Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Драгошанский, Анизотропные нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 686–701

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 06:16:35

УДК 517.51

АНИЗОТРОПНЫЕ НОРМЫ ЯДЕР ДИРИХЛЕ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

О. С. Драгошанский

В работе получены новые оценки анизотропных норм для тригонометрических полиномов.

Библиография: 10 названий.

Пусть натуральное $m \geq 2$, $T = [-\pi, \pi)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, а $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{N}^m$ – целочисленные решетки в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_+^m$ соответственно. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, то будем считать, что $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} > \mathbf{y}$), если $x_j \geq y_j$ ($x_j > y_j$) при $j = 1, \dots, m$. Обозначим через

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m x_j y_j, \quad \Pi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^m (|x_j| + 1), \quad \Pi_1(\mathbf{x}) = |x_1 \cdots x_m|.$$

Если $a \in \mathbb{R}$, то через $[a]$ обозначим целую часть a , а через $\mathbf{a}$ – вектор из $\mathbb{R}^m$, все координаты которого равны a . Если $1 \leq k \leq m$, то положим $\mathbf{x}(\hat{k}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)$. Далее, если $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $p_i \in [1, +\infty)$ при $i = 1, \dots, m$, то через $L_{\mathbf{p}}$ обозначим пространство функций f , определенных на T^m , для которых анизотропная норма

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \left(\int_T \left(\int_T \cdots \left(\int_T |f(\mathbf{x})|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \cdots dx_{m-1} \right)^{p_m/p_{m-1}} dx_m \right)^{1/p_m}$$

конечна.

Если измеримое множество $E \subseteq T^m$, а функция $f \in L_{\mathbf{p}}$, то обозначим через $\|f\|_{\mathbf{p}, E}$ норму $\|f X_E\|_{\mathbf{p}}$, где X_E – характеристическая функция множества E . Пусть вектор $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m) > 0$. Тогда положим

$$T_{\boldsymbol{\delta}}^m = \prod_{j=1}^m (T \setminus (-\delta_j, \delta_j)), \quad \|f(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}} = \|f(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}, T_{\boldsymbol{\delta}}^m}.$$

Через A_1 обозначим класс ограниченных непустых множеств $U \subset \mathbb{N}^m$, которые вместе с каждой точкой $\mathbf{k}$ содержат в качестве подмножества $\mathbb{Z}^m \cap \prod_{j=1}^m [1, k_j]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00062.

Если множество $W \subset \mathbb{R}^m$, то

$$D_W(x) = \sum_{n \in W \cap \mathbb{Z}^m} e^{inx}$$

– ядро Дирихле, соответствующее W .

Рядом авторов несколько лет назад изучалась следующая задача. Пусть $B \subset \mathbb{R}^m$ – открытое ограниченное множество такое, что если $x \in B$ и $\alpha \in [-1, 1]$, то $\alpha x \in B$. Требовалось найти асимптотику величины

$$L(rB) = \|D_{rB}(x)\|_1 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

(Здесь $rB = \{x \in \mathbb{R}^m : r^{-1}x \in B\}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$.)

В. А. Юдин в [1] установил, что если верхняя поверхностная мера Минковского границы B конечна, т.е. $\mu\{x \in \mathbb{R}^m : \rho(x, \partial B) < \varepsilon\} \leq C\varepsilon$, то

$$L(rB) = O(r^{(m-1)/2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Л. Кользани и П. Соарди [2] распространили этот результат для метрики L_p ($p \geq 1$). Они доказали, что при тех же условиях на множество B

$$\|D_{rB}(x)\|_p = \begin{cases} O(r^{(m-1)/2}) & \text{при } 1 \leq p < \frac{2m}{m+1}, \\ O(r^{(m-1)/2}(\ln r)^{1/p}) & \text{при } p = \frac{2m}{m+1}, \\ O(r^{m(1-1/p)}) & \text{при } \frac{2m}{m+1} < p < \infty, \end{cases}$$

при $r \rightarrow \infty$. Известно, что если B – шар, то все три оценки точны. Следует также отметить результат, принадлежащий А. А. Юдину и В. А. Юдину [3] и Э. С. Белинскому [4] для $m = 2$ и И. Р. Лифляндю [5] для $m \geq 2$. Пусть $B_r = \{x \in \mathbb{R}^m : \Pi_1(x) \leq r^m \text{ и } |x_j| \leq r^m \text{ при } j = 1, \dots, m\}$.

Тогда $L(B_r) \asymp r^{(m-1)/2}$ при $r \rightarrow \infty$.

М. И. Дьяченко в статье [6] доказал следующую теорему. Пусть множество $U \in A_1$, а $\rho = \max_{n \in U} (\Pi(n))^{1/m}$. Тогда при $p \in [1, 2m/(m+1))$ справедлива оценка

$$\|D_U(x)\|_p \leq C(p, m) \cdot \rho^{(m-1)/2}.$$

Здесь будет доказано такое обобщение этого утверждения для метрики L_p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество $U \in A_1$, а вектор $p = (p_1, \dots, p_m)$ таков, что $p_j \geq 1$ для всех j , среднее гармоническое чисел p_i

$$\hat{p} = \frac{m}{1/p_1 + \dots + 1/p_m} < \frac{2m}{m+1}$$

и для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{p_i} < \frac{m}{2}.$$

Тогда при любом j число $p_j \in (1, 2)$ (это сразу вытекает из условий, наложенных на $\mathbf{p}$), и если

$$\alpha_j = \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) / \left(m - \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\right) \quad \text{при } j = 1, \dots, m, \quad \rho = \max_{\mathbf{n} \in U} (n_1^{\alpha_1} \dots n_m^{\alpha_m}),$$

то справедливо неравенство

$$\|D_U(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot \rho^{(m-1)/2}.$$

Из этой теоремы легко выводится

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть множество $U \in A_1$, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ таков, что для всех j $p_j \in (1, 2)$ и

$$\hat{p} = \frac{m}{1/p_1 + \dots + 1/p_m} < \frac{2m}{m+1}.$$

Тогда найдутся числа $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, такие, что для

$$\rho = \max_{\mathbf{n} \in U} (n_1^{\alpha_1} \dots n_m^{\alpha_m})$$

верно

$$\|D_U(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot \rho^{(m-1)/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, если $p_i = p$, $2(m-1)/m < p < 2m/(m+1)$, то теорема 1 дает тот же результат, что и изотропная теорема Дьяченко. Поскольку для изотропной теоремы условие $p < 2m/(m+1)$ существенно (например, когда $U = rB$, где B – единичный шар), теорема 1 неулучшаема в том смысле, что $2m/(m+1)$ – критическое значение для $\hat{p}$.

