Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Об одной задаче А. А. Карацубы, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 517–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 09:07:00

Об одной задаче А. А. Карацубы

С. А. Гриценко

Получены нижние оценки дробных моментов линейных комбинаций аналогов функции Харди. Кроме того, даны приложения этих оценок к задаче А. А. Карацубы об оценке снизу числа нулей линейной комбинации аналогов функций Харди на промежутке $(0, T]$.

Библиография: 12 названий.

Светлой памяти моего учителя Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение. Пусть $N_0(T)$ – число нулей $\zeta(1/2 + it)$ на промежутке $(0, T]$. В 1921 г. Харди и Литтлвуд [1] доказали, что

$$N_0(T) \geq c_1 T, \quad c_1 > 0 - \text{абсолютная постоянная.}$$

В 1942 г. Сельберг [2] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq c_2 T \log T, \quad c_2 > 0 - \text{абсолютная постоянная.}$$

Для арифметических рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа, но не имеющих эйлерова произведения, правильных по порядку нижних оценок для числа их нулей на отрезках критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ пока не получено.

Первым, кто показал, что на критической прямой лежит аномально много нулей арифметического ряда Дирихле без эйлерова произведения, был Воронин, который в 1980 г. доказал [3], что

$$N_0(T, f) > c_3 T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right), \quad (1)$$

где $N_0(T, f)$ – число нулей ρ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\operatorname{Re} \rho = 1/2$, $0 < \operatorname{Im} \rho \leq T$, $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

В 1989 г. Карацуба [4] разработал новый метод оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой, с помощью которого доказал следующее неравенство, существенно усилив, тем самым, результат Воронина (1):

$$N_0(T, f) \geq T \sqrt{\log T} (\log T)^{-\varepsilon}, \quad (2)$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon) > 1$.

В 1994 г. Карацуба [5] заменил в неравенстве (2) множитель $(\log T)^{-\varepsilon}$ на медленнее убывающий множитель $e^{-c_4\sqrt{\log \log T}}$, $c_4 > 0$ – абсолютная постоянная.

В настоящее время неравенство

$$N_0(T, f) \geq T \sqrt{\log T} \exp(-c_4 \sqrt{\log \log T}), \quad c_4 > 0,$$

является для $N_0(T, f)$ самым точным из известных.

Пусть

$$Z(t, \chi) = e^{i\theta(t, \chi)} L\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где функция $\theta(t, \chi)$ подобрана так, что $Z(t, \chi)$ вещественна при вещественных t . Тогда $Z(t, \chi)$ представляет собой аналог функции Харди (см., например, [6; с. 86]).

Пусть

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_N Z(t, \chi_N),$$

где $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа.

В 1991 г. Карацуба [7] поставил и решил своим методом 1989 года задачу о нижней оценке числа нулей $G(t)$ на отрезке $(0, T]$.

Эту задачу мы называем *задачей Карацубы*.

Процитируем теорему Карацубы из статьи [7].

ТЕОРЕМА. Пусть $N \geq 2$, $k_1, \dots, k_N$ – произвольные натуральные числа с условием $K = [k_1, \dots, k_N] \geq 3$, $\chi_1, \dots, \chi_N$ – произвольные примитивные характеры Дирихле по модулям $k_1, \dots, k_N$ соответственно. Пусть, далее $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа.

Тогда для числа $N_0(T, G)$ нулей нечетного порядка $G(t)$ на промежутке $(0, T)$ справедливо неравенство

$$N_0(T, G) \geq T(\log T)^{\beta-\varepsilon}, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ любое, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, K – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_N$, $\beta\varphi(K) = 1$, $\varphi(K)$ – функция Эйлера.

