Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панчишкин, Две гипотезы о модулярном подъеме семейств зигелевых модулярных форм, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 565–574

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:58:43

Две гипотезы о модулярном подъеме семейств зигелевых модулярных форм

А. А. Панчишкин

Для простого числа p и положительного целого числа n изучаются методы построения p -адических семейств зигелевых модулярных форм рода n посредством использования некоторых отображений подъема. Дается описание L -функций, связанных с зигелевыми модулярными формами, а также их аналитических свойств. Формулируются две гипотезы о модулярном подъеме семейств зигелевых модулярных форм и о существовании отображений подъема из $\mathrm{GSp}_r \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m} для некоторых положительных чисел r и m .

Библиография: 20 названий.

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение

В данной работе рассматриваются дзета-функции зигелевых модулярных форм и их p -адические свойства, развивающие эту тему в новом контексте p -адических семейств.

Рассмотрим зигелеву модулярную группу $\Gamma_n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$ рода n , и пусть p – фиксированное простое число.

Здесь для любого коммутативного кольца R используется обозначение

$$\mathrm{Sp}_n(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_{2n}(R) \mid {}^t M J_n M = J_n \right\}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & J_n \end{pmatrix},$$

для симплектической группы рода n , которая является алгебраической подгруппой в группе

$$\mathrm{GSp}_n(R) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n} \mid {}^t M J_n M = \mu J_n, \mu \in R^* \right\}$$

симплектических подобий.

Работа выполнена при поддержке Института Фурье (Гренобль, Франция), Университета Пурдью (Лафайетт, США), и Лаборатории Понселе (Москва) во время визитов автора в Москву в феврале–июле 2009 г., в Кингс Колледж (Лондон) в июне 2009 г., в Университет Пурдью (Лафайетт, США) в июле 2009 г.

Пусть также символ $\mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ обозначает векторное пространство голоморфных зигелевых модулярных форм относительно группы Γ_n , и $\mathcal{S}_k(\Gamma_n)$ обозначает векторное подпространство голоморфных зигелевых параболических форм.

В данной работе обсуждаются следующие темы:

- 1) семейства зигелевых модулярных форм и их L -функций;
- 2) аналитические свойства L -функций относительно группы Sp_n ;
- 3) построение p -адических семейств зигелевых модулярных форм, параметризованных весом k с использованием конструкций Икеды–Мияваки;
- 4) два вида модулярного подъема из $\mathrm{GSp}_r \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m} (рода $n = r + 2m$).

Знаменитые примеры p -адических семейств эллиптических модулярных форм (для рода $n = 1$). Рассматриваются семейства

$$G_k = \frac{\zeta(1-k)}{2} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (\text{ряды Эйзенштейна веса } k \geq 4) \quad (1.1)$$

$$\varphi_k = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \lambda^{k-1}(\mathfrak{a}) q^{N\mathfrak{a}} \quad (\text{параболические формы CM-типа веса } k \geq 2). \quad (1.2)$$

Семейства φ_k были изучены Маниным и Вишиком [1], а также Катцом [2]. Семейства Эйзенштейна (1.1) были применены Серром [3] с целью модулярного объяснения сравнений Куммера для чисел Бернулли

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k},$$

для нового построения p -адической дзета-функции Куботы–Леопольдта.

Семейства (1.2) CM-типа отвечают степеням грессен-характера λ для мнимого квадратичного поля K (соответственно грессен-характера типа A_0 группы классов идеалов $\mathbb{A}_{K^*}/K^*$ (в смысле Вейля [4])) для поля K , причем $L(E, s) = L(\lambda, s)$ для некоторой эллиптической кривой E плексным умножением на элементы поля K (см. Дойринг [5]), причем функции φ_k выражались через некоторые тэта-ряды со сферическими многочленами, что доказывает модулярность эллиптической кривой E с комплексным умножением, причем

$$L(E, s) = L(\lambda, s) = L(\varphi_2, s).$$

Семейства φ_k CM-типа (1.2) доставляют также пример *обыкновенных семейств* в смысле теории Хиды (см. [6]) в случае простого числа p , *распадающегося* в поле K .