Используемый метод доказательства не позволяет оценить $\|D_U(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}}$, когда какое-либо из $p_i \geq 2$. Неизвестно, насколько существенно это ограничение.

Далее, пусть M_1 – множество m -кратных конечных или бесконечных последовательностей $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}=1}^{\infty(M)}$ неотрицательных чисел таких, что если $\mathbf{n} \geq \mathbf{k}$, то $a_{\mathbf{n}} \leq a_{\mathbf{k}}$. Будут рассматриваться тригонометрические полиномы

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}=1}^M a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

с коэффициентами $\{a\} \in M_1$.

Из многомерной теоремы Харди–Литтлвуда следует, что для любого полинома

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^M a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

при $p \in [2, \infty)$ справедлива оценка

$$\|S(\mathbf{x})\|_p \leq C(p, m) \left(\sum_{\mathbf{k}=1}^M |a_{\mathbf{k}}|^p (\Pi(\mathbf{k}))^{p-2} \right)^{1/p},$$

а при $p \in (1, 2]$ – оценка

$$\|S(x)\|_p \geq C(p, m) \left(\sum_{\mathbf{k}=1}^M |a_{\mathbf{k}}|^p (\Pi(\mathbf{k}))^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Я. С. Бугров [7] получил анизотропный аналог теоремы Харди–Литтлвуда. Он выяснил, что для любого вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ такого, что $1 < p_m \leq p_{m-1} \leq \dots \leq p_1 \leq 2$ и для любой функции $f \in L(T^m)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n_m=-\infty}^{+\infty} \dots \left(\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(|a_{\mathbf{n}}(f)| \prod_{j=1}^m (|n_j| + 1)^{1-2/p_j} \right)^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{1/p_m} \\ & \leq C(\mathbf{p}) \cdot \left(\int_T \dots \left(\int_T |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots dx_m \right)^{1/p_m}. \end{aligned}$$

М. И. Дьяченко в статьях [6], [8] и [9] установил, что для полиномов $Q(x)$ с коэффициентами из M_1 при $2 < p < \infty$ выполняется неравенство

$$\|Q(x)\|_p \geq C(p, m) \left(\sum_{\mathbf{k}=1}^M |a_{\mathbf{k}}|^p (\Pi(\mathbf{k}))^{p-2} \right)^{1/p},$$

а при $2m/(m+1) < p < 2$ верна оценка

$$\|S(x)\|_p \leq C(p, m) \left(\sum_{\mathbf{k}=1}^M |a_{\mathbf{k}}|^p (\Pi(\mathbf{k}))^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Для анизотропных норм при $m = 2$ удалось доказать следующее обобщение последнего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть размерность $m = 2$, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ таков, что для $\tilde{p} = \max\{p_1, p_2, 2\}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{3}{\tilde{p}} < 0.$$

Тогда для любого полинома

$$Q(x) = \sum_{(n_1, n_2) \in (1, 1)}^{(M_1, M_2)} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x}$$

с коэффициентами $\{a_{\mathbf{n}}\} \in M_1$ справедлива оценка $\|Q(x)\|_{\mathbf{p}} \leq C(\mathbf{p}) J_{\mathbf{p}}(a)$, где

$$J_{\mathbf{p}}(a) = \left(\sum_{n_2=1}^{M_2} \left(\sum_{n_1=1}^{M_1} a_{\mathbf{n}}^{p_1} n_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} n_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2}.$$

Отсюда сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если при $m = 2$

$$\sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

– ряд с коэффициентами $\{a\} \in M_1$ и при некотором $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, удовлетворяющем условиям теоремы 2, имеем $J_{\mathbf{p}}(a) < \infty$, то этот ряд является рядом Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in L_{\mathbf{p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если все компоненты вектора $\mathbf{p}$ p_1 и $p_2 \leq 2$, то условие на $\mathbf{p}$ становится таким:

$$\hat{p} = \frac{2}{1/p_1 + 1/p_2} \geq \frac{4}{3}.$$

Поэтому при $p_1 = p_2 = p \leq 2$ теорема 2 дает тот же результат, что и ее изотропный аналог. Поскольку для изотропной теоремы условие $p > 2m/(m+1) = 4/3$ существенно (например, когда $U = rB$, где B – единичный шар), теорема 2 неулучшаема в том смысле, что $2m/(m+1)$ – критическое значение для $\hat{p}$, если все $p_i \leq 2$.

Преимуществом теорем 1 и 2 является то, что их можно применять для таких $\mathbf{p}$, у которых некоторые компоненты p_i меньше (теорема 2) или больше (теорема 1) критического значения $2m/(m+1)$.

Доказательства теорем 1 и 2 являются модификациями доказательств из [6].

Нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}=1}^M a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

– полином с коэффициентами $a \in M_1$. Обозначим $\|a\|_{\infty} = \max_{1 \leq \mathbf{n} \leq M} a_{\mathbf{n}}$. Пусть $M_i = \min_{1 \leq j \leq m} M_j$. Далее, пусть вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ таков, что $p_k \in (1, 2)$,

$$\sum_{j=1, j \neq k}^m \frac{1}{p_j} < \frac{m}{2} \quad \text{для всех } k, \quad \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} > \frac{m+1}{2}.$$

Тогда

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} \leq C(\mathbf{p}, m) \|a\|_{\infty} M_i^{(\sum_{j \neq i} 1/p_j - (m-1)/2)} \prod_{j \neq i} M_j^{(1-1/p_j)}.$$

Кроме того, для любых чисел $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, таких, что $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$, и для любого вектора $\delta \in (0, 1]^m$ справедливо неравенство

$$\|Q(\mathbf{x})\|_{\delta, 2} \leq C(\mu, m) \|a\|_{\infty} M_1^{(1-\mu_1)/2} \dots M_m^{(1-\mu_m)/2} \cdot \delta_1^{-\mu_1/2} \dots \delta_m^{-\mu_m/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение для $i = 1$. (Доказательство для других i проводится аналогично.)

Пусть $I_{\mathbf{n}}$ — m -мерный куб с центром в точке $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m$ с ребрами длины 1, параллельными осям координат. Положим $B = \bigcup_{\mathbf{n}=1}^M I_{\mathbf{n}}$ и определим функцию

$$\varphi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}=1}^M a_{\mathbf{n}} X_{I_{\mathbf{n}}}(\mathbf{t}) \quad \text{при } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда преобразование Фурье функции φ

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \int_B \varphi(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} = \sum_{\mathbf{n}=1}^M a_{\mathbf{n}} \int_{I_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} = \left(\prod_{j=1}^m \frac{2 \sin(x_j/2)}{x_j} \right) \cdot \sum_{\mathbf{n}=1}^M a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}.$$

Так как при $\mathbf{x} \in T^m$ имеем $1 \leq x_j / (2 \sin(x_j/2)) \leq \pi/2$, то при любом $\mathbf{p}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^m} \|Q(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} &= \left\| \frac{1}{(2\pi)^m} \cdot \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \left(\prod_{j=1}^m \frac{x_j}{2 \sin(x_j/2)} \right) \right\|_{\mathbf{p}} \leq \|\tilde{\varphi}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} \\ &= \left(\int_T \left(\int_T \cdots \left(\int_T \left| \int_B \varphi(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} \right|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \cdots dx_{m-1} \right)^{p_m/p_{m-1}} dx_m \right)^{1/p_m}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $y_i = M_i x_i$, $s_i = M_i^{-1} t_i$. Положив

функцию $\psi(\mathbf{s}) = \varphi(M_1 s_1, \dots, M_m s_m)$;
множество $B' = \{\mathbf{s} : (M_1 s_1, \dots, M_m s_m) \in B\}$;
число $\varkappa(\mathbf{M}) = M_1 \cdots M_m M_1^{-1/p_1} \cdots M_m^{-1/p_m}$;
полуинтервалы $T M_j = [-\pi M_j, \pi M_j]$, $j = 1, \dots, m$,

получим

$$\begin{aligned} \|Q(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} &\leq \varkappa(\mathbf{M}) \cdot \left(\int_{T M_m} \cdots \left(\int_{T M_1} \left| \int_{B'} \psi(\mathbf{s}) e^{i\mathbf{s}\mathbf{y}} d\mathbf{s} \right|^{p_1} dy_1 \right)^{p_2/p_1} \cdots dy_m \right)^{1/p_m} \\ &= \varkappa(\mathbf{M}) \left\| \int_{B'} \psi(\mathbf{s}) e^{i\mathbf{s}\mathbf{y}} d\mathbf{s} \right\|_{\mathbf{p}, T M_1 \times \cdots \times T M_m}, \end{aligned}$$

что по неравенству Минковского не превосходит

$$\varkappa(\mathbf{M}) \cdot \sum_{\lambda=0}^1 \|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}, T M_1^{(\lambda_1)} \times \cdots \times T M_m^{(\lambda_m)}},$$

где вектор $\lambda \in \mathbb{R}^m$, а полуинтервалы $T M_j^{(0)} = [0, \pi M_j]$, $T M_j^{(1)} = [-\pi M_j, 0]$.

Оценим $\|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}, T M_1^{(0)} \times \cdots \times T M_m^{(0)}}$ (остальные нормы оцениваются так же).

Введем множества

$$\begin{aligned} T_M^m &= T M_1^{(0)} \times \dots \times T M_m^{(0)}, \\ B_{\mathbf{k}} &= T_M^m \cap \prod_{j=1}^m [2_-^{k_j-1}, 2^{k_j}), \quad \text{где } 2_-^a = \begin{cases} 2^a & \text{при } a \geq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ 0 &\leq \mathbf{k} \leq \boldsymbol{\xi} = ([\log_2 M_1] + 3, \dots, [\log_2 M_m] + 3). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}, T_M^m} \leq \sum_{\mathbf{k}=0}^{\boldsymbol{\xi}} \|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}, B_{\mathbf{k}}}.$$

Теперь, обозначив через $B_{\mathbf{k}}^{(i)}$ проекцию $B_{\mathbf{k}}$ на i -ю координатную ось и применив m раз неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}, B_{\mathbf{k}}} \\ &= \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(m)}} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(m-1)}} \dots \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(1)}} |\tilde{\psi}(\mathbf{y})|^{p_1} dy_1 \right)^{p_2/p_1} \dots dy_{m-1} \right)^{p_m/p_{m-1}} dy_m \right)^{1/p_m} \\ &\leq (\mu B_{\mathbf{k}}^{(1)})^{(2-p_1)/(2p_1)} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(m)}} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(m-1)}} \dots \left(\int_{B_{\mathbf{k}}^{(1)}} |\tilde{\psi}(\mathbf{y})|^2 dy_1 \right)^{p_2/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots dy_{m-1} \right)^{p_m/p_{m-1}} dy_m \right)^{1/p_m} \\ &\leq \dots \leq \prod_{j=1}^m (\mu B_{\mathbf{k}}^{(j)})^{(2-p_j)/(2p_j)} \cdot \|\tilde{\psi}(\mathbf{y})\|_{B_{\mathbf{k}}, 2}. \end{aligned}$$