Если характеры $\chi_1, \dots, \chi_N$ имеют одинаковую четность, то

$$N_0(T, G) \geq T(\log T)^{2\beta-\varepsilon}. \quad (4)$$

В 2002 г. Карацуба [8] получил оценку для числа нулей дзета-функции Римана на отрезке критической прямой, пользуясь знанием правильного порядка дробных моментов дзета-функции на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Эта оценка оказалась менее точной, чем правильная по порядку оценка Сельберга, но существенно более точной, чем оценка Харди и Литтлвуда.

Метод Карацубы 1989 г. очень сложен. Соображения, восходящие к Сельбергу, дополняются в нем рядом оригинальных идей Карацубы.

Метод же 2002 г. сравнительно прост. Как отмечено в [8], помимо техники Харди и Литтлвуда он содержит знание правильных порядков дробных моментов $\zeta(s)$ на критической прямой.

В настоящей статье мы получаем точные по порядку оценки дробных моментов линейных комбинаций аналогов функции Харди. Кроме того, мы показываем, что метод 2002 г. в некоторых частных случаях применим к задаче Карацубы, причем иногда он дает более точный результат, чем высокотехнический метод 1989 г.

В дальнейшем будут использоваться следующие определения.
Пусть

$$\varepsilon(\chi) = \frac{i^\delta \sqrt{k}}{\tau(\chi)},$$

где k – модуль характера $\chi(n)$, $\tau(\chi)$ – соответствующая ему сумма Гаусса, а δ равно соответственно 0 или 1 в зависимости от того, является ли характер $\chi(n)$ четным или нечетным.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned} \rho(s, \chi) &= \varepsilon(\bar{\chi}) \left(\frac{\pi}{k} \right)^{s-1/2} \frac{\Gamma((1-s+\delta)/2)}{\Gamma((s+\delta)/2)}, \\ \Phi(s) &= a_1(\rho(s, \chi_1))^{-1/2} L(s, \chi_1) + a_2(\rho(s, \chi_2))^{-1/2} L(s, \chi_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Модули характеров χ_1 и χ_2 здесь и далее предполагаются постоянными (не растущими с ростом основного параметра T). Константы во всех дальнейших оценках зависят от этих постоянных.

Пусть

$$G(t) = \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Из формулы Стирлинга следует, что при $T/2 \leq t \leq T$ справедлива формула

$$\rho(\sigma + it, \chi_j) = \left(\frac{k_j t}{2\pi} \right)^{1/2 - \sigma - it} e^{it} e^{-\pi i(2\delta_j - 1)/4} (1 + O(T^{-1})), \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

которая в дальнейшем будет неоднократно использоваться.

Основные результаты статьи сформулированы в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k_1 и k_2 – натуральные числа, $m \geq 2$ – произвольное натуральное число, $d_{1/m}(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $(\zeta(s))^{1/m}$ при $\text{Re } s > 1$. Пусть χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2 соответственно.

Пусть

$$\begin{aligned} c_{k,1/m} &= \frac{\sin(\pi/m^2)}{\pi} \left(\frac{\varphi(k)}{k} \right)^{1/m^2} \int_0^\infty r^{-1/m^2-1} (1 - e^{-r}) dr \\ &\quad \times \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{1}{m^2 p} + \frac{|d_{1/m}(p^2)|^2}{p^2} + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{1/m^2}. \end{aligned}$$

Пусть a_1 и a_2 в формуле (5) – произвольные комплексные числа такие, что

$$|a_1|^{2/m} c_{k_1,1/m} \neq |a_2|^{2/m} c_{k_2,1/m}.$$

Тогда при $T \geq T_1 > 2$ справедливы оценки

$$T(\log T)^{1/m^2} \ll \int_0^T |G(t)|^{2/m} dt \ll T(\log T)^{1/m^2}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть k_1 и k_2 – натуральные числа, χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2 соответственно. Пусть a_1 и a_2 в формуле (5) – произвольные вещественные числа такие, что