Как было доказано Маниным и Вишиком [1], функции двух переменных, заданные нормализованными специальными значениями $L^*(\varphi_k, s)$ для L -функций, отвечающих семейству φ_k ,

$$(s, k) \mapsto L^*(\varphi_k, s), \quad s = 1, \dots, k-1,$$

допускают продолжение до p -адической аналитической функции двух p -адических переменных (s, k) .

От эллиптических модулярных форм к зигелевым модулярным формам. Теперь рассмотрим зигелеву модулярную форму

$$f = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_{\mathcal{T}} q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$$

веса k и рода n на зигелевой полуплоскости

$$\mathbb{H}_n = \{ {}^t z = z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \},$$

где

$$q^{\mathcal{T}} = \exp(2\pi\sqrt{-1} \operatorname{tr}(\mathcal{T}z)),$$

$$B_n = \{ {}^t \mathcal{T} = \mathcal{T} \in M_n(\mathbb{Q}) \mid \mathcal{T} \geq 0 - \text{полуцелые матрицы} \}.$$

Для простоты будем рассматривать в данной работе только скалярнозначные зигелевы модулярные формы.

Предположим, что $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ является собственной функцией всех операторов Гекке. Тогда спинорная L -функция $L(f, \operatorname{Spin}, s)$ и стандартная L -функция $L(f, \operatorname{St}, s)$ для f (при $s \in \mathbb{C}$) суть произведения

$$L(f, \operatorname{Spin}, s) = \prod_p Q_{f,p}(p^{-s})^{-1}, \quad L(f, \operatorname{St}, s) = \prod_p R_{f,p}(p^{-s})^{-1}$$

где многочлены $Q_{f,p}(X)$ и $R_{f,p}(X)$ являются обобщенными многочленами Гекке в p -степени 2^n и $2n+1$, определение которых приведено при формулировке результатов.

ВОПРОС 1. Построить p -адические семейства

$$k \mapsto f_k = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_{\mathcal{T}}(k) q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$$

зигелевых модулярных форм f_k веса k и рода n , где коэффициенты Фурье $a_{\mathcal{T}}(k)$ формы F_k даются некоторыми p -адическими аналитическими функциями $k \mapsto a_{\mathcal{T}}(k)$ для $((\det 2\mathcal{T}), p) = 1$.

ВОПРОС 2. Распространить конструкции p -адических L -функций на нормализованные собственные значения L -функций

$$(s, k) \mapsto L^*(f_k, \operatorname{Spin}, s), \quad (s, k) \mapsto L^*(f_k, \operatorname{St}, s).$$

Отметим, что вопрос 2 о p -адической интерполяции специальных значений рассматриваемых L -функций тесно связан с вопросом 1 в силу общего феномена: линейная форма, задающая нормализованное специальное значение L -функции, может быть выражена через линейные формы, задаваемые коэффициентами Фурье. Более того, этот феномен оказывается применимым в подходящих семействах модулярных форм.

Однако, вопрос 2 более деликатен; частичные ответы на него будут развиты в последующих работах.

2. L -функции зигелевых модулярных форм

Разложение Фурье зигелевой модулярной формы. Пусть

$$f = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a(\mathcal{T}) q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$$

– зигелева модулярная форма веса k и рода n на зигелевой верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}_n = \{^t z = z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Напомним основные факты о разложении Фурье формы f , используя символ

$$q^{\mathcal{T}} = \exp(2\pi\sqrt{-1} \operatorname{tr}(\mathcal{T}z)) = \prod_{i=1}^n q_{ii}^{\mathcal{T}_{ii}} \prod_{i < j} q_{ij}^{2\mathcal{T}_{ij}} \in \mathbb{C}[[q_{11}, \dots, q_{nn}]] [q_{ij}, q_{ij}^{-1}]_{i,j=1, \dots, m},$$

где $q_{ij} = \exp(2\pi(\sqrt{-1} z_{i,j}))$, $\mathcal{T}$ – матрица из полугруппы B_n .