Положим для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^r$ число $\nu(\mathbf{k}) = \nu(k_1, \dots, k_r) = \max\{k_1, \dots, k_r\}$. По теореме Планшереля

$$\left(\int_{B_0} |\tilde{\psi}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2} \leq C(m) \cdot \max_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m} |\psi(\mathbf{s})| \cdot (\mu(B'))^{1/2} \leq C(m) \cdot \|a\|_{\infty} \cdot 2^{-\nu(\mathbf{0})/2}.$$

Если $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, то, используя результаты В.А. Юдина [1, с. 404] и М.И. Дьяченко [6, с. 9–10], будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}} |\tilde{\psi}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{|\mathbf{y}| > 2^{\nu(\mathbf{k})-1}} |\tilde{\psi}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2} \\ &\leq C(m) \cdot \omega(\psi, 2^{-\nu(\mathbf{k})})_2 \leq C(m) \cdot \|a\|_{\infty} \cdot 2^{-\nu(\mathbf{k})/2}. \end{aligned}$$

Так как $(\mu B_{\mathbf{k}}^{(j)}) \leq 2^{k_j}$, то

$$\begin{aligned} \|Q(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}} &\leq C(m) \|a\|_{\infty} \cdot M_1^{1-1/p_1} \dots M_m^{1-1/p_m} \\ &\quad \times \sum_{\mathbf{k}=0}^{\boldsymbol{\xi}} 2^{k_1(1/p_1-1/2) + \dots + k_m(1/p_m-1/2) - \nu(\mathbf{k})/2}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично устанавливается, что для любого $\delta \in (0, 1]^m$ справедливо неравенство

$$\|Q(x)\|_{\delta, 2} \leq C(m) \cdot \|a\|_{\infty} \cdot M_1^{1/2} \dots M_m^{1/2} \cdot \sum_{\mathbf{k}=\xi'}^{\xi} 2^{-\nu(\mathbf{k})/2},$$

где $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_m) = ([\log_2(\delta_1 M_1)], \dots, [\log_2(\delta_m M_m)])$. Но

$$\sum_{\mathbf{k}=\xi'}^{\xi} 2^{-\nu(\mathbf{k})/2} \leq \prod_{j=1}^m \sum_{k_j=\xi'_j}^{\infty} 2^{-k_j \mu_j / 2} \leq C(\mu) \cdot \prod_{j=1}^m 2^{-\xi'_j \mu_j / 2} \leq C(\mu) \cdot \prod_{j=1}^m (\delta_j M_j)^{-\mu_j / 2},$$

что и доказывает второе утверждение леммы.

Далее, для множества $W \subseteq \{1, \dots, m\}$, чисел $k \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \dots, m\}$ определим функции

$$h(W, i, k) = \begin{cases} \infty, & \text{если } i \in W, \\ k & \text{иначе;} \end{cases} \quad l(W, i, k) = \begin{cases} k+1, & \text{если } i \in W, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k}=0}^{\xi} 2^{\sum_{i=1}^m k_i(1/p_i - 1/2) - \nu(\mathbf{k})/2} \\ & \leq \sum_{W \subseteq \{2, \dots, m\}} \sum_{k_1=0}^{\xi_1} 2^{k_1(1/p_1 - 1/2)} \sum_{k_2=l(W, 2, k_1)}^{h(W, 2, k_1)} \dots \sum_{k_m=l(W, m, k_1)}^{h(W, m, k_1)} 2^{\sum_{i=2}^m k_i(1/p_i - 1/2) - \nu(\mathbf{k})/2} \\ & = \sum_{W \subseteq \{2, \dots, m\}} S_W. \end{aligned}$$

Достаточно оценить S_W для $W = \{r, \dots, m\}$, где $r = 2, \dots, m+1$ (при $r > m$ считаем $W = \emptyset$). В этом случае

$$\begin{aligned} S_W & \leq \sum_{k_1=0}^{\xi_1} 2^{k_1(1/p_1 - 1/2)} \sum_{k_2=0}^{k_1} 2^{k_2(1/p_2 - 1/2)} \dots \sum_{k_{r-1}=0}^{k_1} 2^{k_{r-1}(1/p_{r-1} - 1/2)} \\ & \quad \times \left(\sum_{k_r=k_1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=k_1}^{\infty} 2^{\sum_{i=r}^m k_i(1/p_i - 1/2) - \nu(k_r, \dots, k_m)/2} \right). \end{aligned}$$

Найдем числа $\lambda_i(\mathbf{p}) > 0$ при $i = r, \dots, m$ такие, что $\sum_{i=r}^m \lambda_i = 1$ и $1/p_j - 1/2 - \lambda_j/2 < 0$ для всех j . (У нас $\sum_{j=2}^m 1/p_j < m/2$; следовательно, $\sum_{j=r}^m 2(1/p_j - 1/2) < 1$ и такие λ_i действительно найдутся.) Тогда

$$\begin{aligned} S_W & \leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{k_1=0}^{\xi_1} 2^{\sum_{j=1}^{r-1} (1/p_j - 1/2) k_j} \prod_{j=r}^m \left(\sum_{k_j=k_1}^{\infty} 2^{(1/p_j - 1/2 - \lambda_j/2) k_j} \right) \\ & \leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{k_1=0}^{\xi_1} 2^{\sum_{j=1}^{r-1} (1/p_j - 1/2) k_j + \sum_{j=r}^m (1/p_j - 1/2 - \lambda_j/2) k_j} \\ & = C(\mathbf{p}, m) \sum_{k_1=0}^{\xi_1} 2^{(\sum_{i=1}^m 1/p_i - (m+1)/2) k_1} \\ & \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot 2^{\xi_1(\sum_{i=1}^m 1/p_i - (m+1)/2)} \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot M_1^{(\sum_{i=1}^m 1/p_i - (m+1)/2)}. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\|Q(x)\|_{\mathbf{p}} \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot \|a\|_{\infty} \cdot M_1^{(\sum_{i=2}^m 1/p_i - (m-1)/2)} \cdot M_2^{(1-1/p_2)} \dots M_m^{(1-1/p_m)}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение леммы остается справедливым для полиномов вида

$$Q(x) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{M}_1}^{\mathbf{M}_2} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}x},$$

