Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Балаж, К. Нагасака, О. Штраух, Закон Бенфорда и функции распределения последовательностей на $(0, 1)$, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 485–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:10:25

Закон Бенфорда и функции распределения последовательностей на $(0, 1)$

В. Балаж, К. Нагасака, О. Штраух

Применяя теорию функций распределения последовательностей $x_n \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, мы находим функциональное уравнение для функции распределения последовательности x_n , а то, что последовательность x_n удовлетворяет функциональному уравнению, эквивалентно тому, что x_n удовлетворяет закону Бенфорда в сильной форме. Даны примеры функций распределения последовательностей, удовлетворяющих функциональному уравнению, с применением для сильного закона Бенфорда для разных оснований. Показаны некоторые непосредственные следствия из теории равномерного распределения для сильного закона Бенфорда.

Библиография: 14 названий.

Посвящается памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение. Проблема первой цифры: бесконечная последовательность $x_n \geq 1$ вещественных чисел удовлетворяет закону Бенфорда, если частота (асимптотическая плотность) появления значащей цифры a (где x_n записано в десятичном виде) первой, удовлетворяет формуле $\log_{10}(1 + 1/a)$ для каждой $a = 1, 2, \dots, 9$ (0 в качестве возможной первой цифры не допускается). Поскольку x_n имеет первой цифру a тогда и только тогда, когда

$$\log_{10} x_n \bmod 1 \in [\log_{10} a, \log_{10}(a + 1)),$$

закон Бенфорда для x_n следует из равномерного распределения для $\log_{10} x_n \bmod 1$.

Ньюкомб [1] первым заметил, что “то, что десять цифр не случаются с равной частотой должно быть очевидно каждому, пользующемуся логарифмическими таблицами”. Бенфорд [2] сравнивал эмпирическую частоту появления a со значением $\log_{10}(1 + 1/a)$ по двадцати различным таблицам, длина которых колебалась в пределах от 91 входных данных (таблица атомных весов) до 5000 входных данных (в математическом справочнике), что привело его к заключению, что “логарифмический закон применим особенно к “внесписочным” числам, которые не связаны какими-либо известными соотношениями ...”.

Дж. Циглер предложил (ср. Райми [3]) назвать x_n *сильной бенфордовой последовательностью*, если $\log_{10} x_n \bmod 1$ распределяется равномерно. По Дьяконису [4]

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта VEGA No. 1/0374/08; работа третьего автора выполнена при поддержке гранта VEGA No. 2/7138/27.

последовательность x_n определяется как удовлетворяющая сильному закону Бенфорда, если для любого превоначального блока цифр $a_1 a_2 \dots a_r$ плотность $a_1 a_2 \dots a_r$ равна

$$\log_{10} \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_r} \right).$$

Кунов [5] независимо заметил, что равномерное распределение $\log_{10} n! \bmod 1$ влечет за собой то, что последовательность $n!$ удовлетворяет сильному закону Бенфорда, как было сформулировано в [4].

Библиография, приведенная Райми [3], была практически полной до 1976. Другой всесторонний обзор по закону Бенфорда представил Шатте [6], а некоторые результаты на эту тему могут быть найдены в работе Нагасаки, Канемитсу, Шуе [7].

В настоящей статье мы применим к проблеме первой цифры теорию функций распределения последовательностей, основные результаты по которой могут быть найдены в монографиях [8]–[10]. Павлов [11] был первым, кто применил теорию функций распределения, но наша статья предлагает совершенно новые результаты.

В п. 2 мы повторим основные определения и результаты для общего целого основания b . В п. 3 мы представим (теорема 9) основное применение теории функций распределения для закона Бенфорда. Мы докажем, что последовательность $x_n \in (0, 1)$ может удовлетворять “сильному” закону Бенфорда только для конечного числа оснований. В п. 4 мы переформулируем несколько теорем из теории равномерного распределения на языке закона Бенфорда. Отметим, что в конце (пример 10) мы полностью решим проблему асимптотической плотности появления цифр в последовательности всех натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$, которая не удовлетворяет закону Бенфорда.

2. Основные определения и результаты. Пусть $b \geq 2$ есть целое число, которое рассматривается как основание для представления вещественного числа $x > 0$, и $M_b(x)$ есть мантисса x , $x = M_b(x) \times b^{n(x)}$, такая, что $1 \leq M_b(x) < b$, где $n(x)$ есть однозначно определенное целое число. Пусть $K = k_1 k_2 \dots k_r$ есть положительное целое число, представленное по основанию b , т.е.

$$K = k_1 \times b^{r-1} + k_2 \times b^{r-2} + \dots + k_{r-1} \times b + k_r,$$

где $k_1 \neq 0$, и в то же время $K = k_1 k_2 \dots k_r$ рассматривается как некоторый блок r -последовательных цифр по основанию b . Тогда у x первые r цифр равны $k_1 k_2 \dots k_r$ только тогда, когда¹

$$k_1.k_2 \dots k_r \leq M_b(x) < k_1.k_2 \dots (k_r + 1). \quad (2.1)$$

Так как $\log_b M_b(x) = \log_b x \bmod 1$, то неравенство (2.1) эквивалентно

$$\log_b \left(\frac{K}{b^{r-1}} \right) \leq \log_b x \bmod 1 < \log_b \left(\frac{K+1}{b^{r-1}} \right). \quad (2.2)$$

Заметим, что для x вида $x = 0.00 \dots 0 k_1 k_2 \dots k_r \dots$, мы опустили первые нулевые знаки, и $M_b(x) = k_1.k_2 \dots k_r \dots$.

¹Если $k_1 = k_2 = \dots = k_r = b - 1$, то $k_1.k_2 \dots (k_r + 1) = b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, положительных вещественных чисел удовлетворяет *закону Бенфорда* (аббревиатура В.Л.) *порядка r* , если для любого r -значного целого $K = k_1 k_2 \dots k_r$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N; \text{первые } r \text{ знаков } M_b(x_n) \text{ равны } K\}}{N} = \log_b(K+1) - \log_b K. \quad (2.3)$$

Сошлемся при этом на монографии [8]–[10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (i) Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность вещественных чисел, определим *ступенчатую функцию распределения* $x_n \bmod 1$

$$F_N(x) = \frac{\#\{n \leq N; x_n \bmod 1 \in [0, x)\}}{N} \quad (2.4)$$

при $x \in [0, 1]$.