Операторы Гекке и сферическое отображение. Напомним, что локальная p -алгебра Гекке относительно пары $(\operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z}), \operatorname{GSp}_n(\mathbb{Z}[p^{-1}]))$, обозначаемая

$$\mathcal{L}_{n,p} = \mathbb{Q}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)],$$

порождена следующими $n + 1$ операторами Гекке:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(p) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{p, \dots, p}_n), \\ \mathbf{T}_i(p^2) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i, \underbrace{p^2, \dots, p^2}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а сферическое отображение

$$\Omega: \mathcal{L}_{n,p} = \mathbb{Q}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)] \rightarrow \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

задается некоторым гомоморфизмом колец (см. [7]).

Здесь для любого $m \in \mathbb{N}$ $T(a_1, \dots, a_m)$ обозначает двойной класс диагональной матрицы $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_m)$ с элементами $a_1, \dots, a_m$ на диагонали, так что мы полагаем $m = 2n$ для группы GSp_n и $m = n$ для группы GL_n . Напомним, что алгебра Гекке $\mathcal{L}_{n,p}$ действует на пространствах модулярных форм и на их подпространствах параболических форм.

Параметры Сатаке собственных функций операторов Гекке. Предположим, что $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ – собственная функция всех операторов Гекке $f \mapsto f|T$, $T \in \mathcal{L}_{n,p}$, для всех простых чисел p , так что $f|T = \lambda_f(T)f$. Тогда каждое число $\lambda_f(T) \in \mathbb{C}$ определяет гомоморфизм $\lambda_f: \mathcal{L}_{n,p} \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемый набором $n + 1$ комплексных чисел (p -параметров Сатаке формы f) $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$, определенных с точностью до действия группы Вейля W_n , так что

$$\lambda_f(T) = \Omega(T)(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

В частности,

$$\begin{aligned}\lambda_f([\mathbf{p}]) &= \alpha_0^2 \alpha_1 \cdots \alpha_n = p^{kn-n(n+1)/2}, \\ \lambda_f(\mathbf{T}(p)) &= \Omega(\mathbf{T}(p))(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \alpha_0(1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n) = \sum_{j=0}^n \alpha_0 s_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\end{aligned}$$

где

$$[\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]_n = \mathbf{T}_n(p^2) = T(\underbrace{p, \dots, p}_{2n}) = p\mathbf{I}_{2n}.$$

L -Функции для группы Sp_n и их аналитические свойства. Эти функции определяются как эйлеровы произведения с p -множителями

$$\begin{aligned}Q_{f,p}(X) &= (1 - \alpha_0 X) \prod_{r=1}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - \alpha_0 \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} X), \\ R_{f,p}(X) &= (1 - X) \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} X)(1 - \alpha_i X) \in \mathbb{Q}[\alpha_0^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}][X].\end{aligned}$$

Спинорная L -функция $L(f, \mathrm{Spin}, s)$ и стандартная L -функция $L(f, \mathrm{St}, s)$ формы f (для $s \in \mathbb{C}$ с $\mathrm{Re}(s) \gg 0$) определены равенствами

$$L(f, \mathrm{Spin}, s) = \prod_p Q_{f,p}(p^{-s})^{-1}, \quad L(f, \mathrm{St}, s) = \prod_p R_{f,p}(p^{-s})^{-1}.$$

Аналитические свойства спинорных L -функций $L(f, \mathrm{Spin}, s)$ были изучены Гекке [8] ($n = 1$), Андриановым [7] ($n = 2$), а также Асгари-Шмидтом [9], где теория эйлеровых произведений Ленглендса была применена к подгруппе Леви исключительной группы типа F_4 , и применена для построения мероморфного продолжения спинорной L -функции для рода $n = 3$.

Аналитические свойства стандартных L -функций $L(f, \mathrm{St}, s)$ были изучены Ранкином [10] и Шимурой [11] для $n = 1$.

Андрианов и Калинин [12] рассмотрели случай четного рода n , а Бёхерер [13] распространил эти результаты на случай произвольного рода, используя другой подход. Для $n = 1$ и нормализованной параболической собственной формы

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1)$$

мы имеем равенство

$$L(f, \mathrm{St}, s) = L_{2,f}(s + k - 1),$$

где

$$L_{2,f}(s) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n=1}^{\infty} a(n^2)n^{-s}$$

обозначает симметрический квадрат модулярной формы f (см. [11]).