$$|a_1|^{2/3} c_{k_1, 1/3} \neq |a_2|^{2/3} c_{k_2, 1/3}.$$

Тогда справедлива оценка

$$N_0(T, G) \geq c_4 T (\log T)^{1/6}, \quad c_4 > 0.$$

Отметим, что если константа β из (3) (или 2β в случае одинаковой четности характеров χ_1 и χ_2) меньше $1/6$, оценки теоремы 2 точнее, чем (3) и (4). В то же время, область применимости теорем Карацубы шире, чем у теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть k_1 и k_2 – натуральные числа, χ_1 и χ_2 – примитивные характеры Дирихле по модулям k_1 и k_2 соответственно. Пусть a_1 и a_2 – произвольные комплексные числа такие, что

$$|a_1|^2 \left(\frac{\varphi(k_1)}{k_1} \right)^{1/m} \neq |a_2|^2 \left(\frac{\varphi(k_2)}{k_2} \right)^{1/m}.$$

Тогда для любого натурального $m \geq 2$ справедливы оценки

$$T (\log T)^{1/m^2} \ll \int_0^T |a_1 L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_1\right) + a_2 L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_2\right)|^{2/m} dt \ll T (\log T)^{1/m^2}.$$

Для доказательства теорем нам понадобятся следующие леммы.

2. Леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\chi(n)$ – характер Дирихле по модулю q , $0 < k < 1$, $d_k(n)$ – коэффициенты Дирихле функции $(\zeta(s))^k$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{n=1}^N \frac{|d_k(n)|^2 |\chi(n)|^2}{n} = c_{q,k} (\log N)^{k^2} + O((\log N)^{k^2-1}),$$

где

$$c_{q,k} = \frac{\sin \pi k^2}{\pi} \left(\frac{\varphi(q)}{q} \right)^{k^2} \int_0^\infty r^{-k^2-1} (1 - e^{-r}) dr \\ \times \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{k^2}{p} + \frac{|d_k(p^2)|^2}{p^2} + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{k^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = 1/\log N$, $T = e^{\sqrt{\log N}}$. Формула Перрона (см. [9; с. 427]) дает равенство

$$\sum_{n=1}^N \frac{|d_k(n)|^2 |\chi(n)|^2}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(1+s) \frac{N^s}{s} ds + O\left(\frac{\log N}{T}\right),$$

где

$$F(1+s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{|d_k(n)|^2 |\chi(n)|^2}{n^{1+s}}.$$

Пусть Γ_1 – прямоугольник с вершинами

$$b - iT, \quad b + iT, \quad -c_1 + iT, \quad -c_1 - iT,$$

где $c_1 = c'_1/\sqrt{\log N}$, а c'_1 – столь малая положительная постоянная, что замыкание Γ_1 не содержит нулей $\zeta(s)$. Существование такой постоянной следует из известной теоремы Валле–Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$ (см., например, [6; с. 33]). Пусть $c = c'/\log N$, где $0 < c' < 0.1c'_1$.

Далее, замечаем, что при $\operatorname{Re} s > 0$

$$F(1+s) = (\zeta(1+s))^{k^2} U(1+s), \quad (7)$$

где

$$U(1+s) = \prod_{p \nmid q} \left(1 + \frac{k^2}{p^{1+s}} + \frac{|d_k(p^2)|^2}{p^{2(1+s)}} + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{k^2} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{k^2}.$$

Функция $U(1+s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1/2$.

Сделаем внутри прямоугольника Γ_1 разрез по отрезку $[-c_1, -c]$. Определим замкнутый ориентированный контур Γ следующим образом. От точки $b - iT$ по сторонам Γ_1 поднимаемся вверх, поворачиваем налево и опускаемся вниз до точки $-c_1$; по верхнему берегу разреза доходим до точки $-c$; обходим точку $s = 0$ по отрицательно ориентированной окружности радиуса c с центром в точке $s = 0$; по нижнему берегу разреза доходим до точки $-c_1$; по сторонам Γ_1 опускаемся вниз, поворачиваем налево и возвращаемся в точку $b - iT$.