где коэффициенты $a_{\mathbf{k}} \in M_1$, если в правых частях ее оценок заменить вектор $\mathbf{M}$ на вектор $\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $m = 1$ второе утверждение леммы тоже верно, что следует из известного для полинома с монотонными коэффициентами неравенства

$$|Q(x)| \leq C \cdot \|a\|_{\infty} \frac{1}{|x|} \quad \text{при } |x| < \pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим

$$W = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^m : V_{\mathbf{n}} = U \cap \prod_{j=1}^m [2^{n_j-1}, 2^{n_j}] \neq \emptyset \right\}$$

и введем множества

$$\begin{aligned} W_1 &= \{ \mathbf{n} \in W : n_1 \leq \min\{n_2, \dots, n_m\} \}, \\ W_2 &= \{ \mathbf{n} \in W : n_2 < n_1, n_2 \leq \min\{n_3, \dots, n_m\} \}, \\ &\dots\dots\dots \\ W_m &= \{ \mathbf{n} \in W : n_m < \min\{n_1, \dots, n_{m-1}\} \}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Lambda = \max_{\mathbf{n} \in W} (\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_m n_m).$$

Ясно, что

$$\frac{1}{2} 2^{\Lambda} = 2^{\max_{\mathbf{n} \in W} \alpha_1(n_1-1) + \dots + \alpha_m(n_m-1)} \leq \rho = \max_{\mathbf{k} \in U} 2^{\alpha_1 \log_2 k_1 + \dots + \alpha_m \log_2 k_m} \leq 2^{\Lambda}.$$

Тогда

$$\|D_U(x)\|_{\mathbf{p}} \leq \sum_{j=1}^m \left\| \sum_{\mathbf{n} \in W_j} \sum_{\mathbf{k} \in V_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{k}x} \right\|_{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^m \sigma_j.$$

Поскольку все σ_j оцениваются одинаково, оценим σ_1 . При $\mathbf{n} \in W_1$ имеем $n_1 \leq \min\{n_2, \dots, n_m\}$. Значит, согласно лемме и замечанию 3 справедлива оценка

$$\sigma_1 \leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{n_1=1}^{\nu_1} \sum_{n_2=n_1}^{\nu_2(n_1)} \dots \sum_{n_m=n_1}^{\nu_m(n_1, \dots, n_{m-1})} 2^{(\sum_{i=2}^m 1/p_i - (m-1)/2)n_1 + \sum_{i=2}^m (1-1/p_i)n_i},$$

где число ν_1 и функции $\nu_2(n_1), \nu_3(n_1, n_2), \dots, \nu_m(n_1, \dots, n_{m-1})$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \max\{n_1 \in \mathbb{N} \mid \exists(n_2, \dots, n_m) : n_j \geq n_1, j \geq 2; n_1\alpha_1 + \dots + n_m\alpha_m \leq \Lambda\} \\ &= \max\{n_1 \in \mathbb{N} \mid n_1\alpha_1 + n_1\alpha_2 + \dots + n_1\alpha_m \leq \Lambda\} = [\Lambda], \\ \nu_2(n_1) &= \max\{n_2 \in \mathbb{N} \mid \exists(n_3, \dots, n_m) : n_j \geq n_1, j \geq 3; \\ &\quad \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_m n_m \leq \Lambda\} \\ &= \max\{n_2 \in \mathbb{N} \mid \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_1 + \dots + \alpha_m n_1 \leq \Lambda\} \\ &= \max\{n_2 \in \mathbb{N} \mid n_1 + \alpha_2(n_2 - n_1) \leq \Lambda\} = \left\lfloor \frac{\Lambda - (1 - \alpha_2)n_1}{\alpha_2} \right\rfloor, \\ \nu_3(n_1, n_2) &= \max\{n_3 \in \mathbb{N} \mid \exists(n_4, \dots, n_m) : n_j \geq n_1, j \geq 4; \\ &\quad \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_m n_m \leq \Lambda\} \\ &= \max\{n_3 \in \mathbb{N} \mid \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 + \alpha_4 n_1 + \dots + \alpha_m n_m \leq \Lambda\} \\ &= \max\{n_3 \in \mathbb{N} \mid n_1 + \alpha_2(n_2 - n_1) + \alpha_3(n_3 - n_1) \leq \Lambda\} \\ &= \left\lfloor \frac{\Lambda - (1 - \alpha_3)n_1 - \alpha_2(n_2 - n_1)}{\alpha_3} \right\rfloor, \\ &\dots\dots\dots \\ \nu_m(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}) &= \max\{n_m \in \mathbb{N} \mid \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_m n_m \leq \Lambda\} \\ &= \left\lfloor \frac{\Lambda - \alpha_1 n_1 - \dots - \alpha_{m-1} n_{m-1}}{\alpha_m} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{n_1=1}^{\nu_1} \dots \sum_{n_{m-1}=n_1}^{\nu_{m-1}(n_1, \dots, n_{m-2})} 2^{(\sum_{i=2}^m 1/p_i - (m-1)/2)n_1} \cdot 2^{\sum_{i=2}^{m-1} (1-1/p_i)n_i} \\ &\quad \times 2^{(1-1/p_m)(\Lambda - \alpha_1 n_1 - \dots - \alpha_{m-1} n_{m-1})/\alpha_m}. \end{aligned}$$

Заметим, что $(1 - 1/p_m)\alpha_j/\alpha_m = (1 - 1/p_j)$. Получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{n_1=1}^{\nu_1} \dots \sum_{n_{m-1}=n_1}^{\nu_{m-1}(n_1, \dots, n_{m-2})} 2^{(1-1/p_m)\Lambda/\alpha_m + (\sum_{i=2}^m 1/p_i - (m-1)/2)n_1 - (1-1/p_1)n_1} \\ &\leq C(\mathbf{p}, m) \sum_{n_1=1}^{\nu_1} \left(\prod_{j=2}^{m-1} (\nu_j(n_1) - n_1 + 1) \right) \cdot 2^{(1-1/p_m)\Lambda/\alpha_m + (m/\widehat{p} - (m+1)/2)n_1}, \end{aligned}$$