3. Подъемы Икеды зигелевых модулярных форм

Напомним конструкции Икеды [14]–[16]: пусть k – четное положительное число, $\varphi \in S_{2k}(\Gamma_1)$ – нормализованная параболическая собственная форма веса $2k$, $g := F_{2m}(\varphi) \in S_{k+m}(\Gamma_{2m})$ – подъем Дьюка–Имамоглу–Икеды формы φ ; этот подъем рода $2m$ (при предположении $k \equiv m \pmod{2}$, $m \in \mathbb{N}$). Оказывается, что этот подъем допускает функториальную характеристику посредством равенства L -функций (см. [14]):

$$L(g, \text{St}, s) = L(F_{2m}(\varphi), \text{St}, s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{2m} L(\varphi, s + k + m - i).$$

p -Адические версии конструкций Икеды. Теперь рассмотрим p -адическое семейство

$$k \mapsto \varphi_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2k) q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]],$$

где коэффициенты Фурье $a_n(2k)$ нормализованной параболической собственной формы φ_{2k} , а также один из p -параметров Сатаке $\alpha(2k) := \alpha_p(2k)$ даются некоторыми p -адическими аналитическими функциями $k \mapsto a_n(2k)$ для $(n, p) = 1$ и $k \mapsto \alpha_p(2k)$.

Тогда оказывается, что разложения Фурье модулярных форм $F = F_{2m}(\varphi_{2k})$ могут быть явно вычислены и что эти зигелевы модулярные формы дают примеры p -адических семейств зигелевых модулярных форм (при определенных условиях сравнения на k , m и r).

Для точной формулировки результата рассмотрим p -адическое семейство $\{\varphi_{2k}\}$ эллиптических модулярных форм $\{\varphi_{2k}\}$ четного веса $2k$ и уровня 1. При этом не делается предположения о том, является ли семейство $\{\varphi_{2k}\}$ обыкновенным в смысле Хиды или нет.

ТЕОРЕМА (Хиса-Аки Кавамура, Панчишкин). *После подходящей регуляризации семейство*

$$g_{k+m}^{2m} := F_{2m}(\varphi_{2k}) \in S_{k+m}(\Gamma_{2m}) \quad (3.1)$$

является p -адическим семейством зигелевых модулярных форм веса $k + m$ и рода $2m$.

Красивые численные примеры для этой теоремы были вычислены недавно Кавамурой [17] для определенных p -адических семейств, содержащих параболическую форму Рамануджана $\Delta(z) = \varphi_{12}(z)$, а также для семейств, содержащих собственные параболические формы f_{18} и f_{20} для простых чисел $p = 11$, $p = 19$, $p = 23$. (Эти примеры были сообщены автору в частной беседе в июле 2008 г.)

4. Голоморфные модулярные подъемы

Две гипотезы о голоморфных модулярных подъемах из $\text{GSp}_r \times \text{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m} (рода $n = r + 2m$). Обсудим подъемы из $\text{GSp}_r \times \text{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m} рода $n = r + 2m$.

ГИПОТЕЗА I (о подъеме первого рода из $\mathrm{GSp}_r \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m}). Пусть

$$(f, g) \in \mathcal{M}_{k+m}(\Gamma_r) \times \mathcal{M}_{k+r+m}(\Gamma_{2m})$$

– пара собственных параболических форм относительно алгебр Гекке $\mathcal{L}_r = \bigotimes_p \mathcal{L}_{r,p}$ и $\mathcal{L}_{2m} = \bigotimes_p \mathcal{L}_{2m,p}$. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ p -параметры Сатаке форм f и g (напомним, что эти параметры определены с точностью до действия группы Вейля).

Тогда существует собственная параболическая форма F относительно алгебры Гекке $\mathcal{L}_{r+2m}$ рода $r + 2m$ и веса k с параметрами Сатаке

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_0 \beta_0, & \gamma_1 &= \beta_1, & \gamma_2 &= \beta_2, & \dots, & \gamma_{2m} &= \beta_{2m}, \\ \gamma_{2m+1} &= \alpha_1, & \dots, & \gamma_{r+2m} &= \alpha_r, \end{aligned}$$

для подходящего выбора p -параметров Сатаке $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ форм f и g .