(ii) Функция распределения (аббревиатура d.f.) $g(x)$ называется d.f. *последовательности* $x_n \bmod 1$, $n = 1, 2, \dots$, если существует последовательность индексов $N_1 < N_2 < \dots$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_{N_i}(x) = g(x) \quad (2.5)$$

при всех $x \in [0, 1)$. Здесь используется так называемое сильное определение d.f. (см. [8]), но в [10] предполагается, что предел (2.5) справедлив только для всех точек непрерывности $g(x)$, $x \in [0, 1]$.

(iii) Обозначим набор всех функций d.f. последовательности $x_n \bmod 1$, $n = 1, 2, \dots$, через $G(x_n \bmod 1)$. Если $G(x_n \bmod 1)$ является синглтоном, т.е. $G(x_n \bmod 1) = \{g(x)\}$, то $g(x)$ называется *асимптотической функцией распределения* (аббревиатура a.d.f.) $x_n \bmod 1$, и если, кроме того, $g(x) = x$, то последовательность $x_n \bmod 1$ является равномерно распределенной (аббревиатура u.d.) на $[0, 1]$.

(iv) $c_\alpha(x)$ есть одноступенчатая d.f., для которой $c_\alpha(x) = 0$, если $0 \leq x < \alpha$ и $c_\alpha(x) = 1$, если $\alpha \leq x \leq 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G(\log_b(x_n) \bmod 1)$ есть набор всех d.f. последовательности $\log_b(x_n) \bmod 1$, $n = 1, 2, \dots$. Последовательность x_n удовлетворяет В.Л. порядка r тогда и только тогда, когда для любого $g(x) \in G(\log_b(x_n) \bmod 1)$ справедливо соотношение

$$g\left(\log_b\left(\frac{K}{b^{r-1}}\right)\right) = \log_b\left(\frac{K}{b^{r-1}}\right), \quad (2.6)$$

где $K = k_1 k_2 \dots k_r$ – произвольное положительное r -значное целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $g(x) \in G(\log_b(x_n) \bmod 1)$ и

$$g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{N_i}(x), \quad \text{где } F_{N_i}(x) = \frac{\#\{n \leq N_i; \log_b(x_n) \bmod 1 \in [0, x)\}}{N_i}.$$

Пользуясь эквивалентными неравенствами (2.2) и (2.1), для фиксированного N_i имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\#\{n \leq N_i; \text{первые } r \text{ знаков } M_b(x_n) \text{ равны } K\}}{N_i} \\ &= \frac{\#\{n \leq N_i; \log_b(K/b^{r-1}) \leq \log_b x_n \bmod 1 < \log_b((K+1)/b^{r-1})\}}{N_i} \\ &= F_{N_i}\left(\log_b\left(\frac{K+1}{b^{r-1}}\right)\right) - F_{N_i}\left(\log_b\left(\frac{K}{b^{r-1}}\right)\right) \end{aligned}$$

и (2.3) можно переписать как

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(F_{N_i} \left(\log \left(\frac{K+1}{b^{r-1}} \right) \right) - F_{N_i} \left(\log_b \left(\frac{K}{b^{r-1}} \right) \right) \right) = \log_b(K+1) - \log_b K. \quad (2.7)$$

Таким образом,

$$g \left(\log_b \left(\frac{K+1}{b^{r-1}} \right) \right) - g \left(\log_b \left(\frac{K}{b^{r-1}} \right) \right) = \log_b \left(\frac{K+1}{b^{r-1}} \right) - \log_b \left(\frac{K}{b^{r-1}} \right). \quad (2.8)$$

Суммируя (2.8) по всем r -значным целым K' , $K' < K$, находим (2.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение 1 и теорема 1 неявно присутствуют в [11].

ТЕОРЕМА 2. Для любого r , $r = 1, 2, \dots$, существует последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, такая, что x_n удовлетворяет В.Л. порядка r , но не удовлетворяет В.Л. порядка $r+1$ по основанию $b \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_r = \{\log_b(k_1.k_2k_3 \dots k_r); k_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, i = 1, 2, \dots, r, k_1 \neq 0\},$$

где в этом случае $k_1.k_2k_3 \dots k_r = K/b^{r-1}$ и K есть положительное целое, представленное по основанию b , т.е.

$$K = k_1 \times b^{r-1} + k_2 \times b^{r-2} + \dots + k_{r-1} \times b + k_r.$$

Определим d.f. $g(x)$ такую, что $g(x) = x$ для любого $x \in A_r$, но $g(x) \neq x$ для некоторого $x \in A_{r+1}$. Согласно известной теореме, для любой d.f. $g(x)$ существует последовательность $y_n \in [0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $g(x)$ является a.d.f. последовательности y_n (см. [8; с. 138]). Поэтому определим последовательность x_n , как $x_n = b^{y_n}$, т.е. $\log_b x_n = y_n$, при $n = 1, 2, \dots$. Применяя теорему 1, находим, что x_n удовлетворяет В.Л. порядка r и не удовлетворяет В.Л. порядка $r+1$.

Непосредственно из доказательства теоремы 2 получаем следующее.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет В.Л. порядка r , то она одновременно удовлетворяет и В.Л. порядка $r' \leq r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет В.Л. порядка r для любого $r = 1, 2, \dots$, то x_n называется удовлетворяющей сильно-му В.Л.

Из теоремы 1 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3. Последовательность x_n , $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет сильно-му В.Л. тогда и только тогда, когда последовательность $\log_b x_n \bmod 1$ является u.d. на $[0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(x) \in G(\log_b(x_n) \bmod 1)$. Теорема 1 имеет следствием то, что $g(x) = x$ для всех $x = \log_b(K/b^{r-1})$. Поскольку набор таких x плотный для $K = k_1k_2 \dots k_r$, $k_1 \neq 0$, $0 \leq k_i < b$, $r = 1, 2, \dots$, отсюда имеем $g(x) = x$ для всех $x \in [0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известная теорема 3 может быть найдена также в [4] и [11].

