Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 594–604

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:45:41

О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными

А. В. Устинов

Длина разложения рационального числа в цепную дробь с нечетными неполными частными выражается через статистики Гаусса–Кузьмина для классической цепной дроби. Благодаря этому для средней длины алгоритма Евклида с нечетными неполными частными удастся доказать асимптотические формулы аналогичные тем, которые ранее были известны для классического алгоритма Евклида.

Библиография: 12 названий.

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Три быстрых варианта алгоритма Евклида и статистики Гаусса–Кузьмина. Среди различных модификаций алгоритма Евклида обычно выделяют три “быстрых” варианта (см. [1]), основанных на различных способах деления с остатком:

- классический алгоритм Евклида

$$a = bq + r, \quad q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, \quad 0 \leq r < b;$$

- алгоритм с выбором минимального по модулю остатка

$$a = bq + \varepsilon r, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad q = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad -\frac{b}{2} < r \leq \frac{b}{2};$$

- алгоритм с нечетными неполными частными

$$a = bq + \varepsilon r, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad q = 2 \left\lfloor \frac{a}{2b} \right\rfloor - 1, \quad -b < r \leq b.$$

Число шагов в быстрых вариантах в наихудшем случае и в среднем есть $O(\log N)$ (при $a, b \ll N$).

К “медленным” относят: алгоритм с вычитанием, алгоритм с делением “по избытку” и алгоритм с четными неполными частными. Для них число шагов в среднем

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МД-2339.2010.1, фонда “Династия”, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-12129-офи-м, 10-01-98001-р-сибирь-а, 09-01-00371-а) и проекта ДВО № 09-1-П4-03.

имеет порядок $\log^2 N$, а в наихудших случаях может быть порядка N (более подробная информация и библиография могут быть найдены в [1]).

Каждый из трех быстрых алгоритмов приводит к разложению чисел в соответствующие цепные дроби. Классический алгоритм:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_s}}}, \quad (1)$$

где a_0 — целое, $a_1, \dots, a_s$ — натуральные и $a_s \geq 2$ при $s \geq 1$. (Другой вариант обеспечить однозначность разложения — это требовать, чтобы последнее неполное частное было равно единице.) Алгоритм с выбором минимального по модулю остатка:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{\varepsilon_1}{a_1 + \frac{\varepsilon_2}{a_2 + \frac{\varepsilon_l}{\ddots + \frac{\varepsilon_l}{a_l}}}}, \quad (2)$$

где a_0 — целое, $a_1, \dots, a_l$ — натуральные, $\varepsilon_k = \pm 1$, $a_k \geq 2$, $1 \leq k \leq l$, $a_k + \varepsilon_{k+1} \geq 2$, $1 \leq k < l$, и $\varepsilon_l = -1$ при $l \geq 1$ и $a_l = 2$. Алгоритм с нечетными неполными частными:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{\varepsilon_1}{a_1 + \frac{\varepsilon_2}{a_2 + \frac{\varepsilon_h}{\ddots + \frac{\varepsilon_h}{a_h}}}} = \left\langle a_0; \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \dots, \frac{\varepsilon_h}{a_h} \right\rangle, \quad (3)$$

где a_0 — нечетное целое, $a_1, \dots, a_h$ — нечетные натуральные, $\varepsilon_k = \pm 1$, $a_k + \varepsilon_{k+1} \geq 1$, $1 \leq k < h$, и $\varepsilon_h = 1$ при $h \geq 1$ и $a_h = 1$. Длины разложений рационального числа a/b в дроби вида (1)–(3) будем соответственно обозначать $s(a/b)$, $l(a/b)$ и $h(a/b)$.

С вычислительной точки зрения естественно возникает задача об исследовании средних значений функций $s(a/b)$, $l(a/b)$ и $h(a/b)$. Вопрос о средней длине классических цепных дробей впервые был исследован Хейльбронном. В 1968 г. элементарными методами он доказал асимптотическую формулу (см. [2])

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^b s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log b + O(\log^4 \log b)$$

(здесь и далее знак звездочки в суммах означает, что переменная суммирования пробегает приведенную систему вычетов). В 1975 г. Портер, используя оценки сумм Клоостермана, для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами (см. [3])

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^b s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log b + C_P - 1 + O_\varepsilon(b^{-1/6+\varepsilon}), \quad (4)$$

где ε — любое положительное и

$$C_P = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\frac{3 \log 2}{2} + 2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 \right) - \frac{1}{2}$$

– константа, получившая название *константы Портера* (ее окончательный вид был найден Ренчем, см. [4]). При усреднении по обоим параметрам можно доказать более точную формулу (см. [5])

$$\frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a=1}^b s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log R + \tilde{C}_P - 1 + O(R^{-1} \log R^4), \quad (5)$$

где

$$\tilde{C}_P = C_P + \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \right).$$

Для цепных дробей вида (2) и (3) аналоги результата Хейльбронна были доказаны Ригером (см. [6], [7]). В работе [8] Балади и Валле эргодическими методами доказали двучленные асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a=1}^b l\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{2 \log \varphi}{\zeta(2)} \cdot \log R + \tilde{C}_l + O(R^{-\gamma}), \\ \frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a=1}^b h\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{3 \log \varphi}{\zeta(2)} \cdot \log R + \tilde{C}_h + O(R^{-\gamma}), \end{aligned}$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ – “золотое сечение” и $\gamma > 0$. В той же работе был поставлен вопрос о нахождении констант $\tilde{C}_l$ и $\tilde{C}_h$.