где числа $\nu_j(n_1) = \max_{n_i \geq n_1} \nu_j(n_1, \dots, n_{j-1}) = \nu_j(n_1, \dots, n_1)$. Но тогда

$$\nu_j(n_1) - n_1 = \left\lfloor \frac{\Lambda - (1 - \alpha_j)n_1}{\alpha_j} \right\rfloor - n_1 = \left\lfloor \frac{\Lambda - n_1}{\alpha_j} \right\rfloor \leq \frac{\Lambda - n_1}{\alpha_j}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq C(\mathbf{p}, m) \cdot 2^{m(1-1/\hat{p})\Lambda} \cdot 2^{-((m+1)/2-m/\hat{p})\Lambda} \sum_{n_1=1}^{[\Lambda]} 2^{(m/\hat{p}-(m+1)/2)n_1} \\ &\quad \times 2^{((m+1)/2-m/\hat{p})\Lambda} \cdot \prod_{j=2}^{m-1} \left(\frac{\Lambda - n_1}{\alpha_j} + 1 \right) \\ &= C(\mathbf{p}, m) \cdot 2^{\Lambda(m-1)/2} \cdot \sum_{n_1=1}^{[\Lambda]} 2^{(m/\hat{p}-(m+1)/2)(n_1-\Lambda)} \cdot \prod_{j=2}^{m-1} \left(\frac{\Lambda - n_1}{\alpha_j} + 1 \right) \\ &\leq C(\mathbf{p}, m) \cdot 2^{\Lambda(m-1)/2} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l(m/\hat{p}-(m+1)/2)} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{l}{\alpha_j} + 1 \right). \end{aligned}$$

Учитывая то, что $m/\hat{p} - (m+1)/2 > 0$, получаем $\sigma_1 \leq C(\mathbf{p}, m) \cdot \rho^{(m-1)/2}$, что и завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Заметим прежде всего, что если $\mathbf{p}_1 \geq \mathbf{p}_2 \geq \mathbf{1}$, то

$$\|D_U(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}_2} \leq C(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \cdot \|D_U(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}_1}.$$

Поэтому достаточно доказать, что найдется такой вектор $\mathbf{p}' \geq \mathbf{p}$, для которого выполнены условия теоремы 1.

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} P &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{2}\}, \\ G &= \left\{ \mathbf{q} \in P : \sum_{i \neq j} \frac{1}{q_i} < \frac{m}{2} \text{ при всех } j \right\}, \quad V = \left\{ \mathbf{q} \in P : \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i} > \frac{m+1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Так как для любого $\mathbf{q} \in P$ все $q_i < 2$, то $G \cup V = P$. Множество V непусто, поскольку вектор $\mathbf{p} \in V$; G тоже непусто, так как векторы $\mathbf{q}$, близкие к $\mathbf{2}$, принадлежат G . Далее, G и V открыты, поэтому в силу связности P их пересечение непусто. А это и означает существование искомого $\mathbf{p}'$.

Перед тем, как доказывать теорему 2, введем следующие обозначения. Если $p \geq 1$, а $v(s)$ – выражение, зависящее от s , то

$$I_p \left[\sum_{s=1}^M \right] (v(s)) = \left(\sum_{s=1}^M |v(s)|^p \right)^{1/p}, \quad I_p \left[\int_E ds \right] (v(s)) = \left(\int_E |v(s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ определим полуинтервал $I_n = (\pi 2^{-n}, \pi 2^{-n+1}]$, а для $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^r$ положим $I_{\mathbf{n}} = I_{n_1} \times \cdots \times I_{n_r}$.

В ходе доказательства неоднократно будет применяться обобщенное неравенство Минковского (см., например, [10]): если $1 \leq p \leq q$, то

$$I_q \left[\sum_{s=1}^m \text{или } \int_E ds \right] \left(I_p \left[\sum_{t=1}^m \text{или } \int_F dt \right] (v(s, t)) \right) \leq I_p \left[\sum_{t=1}^m \text{или } \int_F dt \right] \left(I_q \left[\sum_{s=1}^m \text{или } \int_E ds \right] (v(s, t)) \right).$$

С помощью этого неравенства можно “переносить” нормы с большим показателем внутрь формулы через нормы с меньшим показателем.

В наших обозначениях неравенство Гёльдера запишется так:

$$I_p \left[\int_I ds \right] (v(s)) \leq \mu(I)^{1/p-1/r} \cdot I_r \left[\int_I ds \right] (v(s)), \quad \text{если } 1 \leq p \leq r.$$

Теперь докажем три вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 2. При $p > 1$ для любой последовательности $\{a_s\}$ неотрицательных чисел справедливо неравенство

$$\Omega = I_p \left[\sum_{n=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n/p} I_1 \left[\sum_{s=1}^{2^n} \right] (a_s) \right) \leq C(p) \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{p-2} \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, найдем α такое, что $\alpha < 1 - 1/p$ (а это равносильно тому, что $p - 1 - \alpha p > 0$), но $p - 2 - \alpha p < 0$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$\left(I_1 \left[\sum_{s=1}^{2^n} \right] (a_s) \right)^p = \left(\sum_{s=1}^{2^n} a_s s^{\alpha} s^{-\alpha} \right)^p \leq \left(\sum_{s=1}^{2^n} a_s^p s^{\alpha p} \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{2^n} s^{-\alpha q} \right)^{p/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Но $\alpha q < 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega^p &\leq C(p) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \left(\sum_{s=1}^{2^n} a_s^p s^{\alpha p} \right) \cdot 2^{n(1-\alpha q)p/q} = C(p) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(p-2-\alpha p)} \sum_{s=1}^{2^n} a_s^p s^{\alpha p} \\ &\leq C(p) \sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{(p-2-\alpha p)+\alpha p} = C(p) \sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{p-2}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму 2.