Рис. 1. Интервалы $f_i^{-1}([0, x))$, $i = 0, 1, 2, \dots$

3. Функции распределения последовательностей из единичного интервала, которые удовлетворяют сильному закону Бенфорда.

ТЕОРЕМА 4. Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность на $(0, 1)$ и $G(x_n)$ – набор всех d.f. x_n . Предположим, что любая d.f. $g(x) \in G(x_n)$ является непрерывной в $x = 0$. Тогда последовательность x_n удовлетворяет сильному B.L. по основанию b только тогда, когда для любой $g(x) \in G(x_n)$ справедливо соотношение

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \right) \quad \text{для } x \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что последовательности $\log_b x_n \bmod 1$ и $-\log_b x_n \bmod 1$ являются одновременно u.d., так что далее будем изучать $-\log_b x_n \bmod 1$, $n = 1, 2, \dots$. Теперь рассмотрим функцию $-\log_b x$, определенную в области $(0, 1]$. Разделим область $(0, 1]$ на бесконечно много частей

$$\left(\frac{1}{b^{i+1}}, \frac{1}{b^i} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

и на каждой части $(1/b^{i+1}, 1/b^i]$ введем обозначение

$$f_i(x) = -\log_b x \bmod 1 = -\log_b x - i.$$

Тогда для любого члена $x_n \in (0, 1)$ и при $x \in [0, 1]$ имеем

$$0 \leq -\log_b x_n \bmod 1 < x \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (x_n \in f_i^{-1}([0, x))), \quad (3.2)$$

где

$$f_i^{-1}([0, x)) = \left(\frac{1}{b^{i+x}}, \frac{1}{b^i} \right].$$

Следуя (2.4), обозначим два типа ступенчатых d.f. функций

$$F_N^{(1)}(x) = \frac{\#\{n \leq N; -\log_b x_n \bmod 1 \in [0, x)\}}{N},$$

$$F_N^{(2)}(x) = \frac{\#\{n \leq N; x_n \bmod 1 \in [0, x)\}}{N}.$$

Тогда (3.2) имеет вид

$$F_N^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_N^{(2)}\left(\frac{1}{b^i}\right) - F_N^{(2)}\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right). \quad (3.3)$$

Кроме того, по определению $F_N^{(2)}(x)$

$$\sum_{i=K}^{\infty} F_N^{(2)}\left(\frac{1}{b^i}\right) - F_N^{(2)}\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \leq F_N^{(2)}\left(\frac{1}{b^K}\right). \quad (3.4)$$

Теперь предположим, что $g(x) \in G(x_n)$, т.е. существует последовательность индексов $N_1 < N_2 < \dots$ такая, что

$$\lim_{N_k \rightarrow \infty} F_{N_k}^{(2)}(x) = g(x) \quad \text{для любого } x \in [0, 1].$$

Согласно теореме Хелли (см. [10; с. 4–5, теорема 4.1.0.10]) из N_k может быть выделена подпоследовательность N'_k такая, что

$$\lim_{N'_k \rightarrow \infty} F_{N'_k}^{(1)}(x) = \tilde{g}(x).$$

Суммируя (3.3) и (3.4), находим

$$\left| \tilde{g}(x) - \sum_{i=0}^{K-1} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \right) \right| \leq g\left(\frac{1}{b^K}\right) \quad (3.5)$$

при $x \in [0, 1]$. Непрерывность влечет $g(1/b^K) \rightarrow 0$ при K стремящемся к бесконечности, и мы имеем

$$\tilde{g}(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \right). \quad (3.6)$$

Завершение доказательства: если x_n удовлетворяет сильному закону Бенфорда, т.е. $\tilde{g}(x) = x$, то (3.1) справедливо для любого $g(x) \in G(x_n)$. И обратно: (3.1) влечет $\tilde{g}(x) = x$ для любой функции распределения $-\log x_n \bmod 1$, поскольку мы можем начать с

$$\lim_{N_k \rightarrow \infty} F_{N_k}^{(1)}(x) = \tilde{g}(x),$$

а затем выбрать подпоследовательность N'_k такую, что

$$\lim_{N'_k \rightarrow \infty} F_{N'_k}^{(2)}(x) = g(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Непрерывность $g(x)$ в $x = 0$ является необходимым условием, так как последовательность $x_n = \alpha^n$, $n = 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$, где $\log_b \alpha$ является иррациональным значением, удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , но $G(x_n) = \{c_0(x)\}$, и одноступенчатая d.f. $c_0(x)$, $c_0(x) = 1$ при $x \in (0, 1]$, не удовлетворяет (3.1).

Следующий критерий непрерывности вытекает непосредственно из теоремы 2.1 работы [12].

ТЕОРЕМА 5. Произвольная d.f. $g(x) \in G(x_n)$ непрерывна в $x = 0$ тогда и только тогда, когда для любой подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, асимптотическая плотность $d(n_k) = 0$.

В дальнейших примерах 1, 2 и 3 мы найдем некоторые частные решения уравнения (3.1). Это будет основано на следующем построении последовательностей x_n , удовлетворяющих В.Л.: пусть $g(x)$ есть d.f., непрерывная в $x = 0$, которая является решением (3.1). Тогда согласно [8; с.140, теорема 4.4] существует последовательность $x_n \in (0, 1)$ с a.d.f. $g(x)$, и согласно теореме 4 эта x_n удовлетворяет сильному В.Л. Заметим, что если $g_1(x), \dots, g_k(x)$ – решения (3.1) и

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

то

$$\alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_k g_k(x)$$

также удовлетворяет (3.1). Наконец, заметим, что из [10; с.1–9] следует, что если H – непустой, замкнутый и связный набор решений (3.1), непрерывный в $x = 0$, то существует последовательность $x_n \in (0, 1), n = 1, 2, \dots$, такая, что $H = G(x_n)$ и эта x_n удовлетворяет сильному В.Л.