Свидетельство в пользу этой гипотезы происходит из конструкций Икеды–Мияваки [14]–[16]: пусть k – положительное четное число, $\varphi \in S_{2k}(\Gamma_1)$ – нормализованная собственная форма веса $2k$, $g := F_{2m}(\varphi) \in S_{k+m}(\Gamma_{2m})$ – подъем Дьюка–Имаоглу–Икеды формы φ ; напомним, что этот подъем рода $2m$ (при предположении $k \equiv m \pmod{2}$, $m \in \mathbb{N}$).

Рассмотрим далее произвольную собственную зигелеву параболическую форму рода r и веса $k + m + r$ с $m, r \geq 1$.

Рассмотрим далее подъем Икеды $F_{2m+2r}(\varphi) \in S_{k+m+r}(\Gamma_{2m+2r})$ и интеграл

$$\mathcal{F}_{\varphi, f} = \int_{\Gamma_r \backslash \mathbb{H}_r} F_{2m+2r}(\varphi) \left(\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \right) f(z') (\det \mathrm{Im}(z'))^{k+m+r-1} dz' \in S_{k+m+r}(\Gamma_{2m+r}),$$

определяющий подъем Икеды–Мияваки, где $z \in \mathbb{H}_{2m+r}$, $z' \in \mathbb{H}_r$.

При условии необращения в нуль интеграла $\mathcal{F}_{\varphi, f}$ справедливо равенство

$$L(\mathcal{F}_{\varphi, f}, \mathrm{St}, s) = L(f, \mathrm{St}, s) \prod_{i=1}^{2m} L(\varphi, s + k + m + r - i).$$

Пусть далее $2k$ – четное положительное число, $\varphi \in S_{2k}(\Gamma_1)$ – нормализованная собственная форма веса $2k$, $F_{2m} \in S_{k+m}(\Gamma_{2m})$ – подъем Икеды формы φ рода $2m$ (предполагается, что $k \equiv m \pmod{2}$, $m \in \mathbb{N}$).

Теперь пусть $f \in S_{k+m+r}(\Gamma_r)$ обозначает произвольную собственную форму рода r и веса $k + m + r$ с $m, r \geq 1$.

Тогда пример выполнимости этой версии гипотезы дается следующим отображением:

$$\begin{aligned} (f, g) &= (f, F_{2m}(\varphi)) \mapsto \mathcal{F}_{\varphi, f} \in S_{k+r+m}(\Gamma_{r+2m}), \\ (f, g) &= (f, F_{2m}(\varphi)) \in S_{k+r+m}(\Gamma_r) \times S_{k+m}(\Gamma_{2m}). \end{aligned}$$

Еще один пример выполнимости этой гипотезы приходит из рядов Зигеля–Эйзенштейна

$$f = E_{k+m+r}^r, \quad g = E_{k+m}^{2m}$$

родов r и $2m$ и весов $k + m + r$ и $k + m$ соответственно: мы имеем

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = p^{k+m+r-r}, \quad \dots, \quad \alpha_r = p^{k+m+r-1},$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = p^{k+m-2m}, \quad \dots, \quad \beta_{2m} = p^{k+m-1},$$

откуда видно, что

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \beta_1 = p^{k+r+m-(r+2m)}, \quad \dots, \quad \gamma_{2m} = \beta_{2m} = p^{k+m-1},$$

$$\gamma_{2m+1} = \alpha_1 = p^{k+m+r-r}, \quad \dots, \quad \gamma_{2m+r} = \alpha_r = p^{k+m+r-1}$$

являются параметрами Сатаке рядов Эйзенштейна–Зигеля $F = E_{k+m+r}^{2m+r}$.

ГИПОТЕЗА II (о подъеме второго рода из $\mathrm{GSp}_r \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в GSp_{r+2m}). Пусть

$$(f, g) \in \mathcal{M}_{k+r-m}(\Gamma_r) \times \mathcal{M}_{k+r+m}(\Gamma_{2m})$$

– пара собственных форм относительно алгебр Гекке $\mathcal{L}_r = \bigotimes_p \mathcal{L}_{r,p}$ и $\mathcal{L}_{2m} = \bigotimes_p \mathcal{L}_{2m,p}$. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ p -параметры Сатаке форм f и g (вновь напомним, что эти параметры определены с точностью до действия группы Вейля).