ЛЕММА 3. Если $\{a_s\}$ – невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, α любое, $\beta > 0$ и $p > 1$, то

$$\Omega = I_p \left[\sum_{n=1}^{\infty} \right] \left(I_1 \left[\sum_{k=n}^{\infty} \right] \left(2^{n\beta} a_{2^k} 2^{k\alpha} \right) \right) \leq C(\alpha, \beta, p) \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{p(\alpha+\beta)-1} \right)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, найдем γ такое, что $\alpha - \gamma + \beta > 0$, но $\alpha - \gamma < 0$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{2^k} 2^{k\alpha} \right)^p &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{2^k} 2^{k\gamma} 2^{k(\alpha-\gamma)} \right)^p \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{2^k}^p 2^{kp\gamma} \right) \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} 2^{kq(\alpha-\gamma)} \right)^{p/q} \\ &\leq C(\alpha, \gamma, p) \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{2^k}^p 2^{kp\gamma} \right) \cdot 2^{np(\alpha-\gamma)}, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \Omega^p &\leq C(\alpha, \beta, p) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{2^k}^p 2^{kp\gamma} \right) \cdot 2^{n(\alpha-\gamma+\beta)p} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-\gamma+\beta+\gamma)p} a_{2^k}^p \leq C(\alpha, \beta, p) \cdot \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{p(\alpha+\beta)-1} \right), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 3.

ЛЕММА 4. Используя вторую часть леммы 1 и замечания к лемме 1, получаем, что для любых чисел $p \geq 2$, $\mathbf{n}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^r$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, таких, что $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, и любого полинома в T^r с коэффициентами $\{a_s\} \in M_1$

$$\begin{aligned} I_p \left[\int_{I_n} dx \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1+1}, \dots, s_r=2^{k_r+1}}^{2^{k_1+1}, \dots, 2^{k_r+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right) &= \left(\int_{I_n} \left| \sum_{s_1=2^{k_1+1}, \dots, s_r=2^{k_r+1}}^{2^{k_1+1}, \dots, 2^{k_r+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{I_n} \left| \sum_{s_1=2^{k_1+1}, \dots, s_r=2^{k_r+1}}^{2^{k_1+1}, \dots, 2^{k_r+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right|^2 dx \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{s_1=2^{k_1+1}, \dots, s_r=2^{k_r+1}}^{2^{k_1+1}, \dots, 2^{k_r+1}} a_s \right)^{(p-2)/p} \\ &\leq C(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot (a_{2^{k_1}, \dots, 2^{k_r}} 2^{k_1((1-\lambda_1)/2)} \dots 2^{k_r((1-\lambda_r)/2)} \cdot 2^{(n_1 \lambda_1)/2 + \dots + (n_r \lambda_r)/2})^{2/p} \\ &\quad \times a_{2^{k_1}, \dots, 2^{k_r}}^{(p-2)/p} \cdot 2^{k_1((p-2)/p)} \dots 2^{k_r((p-2)/p)} \\ &= C(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \cdot a_{2^{k_1}, \dots, 2^{k_r}} \cdot 2^{\sum_{i=1}^r k_i((1-\lambda_i)/p + 1 - 2/p)} \cdot 2^{\sum_{i=1}^r n_i \lambda_i / p}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В наших обозначениях

$$\begin{aligned} \|Q(x)\|_{\mathbf{p}} &= I_{p_2} \left[\int_T dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\int_T dx_1 \right] \left(\sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right) \right) \\ &\leq I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] (a_s e^{i s \mathbf{x}}) \right) \right) \right) \right) \right) \\ &\quad + I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1+1}}^{2^{k_1+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \\ &\quad + I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(\sum_{s_2=2^{k_2+1}}^{2^{k_2+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \\ &\quad + I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(\sum_{s_2=2^{k_2+1}}^{2^{k_2+1}} \sum_{s_1=2^{k_1+1}}^{2^{k_1+1}} a_s e^{i s \mathbf{x}} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \\ &= S_{11} + S_{12} + S_{21} + S_{22}. \end{aligned}$$

Перейдем к оценке S_{ij} . Согласно обобщенному неравенству Минковского

$$\begin{aligned} S_{11} &= I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1/p_1} I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] (a_s) \right) \right) \right) \\ &\leq I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1/p_1} I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] (a_s) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

С помощью двукратного применения леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} S_{11} &= I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1/p_1} I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] (a_{\mathbf{s}}) \right) \right) \right) \\ &\leq C(\mathbf{p}) \left(\sum_{s_2=1}^{\infty} \left(\sum_{s_1=1}^{\infty} a_{\mathbf{s}}^{p_1} s_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} s_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} = C(\mathbf{p}) J_{\mathbf{p}}(a). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} S_{12} &= I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left(I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s_1 x_1} \right) \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Для оценки S_{12} сначала с помощью неравенства Гёльдера “поднимаем” норму

$$I_{p_1} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] (\dots) \quad \text{до} \quad I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] (\dots)$$