ПРИМЕР 1. Выберем функцию $g(x)$, возрастающую на интервале $[0, 1/b]$, $g(0) = 0$; и $g(x)$ на $(1/b, 1]$ должна удовлетворять

$$g\left(\frac{1}{b^x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \right) + 1 - x. \quad (3.7)$$

Определенная таким образом функция $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ будет d.f., если выполняются следующие условия:

- (i) $g(x)$ является неубывающей для $x \in (1/b, 1]$;
- (ii) $g(1/b) \leq \lim_{x \rightarrow 1-0} g(1/b^x)$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} g(1/b^x) \leq 1$.

Полагая $g(x) = x$ при $x \in [0, 1/b]$, получим из (3.7)

$$g\left(\frac{1}{b^x}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+x}}\right) \right) + 1 - x = 1 - x + \left(1 - \frac{1}{b^x}\right) \frac{1}{b-1}. \quad (3.8)$$

Заменяя $1/b^x$ на x в (3.8), находим $g(x)$ при $x \in [1/b, 1]$, которая удовлетворяет (i)–(iii), и отсюда имеем следующее решение $g(x)$ уравнения (3.1):

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b}\right], \\ 1 + \frac{\log x}{\log b} + (1-x) \frac{1}{b-1}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для любого члена x_n последовательности, $x_n = 0.0 \dots 0 a_1 a_2 \dots$, где a_1 является первой ненулевой цифрой x_n , определим

- $\tilde{x}_n = 0.a_1 a_2 \dots$, т.е. первые нулевые знаки опускаются;
- $x_n^* = 0.0 a_1 a_2 \dots$, т.е. мы добавляем на первую позицию нулевой знак.

Заметим, что если одна из трех последовательностей x_n , $\tilde{x}_n$ и x_n^* удовлетворяет сильному В.Л., то все три последовательности x_n , $\tilde{x}_n$ и x_n^* одновременно удовлетворяют сильному В.Л.²

ПРИМЕР 2. По определению сильного В.Л. последовательность $x_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, и $\tilde{x}_n$, $n = 1, 2, \dots$, одновременно удовлетворяют сильному В.Л. Поскольку $\tilde{x}_n \in [1/b, 1)$, то каждая $\tilde{g}(x) \in G(\tilde{x}_n)$ является непрерывной в $x = 0$ и следовательно x_n удовлетворяет В.Л. тогда и только тогда, когда для любой $\tilde{g}(x) \in G(\tilde{x}_n)$ справедливо уравнение (3.1). Так как $\tilde{g}(x) = 0$ для $x \in [0, 1/b]$, то уравнение (3.1) имеет вид $x = 1 - \tilde{g}(1/b^x) + 0$ при $x \in [0, 1]$ и отсюда

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b}\right], \\ 1 + \frac{\log x}{\log b}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.10)$$

ПРИМЕР 3. А.д.ф. $g^*(x)$ последовательности x_n^* может быть вычислена по формуле $g^*(x) = \tilde{g}(f^{-1}(x))$, где $f(x) = x/b$. Таким образом, имеем

$$g^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b^2}\right], \\ 2 + \frac{\log x}{\log b}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}\right], \\ 1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right] \end{cases} \quad (3.11)$$

и для $g^*(x)$ справедливо уравнение (3.1). Аналогично, полагая $x_n^{**} = 0.00a_1a_2\dots$, а.д.ф. последовательности x_n^{**} , $n = 1, 2, \dots$, есть

$$g^{**}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b^3}\right], \\ 3 + \frac{\log x}{\log b}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^2}\right], \\ 1, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b^2}, 1\right] \end{cases} \quad (3.12)$$

и $g^{**}(x)$ снова удовлетворяет уравнению (3.1).

А.д.ф. $\tilde{g}(x)$ последовательности $\tilde{x}_n$, $n = 1, 2, \dots$, может быть вычислена непосредственно из а.д.ф. $g(x)$ последовательности x_n , $n = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что $x_n \in (0, 1)$ имеет непрерывную в $x = 0$ а.д.ф. $g(x)$. Тогда последовательность $\tilde{x}_n$ имеет а.д.ф. $\tilde{g}(x)$ вида

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{x}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right) \quad (3.13)$$

для $x \in [1/b, 1]$ и $\tilde{g}(x) = 0$ для $x \in [0, 1/b]$.

²Для последовательности $x_n \in (0, 1)$ набор всех д.ф. $G(x_n)$ не зависит от основания b , по которому представлено x_n , а последовательность $\tilde{x}_n$ зависит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое $t \in [1/b^{i+1}, 1/b^i)$ имеет i первых знаков равные нулю и отсюда $tb^i \in [1/b, 1)$. Поэтому, для любого $x \in [1/b, 1)$ имеем единственное $t = x/b^i$ такое, что $t \in [1/b^{i+1}, 1/b^i)$. Кроме того,

$$\frac{\#\{n \leq N; x_n \in [1/b^{i+1}, x/b^i)\}}{N} \rightarrow g\left(\frac{x}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right), \quad (3.14)$$

и выражение (3.13) следует из непрерывности $g(x)$ в $x = 0$.

ПРИМЕР 4. Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность на $(0, 1)$ с a.d.f. $g(x)$, определенной из (3.9). По теореме 4 последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b . По теореме 6, если $x \in [1/b, 1]$, то мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{x}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right) = g(x) - \frac{1}{b} + \left(x - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{b} + \left(x - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{b^2} + \dots \\ &= 1 + \log_b x + (1-x) \frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} + \left(x - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{b-1}, \end{aligned}$$

что обеспечивает равенство $1 + \log_b x$ и (3.10), что и ожидается.

Из примера 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 7. Последовательность $x_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b тогда и только тогда, когда $\tilde{x}_n$, $n = 1, 2, \dots$, имеет a.d.f. вида (3.10). Кроме того, если последовательность $x_n \in (0, 1)$ имеет a.d.f. (3.10), то эту a.d.f. имеет также $\tilde{x}_n$.