Верхний берег разреза, окружность и нижний берег разреза с заданными на них ориентациями обозначим соответственно через Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 . По теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(1+s) \frac{N^s}{s} ds = 0.$$

Отсюда и из оценок

$$\begin{aligned} |\zeta(1 - c_1 + it)| &\ll \frac{1}{c_1} + T^{c_1} \log T \ll \sqrt{\log N} & \text{при } |t| \leq T, \\ |\zeta(1 + \sigma \pm iT)| &\ll T^{c_1} \log T \ll \sqrt{\log N} & \text{при } -c_1 \leq \sigma \leq b \end{aligned}$$

следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(1+s) \frac{N^s}{s} ds = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) F(1+s) \frac{N^s}{s} ds + O(e^{-c'_1 \sqrt{\log N}/2}). \quad (8)$$

Так как

$$F(1+s) = s^{-k^2} (s\zeta(1+s))^{k^2} U(1+s) = U(1)s^{-k^2} + O(|s|^{1-k^2}),$$

получаем равенство

$$\left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) F(1+s) \frac{N^s}{s} ds = U(1) \left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) s^{-k^2} \frac{N^s}{s} ds + O((\log N)^{k^2-1}). \quad (9)$$

Вычислим $\int_{\Gamma_2} s^{-k^2} (N^s/s) ds$. Имеем $s = re^{\pi i}$, $ds/s = dr/r$, $N^s = e^{-r \log N}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} s^{-k^2} \frac{N^s}{s} ds &= e^{-\pi i k^2} \int_{c_1}^c r^{-k^2-1} e^{-r \log N} dr \\ &= -e^{-\pi i k^2} (\log N)^{k^2} \int_{c'}^{\infty} r^{-k^2-1} e^{-r} dr + O(e^{-c'_1 \sqrt{\log N}/2}). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляя $\int_{\Gamma_4} s^{-k^2} (N^s/s) ds$, получаем

$$\left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_4} \right) s^{-k^2} \frac{N^s}{s} ds = (e^{\pi i k^2} - e^{-\pi i k^2}) (\log N)^{k^2} \int_{c'}^{\infty} r^{-k^2-1} e^{-r} dr + O(e^{-c'_1 \sqrt{\log N}/2}).$$

Вычислим $\int_{\Gamma_3} s^{-k^2} (N^s/s) ds$. Имеем

$$\int_{\Gamma_3} s^{-k^2} \frac{N^s}{s} ds = \int_{\Gamma_3} s^{-k^2} \frac{ds}{s} s + i(\log N)^{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(c')^{(l-k^2)}}{l!} J_l,$$

где

$$J_l = \int_{\pi}^{-\pi} e^{i\varphi(l-k^2)} d\varphi.$$

Вычислим $\int_{\Gamma_3} s^{-k^2} (ds/s)$. Имеем $s = ce^{i\varphi}$, $ds/s = i d\varphi$,

$$\int_{\Gamma_3} s^{-k^2} \frac{ds}{s} = i \int_{\pi}^{-\pi} c^{-k^2} e^{-i\varphi k^2} d\varphi = -\frac{(c')^{-k^2}}{k^2} (\log N)^{k^2} (e^{\pi i k^2} - e^{-\pi i k^2}).$$

Поскольку $(c')^{-k^2}/k^2 = \int_{c'}^{\infty} r^{-k^2-1} dr$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) s^{-k^2} \frac{N^s}{s} ds \\ &= -2i(\sin \pi k^2) (\log N)^{k^2} \int_{c'}^{\infty} r^{-k^2-1} (1 - e^{-r}) dr \\ &\quad + i(\log N)^{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(c')^{(l-k^2)}}{l!} J_l + O(e^{-c'_1 \sqrt{\log N}/2}), \end{aligned}$$

подставляя которое в (9) и переходя к пределу при $c' \rightarrow +0$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) F(1+s) \frac{N^s}{s} ds \\ &= -2iU(1)(\sin \pi k^2) (\log N)^{k^2} \int_0^{\infty} r^{-k^2-1} (1 - e^{-r}) dr + O((\log N)^{k^2-1}). \end{aligned}$$

Теперь утверждение леммы сразу следует из (8).