Тогда существует собственная форма F относительно алгебры Гекке $\mathcal{L}_{r+2m}$ рода $r + 2m$ и веса k с параметрами Сатаке

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \gamma_r = \alpha_r, \quad \gamma_{r+1} = \beta_1, \quad \dots, \quad \gamma_{2m+r} = \beta_{2m}$$

для подходящего выбора $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ p -параметров Сатаке форм f и g .

Первый пример выполнимости этой гипотезы дается второй формой Мияваки F_{14} , характеризуемой равенством [18; следствие 6.2, с. 333]

$$L(F_{14}, \mathrm{St}, s) = L(f \otimes f, s + 11) L(\varphi, s + 13) L(\varphi, s + 12), \quad \text{где } f = \Delta, \quad \varphi = g_{26},$$

так что при $m = r = 1$, $k = 12$, $f = \Delta \in S_{k+r-m}(\Gamma_r) = S_{12}(\Gamma_1)$, $g = F_2(\varphi) \in S_{k+r+m}(\Gamma_{2m}) = S_{14}(\Gamma_2)$ выполнено

$$(f, g) = (f, F_{2m}(\varphi)) \mapsto \mathcal{F}_{\varphi, f} \in S_{k+r+m}(\Gamma_{r+2m}),$$

$$(f, g) = (f, F_{2m}(\varphi)) \in S_{k+r-m}(\Gamma_r) \times S_{k+r+m}(\Gamma_{2m}).$$

Еще один пример выполнимости этой гипотезы (для любого r) приходит из рядов Зигеля–Эйзенштейна

$$f = E_{k+r-m}^r, \quad g = E_{k+r+m}^{2m}$$

родов r и $2m$ и весов $k + r - m$ и $k + r + m$ соответственно: здесь мы имеем

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = p^{k-m+r-r}, \quad \dots, \quad \alpha_r = p^{k-m+r-1},$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = p^{k+m+r-2m}, \quad \dots, \quad \beta_{2m} = p^{k+m+r-1},$$

откуда видно, что

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \alpha_1 = p^{k+r+m-(r+2m)}, \quad \dots, \quad \gamma_r = \alpha_r = p^{k-m+r-1},$$

$$\gamma_{r+1} = \beta_1 = p^{k+m+r-2m}, \quad \dots, \quad \gamma_{2m+r} = \beta_{2m} = p^{k+m+r-1}$$

являются параметрами Сатаке рядов Эйзенштейна–Зигеля $F = E_{k+m+r}^{2m+r}$.

Отметим красивое обсуждение частного случая $r = 1$ этой гипотезы II в работе [19], а также его совместимости с гипотезой Делиня и другими результатами (например, гамма-множителями для функционального уравнения).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если проанализировать спинорные L -функции в этих гипотезах (задаваемые параметрами Сатаке

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0, \quad \gamma_1 = \beta_1, \quad \gamma_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \gamma_{2m} = \beta_{2m}, \\ \gamma_{2m+1} = \alpha_1, \quad \dots, \quad \gamma_{2m+r} = \alpha_r$$

в гипотезе I, или же

$$\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \gamma_r = \alpha_r, \quad \gamma_{r+1} = \beta_1, \quad \dots, \quad \gamma_{2m+r} = \beta_{2m}$$

в гипотезе II при подходящем выборе $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ параметров Сатаке форм f и g (определенных с точностью до действия группы Вейля)), мы увидим, что эта спинорная L -функция соответствует тензорному произведению спинорных L -функций, и эта L -функция отличается от той, которая появляется в подъеме Иосиды [20], где L -функция сводится к произведению L -функций Гекке.