Следующая теорема упрощает функциональное уравнение (3.1) в теореме 4.

ТЕОРЕМА 8. Предположим, что d.f. $g(x) \in G(x_n)$ непрерывна в $x = 0$. Тогда x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b только тогда, когда

$$1 + \log_b x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{x}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right) \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right] \quad (3.15)$$

для любой d.f. $g(x) \in G(x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим d.f. $g(x) \in G(x_n)$ непрерывна в $x = 0$ и $F_{N_i}(x) \rightarrow g(x)$ при $i \rightarrow \infty$ (см. (2.5)). Аналогично описанному в теореме 6 последовательность $\tilde{x}_n$ имеет d.f. $\tilde{g}(x)$ вида (3.13) для той же последовательности индексов N_i . Из теоремы 7 следует, что $\tilde{g}(x)$ для любой последовательности индексов N_i должна иметь вид (3.10), который обеспечивает (3.15).

Альтернативное доказательство следует из (3.1), превращая b^x в x .

Как можно видеть из следующих примеров 5 и 6, существует последовательность целых чисел, удовлетворяющая сильному В.Л. для произвольного основания b , но это не справедливо для последовательностей $x_n \in (0, 1)$.

ПРИМЕР 5. Согласно [10; с. 2–117, 2.12.14] последовательность

$$\alpha n \log^{\tau} n \bmod 1, \quad \alpha \neq 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad (3.16)$$

является u.d. Отсюда следует, что $x_n = n^n$ удовлетворяет сильному В.Л. для произвольного целого основания b , поскольку

$$\log_b n^n = n \log n \frac{1}{\log b}.$$

В этом случае последовательность обратных значений $1/x_n \in (0, 1)$ имеет a.d.f. $c_0(x)$, которая разрывна в $x = 0$.

ПРИМЕР 6. Согласно [10; с. 2–117, 2.12.15] последовательность

$$\alpha n^2 \log^\tau n \bmod 1, \quad \alpha \neq 0, \quad 0 < \tau \leq 1, \quad (3.17)$$

является u.d. Отсюда следует, что $x_n = n^{n^2}$ удовлетворяет сильному В.Л. для произвольного целого основания b . И снова последовательность обратных значений $1/x_n$ имеет a.d.f. $c_0(x)$.

ПРИМЕР 7. Последовательность $x_n = b^{\{n\alpha\}}$, $n = 1, 2, \dots$, где α является иррациональным, удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , но не сильному по основанию b^r при $r \geq 2$, так как

$$\log_{b^r} b^{\{n\alpha\}} = \frac{\{n\alpha\}}{r} \in \left[0, \frac{1}{r}\right).$$

Более того, x_n не удовлетворяет В.Л. по основанию b^r порядка 1, потому что каждая d.f. $g(x)$ последовательности $\{n\alpha\}/r$ является константой на $[1/r, 1]$, и при $x = 0.(b-1)(b-1)\dots(b-1)$ имеем $1-x = 1/b^r$. Таким образом, $g(x) \neq x$, и критерий теоремы 1 не выполняется.

В следующих примерах мы можем видеть, что существует последовательность $x_n \in (0, 1)$, которая удовлетворяет В.Л. по конечному набору различных оснований.

ПРИМЕР 8. Пусть $x_n \in (0, 1)$ есть последовательность с a.d.f. $g_1(x)$ вида (3.10), т.е.

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b_1}\right], \\ 1 + \log_{b_1} x, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b_1}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.18)$$

Тогда согласно примеру 2 эта последовательность удовлетворяет сильному В.Л. по b_1 . Вычислим теперь все основания b , для которых x_n в то же время удовлетворяет В.Л. Каждое такое b должно удовлетворять (3.15) с $g(x) = g_1(x)$ и при $x \in [1/b, 1]$. Что обеспечивает неравенство (3.22) (см. ниже в доказательстве теоремы 9) вида

$$1 + \log_b x \leq g_1(x) \leq 1 + \log_b x + g_1\left(\frac{1}{b}\right).$$

а) Пусть $b_1 < b$. Тогда при $x \in [1/b, 1/b_1]$ имеем $g_1(x) = 0$, что противоречит (3.22).

б) Пусть $b < b_1$. Предположим, что k есть первое положительное целое такое, что

$$\frac{1}{b^k} \leq \frac{1}{b_1} < \frac{1}{b^{k-1}}.$$

Тогда (3.15) имеет вид

$$1 + \log_b x = \sum_{i=0}^{k-1} \left(g_1\left(\frac{x}{b^i}\right) - g_1\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right), \quad (3.19)$$

где

$$g_1\left(\frac{x}{b^i}\right) - g_1\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) = \left(1 + \log_{b_1} \frac{x}{b^i}\right) - \left(1 + \log_{b_1} \frac{1}{b^{i+1}}\right),$$

$i = 1, 2, \dots, k-2$. При $i = k-1$ имеем $g_1(1/b^k) = 0$, и

$$g_1\left(\frac{x}{b^{k-1}}\right) = 1 + \log_{b_1} \frac{x}{b^{k-1}} \quad \text{для } x \in \left[\frac{b^{k-1}}{b_1}, 1\right].$$

Таким образом, (3.19) имеет вид

$$1 + \log_b x = \log_{b_1} \left(x \cdot \frac{x}{b} \cdots \frac{x}{b^{k-1}}\right) - \log_{b_1} \left(\frac{1}{b} \cdots \frac{1}{b^{k-1}}\right) + 1 = 1 + \log_{b_1} x^k, \quad (3.20)$$

и уравнение (3.20) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\frac{\log x}{\log b} = \frac{k \log x}{\log b_1},$$

что эквивалентно $b_1 = b^k$. В случае $b_1 = b^k$ имеем

$$x \in \left[\frac{b^{k-1}}{b_1}, 1\right] = \left[\frac{1}{b}, 1\right]$$

и, следовательно, x_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет сильному В.Л. также для оснований b , которые являются целыми корнями b_1 .