а затем, используя обобщенное неравенство Минковского, “переносим” ее внутрь. Получим

$$\begin{aligned} S_{12} &\leq C \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1(1/p_1-1/\tilde{p})} I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left(I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s_1 x_1} \right) \right) \right) \right) \right) \\ &\leq C \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2/p_2} I_1 \left[\sum_{s_2=1}^{2^{n_2}} \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1(1/p_1-1/\tilde{p})} I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s_1 x_1} \right) \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 4 для внутренней нормы с показателем $\tilde{p}$ (здесь размерность $r = 1$) и леммой 2 для двух внешних норм с показателями p_2 и 1, получаем

$$\begin{aligned} S_{12} &\leq C(\mathbf{p}) \cdot I_{p_2} \left[\sum_{s_2=1}^{\infty} \right] \left(s_2^{(p_2-2)/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \right. \\ &\quad \left. \left(I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1(1/p_1-1/\tilde{p})} a_{2^{k_1}, s_2} 2^{k_1(1-2/\tilde{p})} 2^{n_1/\tilde{p}} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Чтобы применить лемму 3, надо доказать, что $-1/p_1 + 1/\tilde{p} + 1/\tilde{p} > 0$. Но это следует из условия, наложенного на $\mathbf{p}$ ($1/p_1 + 1/p_2 - (2+1)/\tilde{p} < 0$). Тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned} S_{12} &\leq C(\mathbf{p}) \cdot I_{p_2} \left[\sum_{s_2=1}^{\infty} \right] \left(s_2^{(p_2-2)/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \right] \left(a_{\mathbf{s}} s_1^{(p_1(2/\tilde{p}-1/p_1+1-2/\tilde{p})-1)/p_1} \right) \right) \\ &= C(\mathbf{p}) J_{\mathbf{p}}(a). \end{aligned}$$

Аналогично можно поступить и с S_{21} . У нас

$$S_{21} = I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1/p_1} I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(\sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s_2 x_2} \right) \right) \right) \right) \right).$$

Сначала с помощью неравенства Гёльдера “поднимаем” норму

$$I_{p_2} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] (\dots) \quad \text{до} \quad I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] (\dots),$$

а затем, используя обобщенное неравенство Минковского, “переносим” ее внутрь.

После этого воспользуемся леммой 4 для внутренней нормы с показателем $\tilde{p}$ (в данном случае $r = 1$) и леммой 2 для пары норм с показателями p_1 и 1. Получим

$$S_{21} \leq C \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2(1/p_2-1/\tilde{p})} I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(I_1 \left[\sum_{s_1=1}^{2^{n_1}} \right] \left(2^{-n_1/p_1} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] \left(\sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s_2 x_2} \right) \right) \right) \right) \right) \\ \leq C(\mathbf{p}) \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2(1/p_2-1/\tilde{p})} I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(2^{k_2(1-2/\tilde{p})} \right. \right. \\ \left. \left. \times 2^{n_2/\tilde{p}} I_{p_1} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \right] (a_{s_1, 2^{k_2}} s_1^{(p_1-2)/p_1}) \right) \right) \\ \leq C(\mathbf{p}) \cdot I_{p_2} \left[\sum_{s_2=1}^{\infty} \right] \left(s_2^{(p_2-2)/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \right] (a_{s_1, s_2} s_1^{(p_1-2)/p_1}) \right) \\ \leq C(\mathbf{p}) \cdot J_{\mathbf{p}}(a).$$

Для оценки S_{22} сначала найдем числа $\mu_i > 0$ при $i = 1, 2$ такие, что $\mu_1 + \mu_2 = 1$, и $(1/\tilde{p} - 1/p_i) + \mu_i/\tilde{p} > 0$. Такие μ_i действительно найдутся, так как

$$\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{p_i} < 0, \quad -\tilde{p} \left(\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{p_1} \right) - \tilde{p} \left(\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{p_2} \right) > 1.$$

“Поднимем” интегральные нормы до

$$I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_2}} dx_2 \right] (\dots) \quad \text{и} \quad I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_1}} dx_1 \right] (\dots),$$

“перенесем” их под остальные нормы и затем воспользуемся леммой 4 для внутренней нормы с показателем $\tilde{p}$ ($r = 2$). Получим

$$S_{22} \leq C \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2(1/p_2-1/\tilde{p})} I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_1(1/p_1-1/\tilde{p})} I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(I_{\tilde{p}} \left[\int_{I_{n_1} \times I_{n_2}} dx_1 dx_2 \right] \left(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1}+1} \sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2}+1} a_{\mathbf{s}} e^{i s \mathbf{x}} \right) \right) \right) \right) \right) \\ \leq C \cdot I_{p_2} \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \right] \left(2^{-n_2(1/p_2-1/\tilde{p})+n_2\mu_2/\tilde{p}} I_1 \left[\sum_{k_2=n_2}^{\infty} \right] \left(2^{s_2((1-\mu_2)/\tilde{p}+1-2/\tilde{p})} I_{p_1} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \right] \right. \right. \\ \left. \left(2^{-n_1(1/p_1-1/\tilde{p})+n_1\mu_1/\tilde{p}} I_1 \left[\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \right] (2^{s_1((1-\mu_1)/\tilde{p}+1-2/\tilde{p})} a_{2^{k_1}, 2^{k_2}}) \right) \right) \right).$$

А теперь используем лемму 3 для внутренней пары норм с показателями p_1 и 1, а потом для внешней пары норм с показателями p_2 и 1. В силу выбора μ_i условие $\beta > 0$ в этой лемме будет выполнено. Тогда

$$S_{22} \leq C(\mathbf{p}) \cdot I_{p_2} \left[\sum_{s_2=1}^{\infty} \right] \left(s_2^{(p_2-2)/p_2} I_{p_1} \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} \right] (a_{s_1, 2s_2} s_1^{(p_1-2)/p_1}) \right) \leq C(\mathbf{p}) \cdot J_{\mathbf{p}}(a).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юдин В. А. Поведение констант Лебега // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 401–405.
- [2] Colzani L., Soardi P. M. L^p -norms of kernels on the n -dimensional torus // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 266. № 2. P. 617–627.
- [3] Юдин А. А., Юдин В. А. Дискретные теоремы вложения и константы Лебега // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 3. С. 381–394.
- [4] Белинский Э. С. Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1977. С. 19–39.
- [5] Лифлянд И. Р. Точный порядок констант Лебега гиперболических частных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 674–683.
- [6] Дьяченко М. И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 3–20.
- [7] Бугров Я. С. Абсолютная суммируемость преобразований Фурье и абсолютная сходимость кратных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 5. С. 1033–1035.
- [8] Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. 1986. Т. 129. № 1. С. 55–72.
- [9] Djachenco M. I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. № 3. P. 173–190.
- [10] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

04.09.1998

Исправленный вариант

21.01.2000