ЛЕММА 2. Пусть $f(s)$ – регулярная в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$ и непрерывная в полосе $\alpha \leq \operatorname{Re} s \leq \beta$ функция. Предположим, что $f(s) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \leq \operatorname{Re} s \leq \beta$. Тогда при $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ и $q > 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma + it)|^q dt \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha + it)|^q dt \right)^{(\beta-\gamma)/(\beta-\alpha)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta + it)|^q dt \right)^{(\gamma-\alpha)/(\beta-\alpha)}.$$

Доказательство см. в [7].

ЛЕММА 3. Пусть $1/2 \leq \sigma \leq 3/4$, $l > 0$, $T \geq 2$,

$$J(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\sigma + it)|^{2l} w(t) dt, \quad w(t) = \int_{T/2}^T e^{-2l(t-\tau)^2} d\tau.$$

Тогда справедливо неравенство

$$J(\sigma) \ll T^{(l+1)(\sigma-1/2)} J(1/2)^{3/2-\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 2, положив в ней

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = \sigma, \quad q = 2l, \quad f(s) = \Phi(s)e^{(s-i\tau)^2},$$

где τ — число из промежутка $[T/2, T]$. Получим неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^{2l} dt \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2l} dt \right)^{3/2-\sigma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{3}{2} + it\right) \right|^{2l} dt \right)^{\sigma-1/2}.$$

Проинтегрируем его по τ от $T/2$ до T и применим неравенство Гёльдера:

$$J(\sigma) \ll J\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2-\sigma} J\left(\frac{3}{2}\right)^{\sigma-1/2}.$$

Из формулы (6) следует, что

$$\left| \rho\left(\frac{3}{2} + it, \chi_j\right) \right| \ll |t|^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Теперь из определения $\Phi(s)$ (см. (5)) и ограниченности L -функций Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 3/2$ имеем

$$\begin{aligned} J\left(\frac{3}{2}\right) &\ll \int_{T/3}^{2T} \left| \Phi\left(\frac{3}{2} + it\right) \right|^{2l} dt \\ &\ll T^l \int_{T/3}^{2T} \left(\left| L\left(\frac{3}{2} + it, \chi_1\right) \right|^{2l} + \left| L\left(\frac{3}{2} + it, \chi_2\right) \right|^{2l} \right) dt \ll T^{l+1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Верхняя оценка теоремы 1 известна (см., например, [11], [12]). Докажем справедливость нижней оценки.

Сначала рассмотрим интеграл

$$J_1(\sigma) = \int_{T/2}^T |\Phi(\sigma + it)|^{2/m} dt.$$

Пусть при $\operatorname{Re} s > 1$

$$(\zeta(s))^{1/m} = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1/m}(n) n^{-s}.$$

Пусть, далее,

$$S_N(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^N d_{1/m}(n) \chi_1(n) n^{-s}, \quad S_N(s, \chi_2) = \sum_{n=1}^N d_{1/m}(n) \chi_2(n) n^{-s},$$

где $N = T^{3/4}$.

Пусть, например, $|a_1|^{2/m} c_{k_1, 1/m} > |a_2|^{2/m} c_{k_2, 1/m}$. Тогда

$$\begin{aligned} J_1(\sigma) = \int_{T/2}^T & \left| a_1(\rho(\sigma + it, \chi_1))^{-1/2} S_N^m(\sigma + it, \chi_1) \right. \\ & + a_2(\rho(\sigma + it, \chi_2))^{-1/2} S_N^m(\sigma + it, \chi_2) \\ & + a_1(\rho(\sigma + it, \chi_1))^{-1/2} (L(\sigma + it, \chi_1) - S_N^m(\sigma + it, \chi_1)) \\ & \left. + a_2(\rho(\sigma + it, \chi_2))^{-1/2} (L(\sigma + it, \chi_2) - S_N^m(\sigma + it, \chi_2)) \right|^{2/m} dt. \end{aligned}$$

Пусть

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{C}{\log T},$$

а $C > 1$ будет выбрано позже.