Получим аналогичный результат также для d.f. вида (3.9).

ПРИМЕР 9. Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность на $(0, 1)$ с a.d.f. $g(x)$, определяемой из (3.9) при $b = b_1$, т.е.

$$g_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{b_1}\right], \\ 1 + \log_{b_1} + (1-x) \frac{1}{b_1 - 1}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{b_1}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.21)$$

Тогда по теореме 4 последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b_1 . Далее мы найдем все другие основания b , для которых x_n снова удовлетворяет сильному В.Л. Каждое такое b должно удовлетворять (3.15) с $g(x) = g_1(x)$ при $x \in [1/b, 1]$.

а) Пусть $b_1 < b$. Тогда при $x \in [1/b, 1]$ имеем

$$\frac{x}{b^i}, \frac{1}{b^{i+1}} \in \left[0, \frac{1}{b_1}\right] \quad \text{для } i = 1, 2, \dots,$$

и уравнение (3.15) имеет вид

$$1 + \log_b x = g_1(x) - g_1\left(\frac{1}{b}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{b^i} - \frac{1}{b^{i+1}}\right),$$

а при $x \in [1/b, 1/b_1]$ имеем $g_1(x) - g_1(1/b) = x - 1/b$ и

$$1 + \log_b x = \left(x - \frac{1}{b}\right) \frac{b}{b-1}.$$

Противоречие.

б) Пусть $b < b_1$, и пусть k – такое целое, что

$$\frac{1}{b^k} \leq \frac{1}{b_1} < \frac{1}{b^{k-1}}.$$

Во всех случаях $x \in [1/b, 1]$ влечет

$$\frac{x}{b^i} \in \left[\frac{1}{b^{i+1}}, \frac{1}{b^i} \right].$$

Для случая б) имеем

(i) на интервалах $[1/b^{i+1}, 1/b^i]$, $i = 1, 2, \dots, k-2$, d.f. $g_1(x)$ имеет вид

$$g_1(x) = 1 + \log_{b_1} x + (1-x) \frac{1}{b_1 - 1};$$

(ii) тот же вид $g_1(x)$ имеем также на $[1/b_1, 1/b^{k-1}]$;

(iii) на интервалах $[1/b^{i+1}, 1/b^i]$, $i = k, k+1, \dots$, d.f. $g_1(x) = x$.

Пользуясь (i)–(iii) для

$$g_1\left(\frac{x}{b^i}\right), \quad g_1\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right), \quad g_1\left(\frac{x}{b^{k-1}}\right), \quad g_1\left(\frac{1}{b^k}\right),$$

находим (3.15) вида

$$\begin{aligned} 1 + \log_b(x) &= \log_{b_1} x \frac{x}{b} \cdots \frac{x}{b^{k-2}} - \log_{b_1} \frac{1}{b} \cdots \frac{1}{b^{k-1}} \\ &\quad - \frac{x}{b_1 - 1} \left(1 + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b^{k-2}} \right) + \frac{1}{b_1 - 1} \left(\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b^{k-1}} \right) \\ &\quad + \left(1 + \log_{b_1} \frac{x}{b^{k-1}} + \left(1 - \frac{x}{b^{k-1}} \right) \frac{1}{b_1 - 1} \right) - \frac{1}{b^k} \\ &\quad + \frac{x}{b^k} \frac{1}{1 - 1/b} - \frac{1}{b^{k+1}} \frac{1}{1 - 1/b}. \end{aligned}$$

Просуммировав получим, что для $x/b^{k-1} \in [1/b_1, 1/b^{k-1}]$ соотношение

$$1 + \log_b x = 1 + \log_{b_1} x^k + (1-x) \frac{b(b^k - 1)}{(b_1 - 1)(b - 1)b^k} - (1-x) \frac{b}{(b - 1)b^k},$$

справедливо только, если $b_1 = b^k$. В этом случае

$$\frac{x}{b^{k-1}} \in \left[\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b^{k-1}} \right] \iff x \in \left[\frac{b^{k-1}}{b_1}, 1 \right] \iff x \in \left[\frac{1}{b}, 1 \right]$$

и (3.15) справедливо. Таким образом, последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. также для основания $b = \sqrt[k]{b_1}$.

Примеры 8 и 9 дали импульс к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 9. *Предположим, что для последовательности $x_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, каждая d.f. $g(x) \in G(x_n)$ является непрерывной в $x = 0$. Тогда существует лишь конечно много различных целых оснований b , для которых последовательность x_n одновременно удовлетворяет сильному В.Л. Более того, если последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , и для некоторого $k = 1, 2, \dots$ существует k -й целый корень $\sqrt[k]{b}$, то x_n удовлетворяет сильному В.Л. также по основанию $\sqrt[k]{b}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Предположим, что x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , и пусть $g(x) \in G(x_n)$. Тогда по теореме 8 при $x \in [1/b, 1]$ имеем (3.15). Перепишем его в виде

$$g(x) = 1 + \log_b x + g\left(\frac{1}{b}\right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(g\left(\frac{x}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right);$$

отсюда

$$1 + \log_b x \leq g(x) \leq 1 + \log_b x + g\left(\frac{1}{b}\right). \quad (3.22)$$

Если последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. для бесконечно многих b , то (3.22) влечет $g(x) = 1$ при $x \in (0, 1]$ – противоречие. Количественно, если $g(x_0) < 1$, то или $x_0 < 1/b$, т.е. $b < 1/x_0$, или $1/b \leq x_0$, и из (3.22) имеем $1 + \log_b x_0 \leq g(x_0)$, а тогда

$$1 - g(x_0) \leq \frac{-\log x_0}{\log b},$$

откуда

$$b \leq \max\left(\frac{1}{x_0}, e^{-\log x_0 / (1 - g(x_0))}\right). \quad (3.23)$$

2°. Теперь предположим, что x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , т.е. последовательность $\log_b x_n \bmod 1$ является u.d. Применяя известный критерий Вейля, имеем следующую цепь последствий:

(i) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h \log_b x_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

и при каждом $h = 1, 2, \dots$, поэтому

(ii) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h k \log_b x_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

и при каждом $h, k = 1, 2, \dots$ и, следовательно, получим, что

(iii) x_n^k снова удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b ;

(iv) таким образом, если $g(x) \in G(x_n)$, то $g(\sqrt[k]{x}) \in G(x_n^k)$ и наоборот, поскольку

$$x_n^k < x \iff x_n < \sqrt[k]{x};$$

(v) далее, для каждой непрерывной в $x = 0$ d.f. $g(x)$, $g(x)$ и $g(\sqrt[k]{x})$, $k = 1, 2, \dots$, одновременно разрешают (3.15).