В этом контексте мы хотели бы отметить принцип функториальности Ленглендса: знаменатели наших L -рядов имеют вид локальных L -множителей Ленглендса (отвечающих представлениям двойственной группы Ленглендса). Если рассмотреть гомоморфизмы

$${}^L \mathrm{GSp}_r = \mathrm{GSpin}(2r+1) \rightarrow \mathrm{GL}_{2r}, \quad {}^L \mathrm{GSp}_{2m} = \mathrm{GSpin}(4m+1) \rightarrow \mathrm{GL}_{2^{2m}}, \\ {}^L \mathrm{GSp}_{r+2m} = \mathrm{GSpin}(2r+4m+1) \rightarrow \mathrm{GL}_{2^{r+2m}},$$

то мы увидим, что наша гипотеза совместна с гомоморфизмом L -групп

$$\mathrm{GL}_{2r} \times \mathrm{GL}_{2^{2m}} \rightarrow \mathrm{GL}_{2^{r+2m}}, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = {}^L \mathrm{GL}_n.$$

Очень приятно поблагодарить Стефена Гельбарта, Фрейдуна Шахиди, Жака Тилуина и Михаила Цфасмана за ценные обсуждения и наблюдения.

Выражаю особую благодарность А. Кузнецову и А. Парштну за организацию моего доклада на семинаре И. Р. Шафаревича 3 марта 2009 г., а также Ирине Резвяковой за предложение подготовить статью для специального тома “Математических заметок”, посвященного памяти Анатолия Алексеевича Карацубы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Вишик, Ю. И. Манин, “ p -адические ряды Гекке мнимых квадратичных полей”, *Матем. сб.*, **95**:3 (1974), 357–383.
- [2] N. M. Katz, “ p -Adic L -functions for CM-fields”, *Invent. Math.*, **49**:3 (1978), 199–297.
- [3] J.-P. Serre, “Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques”, *Modular Functions of one Variable, III*, Lecture Notes in Math., **350**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 191–268.
- [4] A. Weil, “On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field”, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory* (Tokyo & Nikko, 1955), Sci. Council of Japan, Tokyo, 1956, 1–7.

- [5] M. Deuring, “Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1953, 85–94; “Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. II”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1955, 13–42; “Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. III”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1956, 37–76; “Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. IV”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1957, 55–80.
- [6] H. Hida, *Elementary Theory of L-Functions and Eisenstein Series*, London Math. Soc. Stud. Texts, **26**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [7] А. Н. Андрианов, “Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2”, *УМН*, **29**:3 (1974), 43–110.
- [8] E. Hecke, “Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I. II”, *Math. Ann.*, **114**:1 (1937), 1–28; “Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II”, *Math. Ann.*, **114**:1 (1937), 316–351.
- [9] M. Asgari, R. Schmidt, “Siegel modular forms and representations”, *Manuscripta Math.*, **104**:2 (2001), 173–200.
- [10] R. A. Rankin, “Contribution to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$ on the line $\Re s = 13/2$ ”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35** (1939), 351–356; “Contribution to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35** (1939), 357–372.
- [11] G. Shimura, “On the Holomorphy of certain Dirichlet Series”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **31**:1 (1975), 79–98.
- [12] А. Н. Андрианов, В. Л. Калинин, “Об аналитических свойствах стандартных дзета-функций зигелевых модулярных форм”, *Матем. сб.*, **106**:3 (1978), 323–339.
- [13] S. Böcherer, “Über die Funktionalgleichung Automorpher L -Funktionnen zur Siegelschen Modulgruppe”, *J. Reine Angew. Math.*, **362** (1985), 146–168.
- [14] T. Ikeda, “On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$ ”, *Ann. of Math.* (2), **154**:3 (2001), 641–681.
- [15] T. Ikeda, “Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki’s Conjecture”, *Duke Math. J.*, **131**:3 (2006), 469–497.
- [16] K. Murakawa, “Relations between symmetric power L -functions and spinor L -functions attached to Ikeda lifts”, *Kodai Math. J.*, **25**:1 (2002), 61–71.
- [17] H. Kawamura, *Congruences for the Ikeda lifts of Hida’s families mod 11, 19 and 23*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/KawamuraCong11-19-23.pdf>.
- [18] I. Miyawaki, “Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions”, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, **46**:2 (1992), 307–339.
- [19] B. Heim, *Towards Functoriality of Spinor L-Functions*, Manuscript, MPIM, Bonn, 2008, 18 pp.
- [20] H. Yoshida, “Siegel’s modular forms and the arithmetic of quadratic forms”, *Invent. Math.*, **60**:3 (1980), 193–248.

А. А. Панчишкин

Institut Fourier, Université Grenoble-1

E-mail: panchish@ujf-grenoble.fr

Поступило

30.11.2009