. В. Рвачева, “Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора”, *Вестн. Харьковск. нац. ун-та. Сер. Матем., прикл. матем., мех.*, **602** (2003), 94–104.
- [7] В. А. Макаричев, “Асимптотика базисных функций обобщенного ряда Тейлора для класса $H_{\rho,2}$ ”, *Вестн. Харьковск. нац. ун-та. Сер. Матем., прикл. матем., мех.*, **58 (826)** (2008), 67–86.
- [8] Г. А. Старец, *Один класс атомарных функций и его применение*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, ХГУ, Харьков, 1985.

В. А. Макаричев

Национальный аэрокосмический университет

им. Н. Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”

E-mail: victor.makarichev@gmail.com

Поступило

29.04.2009

Исправленный вариант

06.09.2010