Пользуясь неравенствами

$$|z_1|^{2/m} - |z_2|^{2/m} \leq |z_1 + z_2|^{2/m} \leq |z_1|^{2/m} + |z_2|^{2/m},$$

справедливыми для любых комплексных z_1 и z_2 и любого натурального $m \geq 2$, получаем

$$\begin{aligned} & (|a_1|^{2/m} k_1^{(\sigma-1/2)/m} L_1(\sigma) - |a_2|^{2/m} k_2^{(\sigma-1/2)/m} L_2(\sigma)) T^{(\sigma-1/2)/m} \\ & \ll J_1(\sigma) + (K_1(\sigma) + K_2(\sigma)) T^{(\sigma-1/2)/m}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_j(\sigma) &= \int_{T/2}^T |S_N(\sigma + it, \chi_j)|^2 dt, \\ K_j(\sigma) &= \int_{T/2}^T |H_j(\sigma + it)|^{2/m} dt, \quad H_j(s) = a_j L(s, \chi_j) - a_j S_N^m(s, \chi_j), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$.

Покажем, что

$$T \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^{-1/m^2} \ll |a_1|^{2/m} k_1^{(\sigma-1/2)/m} L_1(\sigma) - |a_2|^{2/m} k_2^{(\sigma-1/2)/m} L_2(\sigma). \quad (10)$$

Справедливо равенство

$$L_1(\sigma) = \left(\frac{T}{2} + O(N \log N) \right) \sum_{n=1}^N \frac{d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2}{n^{2\sigma}}$$

(см., например, [6; с. 123]).

Преобразуем сумму $\sum_{n=1}^N d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2 / n^{2\sigma}$. Пусть $N_1 = \exp((\sigma - 1/2)^{-1/2})$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2}{n^{2\sigma}} &= \sum_{N_1 < n \leq N} \frac{d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2}{n} n^{1-2\sigma} + O\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1/2m^2}\right) \\ &= - \int_{N_1}^N \mathbb{C}(u) du^{1-2\sigma} + \mathbb{C}(N) N^{1-2\sigma} + O\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1/2m^2}\right), \end{aligned}$$

где $\mathbb{C}(u) = \sum_{N_1 < n \leq u} d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2 / n$.

Вновь пользуясь леммой 1 и, интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{d_{1/m}^2(n) |\chi_1(n)|^2}{n^{2\sigma}} &= \frac{c_{k_1, 1/m}}{m^2} (2\sigma - 1)^{-1/m^2} \int_0^{(2\sigma-1) \log N} v^{1/m^2-1} e^{-v} dv + O\left(\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1/2m^2}\right). \end{aligned}$$

Применяя те же рассуждения к $J_2(\sigma)$ и, учитывая, что

$$\begin{aligned} |a_1|^{2/m} c_{k_1, 1/m} &> |a_2|^{2/m} c_{k_2, 1/m}, \quad k_j^{(\sigma-1/2)/m} = 1 + O\left(\sigma - \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, 2, \\ (2\sigma - 1) \log N &> \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

получаем (10).

Итак,

$$T\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^{-1/m^2} T^{(\sigma-1/2)/m} \ll J_1(\sigma) + (K_1(\sigma) + K_2(\sigma)) T^{(\sigma-1/2)/m}.$$

Наша ближайшая задача – оценить сверху интегралы $K_1(\sigma)$ и $K_2(\sigma)$ при близких к $1/2$ значениях σ .