Следовательно, (3.15) влечет

$$1 + \log_b x = \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\sqrt[b^i]{x}\right) - g\left(\sqrt[b^{i+1}]{x}\right) \right) \quad \text{для } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right]. \quad (3.24)$$

Пользуясь для упрощения соотношением

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{1}{b^{i+1}}\right) \right) = 1,$$

перепишем (3.15) в виде

$$1 + \log_b x = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{b^i}\right) - g\left(\frac{x}{b^i}\right) \right) \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right], \quad (3.25)$$

а (3.24) – в виде

$$1 + \log_b x = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\sqrt[k]{\frac{1}{b^i}}\right) - g\left(\sqrt[k]{\frac{x}{b^i}}\right) \right) \quad \text{для } x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right]. \quad (3.26)$$

Пусть для целого k у нас есть целый корень $\sqrt[k]{b}$. Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 1 + \log_b x = 1 + \log_{\sqrt[k]{b}} \sqrt[k]{x}; \\ \text{(ii)} \quad & g\left(\sqrt[k]{\frac{1}{b^i}}\right) - g\left(\sqrt[k]{\frac{x}{b^i}}\right) = g\left(\frac{1}{(\sqrt[k]{b})^i}\right) - g\left(\frac{\sqrt[k]{x}}{(\sqrt[k]{b})^i}\right); \\ \text{(iii)} \quad & x \in \left[\frac{1}{b}, 1\right] \iff \sqrt[k]{x} \in \left[\frac{1}{\sqrt[k]{b}}, 1\right] \end{aligned}$$

и делая замену $\sqrt[k]{x} \rightarrow x$, получим (3.26) в виде

$$1 + \log_{\sqrt[k]{b}} x = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \left(g\left(\frac{1}{(\sqrt[k]{b})^i}\right) - g\left(\frac{x}{(\sqrt[k]{b})^i}\right) \right). \quad (3.27)$$

Согласно теореме 8 последовательность x_n удовлетворяет сильной В.Л. по основанию $\sqrt[k]{b}$.

4. Простые следствия теории равномерного распределения. Дьяконис [4] и Павлов [11] были первыми, кто применил теорию равномерного распределения к закону Бенфорда (В.Л.). Например, Дьяконис, пользуясь критерием Кеннеди (см. [10; с. 2–13, 2.2.9]), доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. Если последовательность $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left| \log \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \infty. \quad (4.1)$$

Павлов доказал посредством разностной теоремы Ван дер Корпута [8; с. 26, теорема 3.1] следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Если для каждого $k = 1, 2, \dots$ последовательность отношений x_{n+k}/x_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b , то первоначальная последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$, также удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b .

Для полноты далее представим несколько других приложений.

ТЕОРЕМА 12. Положительные последовательности x_n и $1/x_n$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют сильному В.Л. по основанию b одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе последовательности u_n и $-u_n$ являются u.d. mod 1 одновременно, поскольку их суммы Вейля являются комплексно сопряженными в отношении друг друга.

ТЕОРЕМА 13. Положительные последовательности x_n и nx_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяют сильному В.Л. по основанию b одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе последовательности u_n и $u_n + \log n$ являются u.d. mod 1 одновременно (см. [10; с. 2–27, 2.3.6.]).

ТЕОРЕМА 14. Предположим, что последовательность $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots$ удовлетворяет сильному В.Л. по целому основанию $b > 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_n}{\log n} = \infty. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Нидеррайтера следует [10; с. 2–12, 2.2.8]: каждая монотонная u.d. последовательность $u_n \bmod 1$ должна удовлетворять

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\log n} = \infty.$$

Здесь достаточно положить $u_n = \log x_n$ вместо $u_n = \log_b x_n$.

ТЕОРЕМА 15. Для последовательности $x_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, предположим, что

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ монотонно;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(x_{n+1}/x_n) = 0$ монотонно.

Тогда последовательность x_n удовлетворяет сильному В.Л. по любому основанию b только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{x_{n+1}}{x_n} = \infty. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из разностной теоремы Фейерса в виде из [10; с. 2–13, 2.2.11].

Утверждение [10; с. 2–14, 2.2.12] влечет следующее.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $x_n > 0$ – последовательность, которая удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b \frac{x_{n+1}}{x_n} = \theta,$$

где θ является иррациональным. Тогда x_n удовлетворяет сильному В.Л. по основанию b .

Можно также изучать асимптотическую плотность первоначальных цифр последовательностей без В.Л.

ПРИМЕР 10. Известно, что возрастающая последовательность всех натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$ не удовлетворяет сильному В.Л. (так же, как и простому В.Л.) по любому основанию $b \geq 2$. Что следует из того факта, что $\log_b n \bmod 1$ не является u.d. Для плотности n , для которой r первоначальных цифр – это $K = k_1 k_2 \dots k_r$, Павлов [11] доказал, что

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N; n \text{ имеет первых } r \text{ цифр} = K\}}{N} = \frac{1}{K(b-1)}, \quad (4.4)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N; n \text{ имеет первых } r \text{ цифр} = K\}}{N} = \frac{b}{(K+1)(b-1)}. \quad (4.5)$$

Добавим следующее: по Пойя и Сегё [13] d.f. функция $\log_b n \bmod 1$ есть функция вида

$$g_u(x) = \frac{b^{\min(x,u)} - 1}{b^u} + \frac{1}{b^u} \frac{b^x - 1}{b - 1}, \quad (4.6)$$