Интегралы $K_1(\sigma)$ и $K_2(\sigma)$ оцениваются одинаково. Пусть j – любое из чисел 1, 2.

Применим лемму 2, положив в ней

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{4}, \quad q = \frac{2}{m}, \quad f(s) = H_j(s) e^{(s-i\tau)^2}, \quad \gamma = \sigma,$$

где $T/2 \leq \tau \leq T$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^{2/m} dt \\ \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(1/2 + it)|^{2/m} dt \right)^{(5-4\sigma)/3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(5/4 + it)|^{2/m} dt \right)^{(4\sigma-2)/3}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это неравенство по τ от $T/2$ до T и воспользуемся неравенством Гёльдера. Имеем

$$M_j(\sigma) \ll \left(M_j\left(\frac{1}{2}\right) \right)^{(5-4\sigma)/3} \left(M_j\left(\frac{5}{4}\right) \right)^{(4\sigma-2)/3}, \quad (11)$$

где

$$M_j(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |H_j(\sigma + it)|^{2/m} w(t) dt, \quad w(t) = \int_{T/2}^T e^{-2(t-\tau)^2/m} d\tau.$$

Далее, при $\operatorname{Re} s > 1$ функция $H_j(s)$ представляется в виде ряда

$$H_j(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_j(n) n^{-s}, \quad \text{где } |b_j(n)| \ll n^{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Поэтому, пользуясь неравенствами Гёльдера и теоремой Монтгомери–Вона, получаем оценки

$$\begin{aligned} \left(M_j \left(\frac{5}{4} \right) \right)^m &\ll T^{m-1} \int_{T/3}^{3T} |H_j(5/4 + it)|^2 dt \\ &\ll T^{m-1} \sum_{n=N+1}^{\infty} (T+n) n^{2\varepsilon-5/2} \ll T^m N^{2\varepsilon-3/2} \ll T^m N^{-3/4}, \\ \left(M \left(\frac{5}{4} \right) \right)^{(4\sigma-2)/3} &\ll T^{(4\sigma-2)/3} N^{-(\sigma-1/2)/m}. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае $|M_j(1/2)| \leq T$ имеем в силу (11)

$$M_j(\sigma) \ll T N^{-(\sigma-1/2)/m}.$$

Пусть теперь $|M_j(1/2)| > T$. Тогда ввиду (11) и (12) имеем

$$M_j(\sigma) \ll M_j \left(\frac{1}{2} \right) N^{-(\sigma-1/2)/m}.$$

Так как

$$M_j \left(\frac{1}{2} \right) \ll \int_{-\infty}^{\infty} \left| L \left(\frac{1}{2} + it, \chi_j \right) \right|^{2/m} w(t) dt + L_j \left(\frac{1}{2} \right) \ll T(\log T)^{1/m^2},$$

приходим к неравенству

$$M_j(\sigma) \ll T(\log T)^{1/m^2} N^{-(\sigma-1/2)/m}.$$

Отсюда, поскольку $M_j(\gamma) \asymp K_j(\gamma)$,

$$T(\sigma - 1/2)^{-1/m^2} T^{(\sigma-1/2)/m} \ll J_1(\sigma) + T(\log T)^{1/m^2} T^{(\sigma-1/2)/m} N^{-(\sigma-1/2)/m}.$$

Вспоминая, что $\sigma = 1/2 + C/\log T$, $N = T^{3/4}$, и замечая, что $N^{-(\sigma-1/2)/m}$ убывает с ростом C быстрее, чем C^{-1/m^2} , а постоянная в знаке Виноградова не зависит от C , при достаточно большой константе C имеем

$$J_1(\sigma) \gg T(\log T)^{1/m^2}.$$

Теперь теорема 1 прямо следует из леммы 3.

4. Доказательство теоремы 2. Будем следовать с небольшими изменениями схеме рассуждений работы [8].