где параметр u пробегает $[0, 1]$. Согласно Джулиано и Штрауху [14] для возрастающей последовательности N_i , $i = 1, 2, \dots$, имеем (см. (2.4)) импликацию

$$\log_b N_i \bmod 1 \rightarrow u \quad \implies \quad F_{N_i}(x) \rightarrow g_u(x) \quad (4.7)$$

и, следовательно,

$$\frac{\#\{n \leq N_i; n \text{ имеет первых } r \text{ знаков} = K\}}{N_i} \rightarrow g_u(x_2) - g_u(x_1) \quad (4.8)$$

при $i \rightarrow \infty$, где

$$x_1 = \log_b(k_1.k_2k_3\dots k_r), \quad x_2 = \log_b(k_1.k_2k_3\dots (k_r + 1)).$$

Теперь результаты Павлова (4.4) и (4.5) следуют из

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N; n \text{ имеет первых } r \text{ цифр} = K\}}{N} &= \min_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1)), \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \leq N; n \text{ имеет первых } r \text{ цифр} = K\}}{N} &= \max_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1)), \end{aligned}$$

где в $u = x_1$ появляется минимум, а в $u = x_2$ — максимум. Далее, если $N_i = [b^{i+u}]$, то $\log_b N_i \bmod 1 \rightarrow u$ при $i \rightarrow \infty$.

Заметим, что Павлов сформулировал свой результат для более общей последовательности an^α , $n = 1, 2, \dots$, где a и α — фиксированные положительные вещественные числа. Полагая

$$f(x) = c_1 + c_2 \log x, \quad \text{где} \quad c_1 = \frac{\log a}{\log b}, \quad c_2 = \frac{\alpha}{\log b},$$

имеем $\log_b x_n = f(n)$ и, применяя теорему 1 из [14], отсюда находим, что любая d.f. $g_u(x) \in G(\log_b x_n)$ имеет вид

$$g_u(x) = \frac{b^{\min(x,u)/\alpha} - 1}{b^{u/\alpha}} + \frac{1}{b^{u/\alpha}} \frac{b^{x/\alpha} - 1}{b^{1/\alpha} - 1}, \quad (4.9)$$

где параметр u пробегает $[0, 1]$ и для возрастающей последовательности N_i , $i = 1, 2, \dots$, имеем

$$\frac{\log a}{\log b} + \alpha \frac{\log N_i}{\log b} \bmod 1 \rightarrow u \quad \implies \quad F_{N_i}(x) \rightarrow g_u(x). \quad (4.10)$$

Теперь, вычисляя производную $d(g_u(x_2) - g_u(x_1))/du$ в (4.8), мы можем видеть, что ее функция сигнум равна ‘−’ при $u \in [0, x_1)$, постоянная (‘+’ или ‘−’) на (x_1, x_2) и ‘−’ — на $(x_2, 1)$. Следовательно, $\min_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1))$ может появиться на $u = x_1, x_2, 1$ и $\max_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1))$ на $u = 0, x_2$. Путем непосредственного вычисления находим результат Павлова

$$\min_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1)) = g_{x_1}(x_2) - g_{x_1}(x_1) = \frac{1}{b^{1/\alpha} - 1} \frac{(K+1)^{1/\alpha} - K^{1/\alpha}}{K^{1/\alpha}}, \quad (4.11)$$

$$\max_{u \in [0,1]} (g_u(x_2) - g_u(x_1)) = g_{x_2}(x_2) - g_{x_1}(x_2) = \frac{b^{1/\alpha}}{b^{1/\alpha} - 1} \frac{(K+1)^{1/\alpha} - K^{1/\alpha}}{(K+1)^{1/\alpha}}. \quad (4.12)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Newcomb, “Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers”, *Amer. J. Math.*, **4** (1881), 39–40.
- [2] F. Benford, “The law of anomalous numbers”, *Proc. Amer. Phil. Soc.*, **78** (1938), 551–572.
- [3] R. A. Raimi, “The first digit problem”, *Amer. Math. Monthly*, **83**:7 (1976), 521–538.
- [4] P. Diaconis, “The distribution of leading digits and uniform distribution mod 1”, *Ann. Probab.*, **5**:1 (1977), 72–81.
- [5] S. Kunoff, “ $N!$ has the first digit property”, *Fibonacci Quart.*, **25**:4 (1987), 365–367.
- [6] P. Schatte, “On mantissa distribution in computing and Benford’s law”, *J. Inform. Process. Cybernet.*, **24**:9 (1988), 443–455.
- [7] K. Nagasaka, S. Kanemitsu, J.-S. Shiue, “Benford’s law: the logarithmic law of first digit”, *Number Theory. v. 1: Elementary and Analytic* (Budapest, 1987), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **51**, North-Holland, Amsterdam, 1990, 361–391.
- [8] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences.*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [9] M. Drmota, R. F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Math., **1651**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [10] O. Strauch, Š. Porubský, *Distribution of Sequences: A Sampler*, Schr. Slowak. Akad. Wiss., **1**, Peter Lang, Frankfurt am Main, 2005.
- [11] А. И. Павлов, “О распределении дробных долей и законе Ф. Бенфорда”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:4 (1981), 760–774.
- [12] P. Kostyrko, M. Mačaj, T. Šalát, O. Strauch, “On statistical limit points”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:9 (2001), 2647–2654.
- [13] G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Band 1, 2, Grundlehren Math. Wiss., **19**, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [14] A. R. Giuliano, O. Strauch, “On weighted distribution functions of sequences”, *Unif. Distrib. Theory*, **3**:1 (2008), 1–18.

В. Балаж

Словацкий технический университет, Братислава, Словакия

E-mail: vladimir.balaz@stuba.sk

Поступило

15.12.2009

К. Нагасака

Университет Хосей, Токио, Япония

E-mail: nagasaka@hosei.ac.jp**О. Штраух**

Математический институт САН, Братислава, Словакия

E-mail: strauch@mat.savba.sk