Пусть $h > 0$,

$$j_1(t) = \int_0^h |G(t+u)| du, \quad j_2(t) = \left| \int_0^h G(t+u) du \right|.$$

Определим множество E :

$$E = \{t \in (0, T] \mid j_1(t) > j_2(t)\}.$$

Так же, как в [8], получаем неравенства

$$I_1 \leq I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_0^T j_1(t)^{2/3} dt, \quad I_2 = \int_0^T j_2(t)^{2/3} dt, \quad I_3 = \int_E j_1(t)^{2/3} dt.$$

Оценим I_1 снизу. Из неравенства Гёльдера имеем

$$h^{-1/3} \int_0^h |G(t+u)|^{2/3} du \leq j_1(t)^{2/3},$$

откуда

$$I_1 \geq h^{2/3} \int_h^T |G(t)|^{2/3} dt.$$

Из теоремы 1, в которой m положено равным 3, следует, что

$$I_1 \geq d_1 T h^{2/3} (\log T)^{1/9}, \quad d_1 > 0.$$

Оценим I_2 сверху. Имеем

$$I_2^3 \ll T^2 \left(\int_0^T \left| \int_0^h Z(t+u, \chi_1) du \right|^2 dt + \int_0^T \left| \int_0^h Z(t+u, \chi_2) du \right|^2 dt \right).$$

В работах [7] и [8] получена оценка

$$\int_0^T \left| \int_0^h Z(t+u, \chi) du \right|^2 dt \ll Th,$$

из которой следует, что существует $d_2 > 0$ такое, что

$$I_2 \leq d_2 T h^{1/3}.$$

Выберем h так, чтобы

$$d_2 T h^{1/3} = 0.5 d_1 T h^{2/3} (\log T)^{1/9}, \quad \text{т.е.} \quad h = \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^3 (\log T)^{-1/3};$$

при таком h имеем

$$Th^{2/3} (\log T)^{1/9} \ll I_3. \quad (13)$$

Оценим I_3 сверху. Из неравенства Гёльдера имеем

$$I_3^{3/2} \leq \mu(E)^{1/2} \int_0^T j_1(t) dt,$$

где $\mu(E)$ – мера множества E .

Пользуясь верхней оценкой из теоремы 1, получаем

$$I_3^{3/2} \ll \mu(E)^{1/2} h T (\log T)^{1/4} \quad \text{или} \quad I_3 \ll \mu(E)^{1/3} h^{2/3} T^{2/3} (\log T)^{1/6}.$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$\mu(E) \gg T (\log T)^{-1/6}.$$

Из этого неравенства так же, как в работах [7], [8], выводим неравенство

$$N_0(T, G) \gg T (\log T)^{1/6}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 доказывается по существу так же, как теорема 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “The zeroes of Riemann’s zeta-function on the critical line”, *Math. Z.*, **10**:3-4 (1921), 283–317.
- [2] A. Selberg, “On the zeroes of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 59 pp.
- [3] С. М. Воронин, “О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 63–91.
- [4] А. А. Карацуба, “О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315.
- [5] А. А. Карацуба, “Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле”, *Теория чисел и анализ. Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 180–196.
- [6] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [7] А. А. Карацуба, “О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 483–514.
- [8] А. А. Карацуба, “Дробные моменты и нули $\zeta(s)$ на критической прямой”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 502–508.
- [9] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [10] R. M. Gabriel, “Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves”, *J. London Math. Soc.*, **2** (1927), 112–117.
- [11] S. Zmays, “On fractional moments of Dirichlet L -functions. II”, *Lithuanian Math. J.*, **46**:4 (2006), 494–508.
- [12] D. R. Heath-Brown, “Fractional moments of the Riemann zeta-function”, *J. London Math. Soc.* (2), **24**:1 (1981), 65–78.

С. А. Гриценко

Белгородский государственный университет

E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Поступило

04.01.2010

Исправленный вариант

19.03.2010