Оказывается, что вопрос о поведении в среднем функций $l(a/b)$ и $h(a/b)$ можно свести к анализу классического алгоритма Евклида, если воспользоваться статистиками Гаусса–Кузьмина. Это позволяет для средних значений $l(a/b)$ и $h(a/b)$ доказать формулы, аналогичные (4) и (5), а для констант $\tilde{C}_l$ и $\tilde{C}_h$ получить представления через сингулярные ряды.

Для рационального $a/b = [0; a_1, \dots, a_s, 1] \in [0, 1]$ и действительных $x \in [0, 1]$ статистиками Гаусса–Кузьмина называются числа (см. [9])

$$s_x\left(\frac{a}{b}\right) = \#\{j : 0 \leq j \leq s, [0; a_{j+1}, \dots, a_s, 1] \leq x\}. \quad (6)$$

В частности, $s_1(a/b) = s+1$ – длина работы классического алгоритма Евклида, примененного к паре чисел (a, b) (при этом подразумевается, что на первом шаге переменные переставляются, а на следующих шагах уже происходят деления с остатком, см. [10]).

Для дальнейших рассуждений оказывается удобным распространить определение статистик Гаусса–Кузьмина на произвольные $x > 0$:

$$s_x\left(\frac{a}{b}\right) = \#\{(j, t) : 0 \leq j \leq s, 0 \leq t < a_j, [t; a_{j+1}, \dots, a_s, 1] \leq x\} \quad (7)$$

(здесь считаем, что $a_0 = +\infty$). Для конечных цепных дробей выбрана запись с единицей на конце, чтобы новое определение (7) совпадало со старым (6) не только при $x \in [0, 1)$, но и при $x = 1$.

Для средних значений статистик Гаусса–Кузьмина выполняются равенства (доказательства из работ [5], [11] остаются справедливыми при произвольном положительном x)

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^b s_x \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \log b + C_P(x) + O(b^{-1/6} \log^{7/6+\varepsilon} b), \quad (8)$$

$$\frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a=1}^b s_x \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \log R + \tilde{C}_P(x) + O(R^{-1} \log^4 R), \quad (9)$$

где

$$C_P(x) = \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} + \log x - 1 \right) + \frac{2}{\zeta(2)} (h_1(x) + h_2(x)) + \frac{x^2}{x+1}, \quad (10)$$

$$\tilde{C}_P(x) = C_P(x) + \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

а функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ задаются абсолютно сходящимися сингулярными рядами

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n \frac{x}{n+mx} - \log(1+x) \right),$$

$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{n/x \leq m < n/x+n} \frac{1}{m} - \log(1+x) \right).$$

В статье [12] доказано, что $l(a/b) = s_{\varphi-1}(a/b)$. Поэтому результаты о средних значениях $l(a/b)$ (и формулы для вторых констант в асимптотических формулах) получаются подстановкой $x = \varphi - 1$ в формулы (8) и (9).

В настоящей статье доказывается, что при $b \geq 1$, $b/2 \leq a < b$, $(a, b) = 1$, $aa^* \equiv 1 \pmod{b}$, $1 \leq a^* < b$ выполняется тождество

$$h\left(\frac{a^*}{b}\right) + h\left(\frac{b-a^*}{b}\right) = s_{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) + s_{\varphi-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

Поэтому равенства (8) и (9) приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a=1}^b h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3 \log \varphi}{\zeta(2)} \log b + C_h + O(b^{-1/6} \log^{7/6+\varepsilon} b), \quad b \geq 2,$$

$$\frac{2}{R(R+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a=1}^b h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3 \log \varphi}{\zeta(2)} \log R + \tilde{C}_h + O(R^{-1} \log^4 R), \quad R \geq 2,$$

где

$$C_h = \frac{1}{2} (C_P(\varphi) + C_P(\varphi - 1)),$$

$$\tilde{C}_h = \frac{1}{2} (\tilde{C}_P(\varphi) + \tilde{C}_P(\varphi - 1)) = C_h + \frac{3 \log \varphi}{\zeta(2)} \left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \right),$$

и функции $C_P(x)$, $\tilde{C}_P(x)$ определены равенствами (10), (11).

2. Разложения в дуальные дроби. Наряду с разложениями вида (3) будем рассматривать дуальные (перевернутые) дроби

$$\left\langle 0; \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{a_1} \right\rangle^* = \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h + \dots + \frac{\varepsilon_2}{a_1}}$$

с теми же ограничениями на параметры: a_j – нечетные натуральные числа, $1 \leq j \leq h$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $2 \leq j \leq h+1$, $\varepsilon_{j+1} + a_j > 0$, $1 \leq j < h$.

ЛЕММА 1. *Рациональное число p/q представимо дуальной дробью тогда и только тогда, когда $p/q \in (\varphi - 2, \varphi)$; представление дуальной дробью единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия $p/q \in (\varphi - 2, \varphi)$ следует из неравенств

$$\varphi - 2 = \left\langle 0; \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \dots \right\rangle^* < \left\langle 0; \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{a_1} \right\rangle^* < \left\langle 0; \frac{1}{1}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \dots \right\rangle^* = \varphi.$$

Для доказательства его достаточности опишем алгоритм разложения. Имеем при $\varepsilon_{h+1} = -1$

$$-\frac{1}{\varphi^2} = \varphi - 2 < \frac{p}{q} < 0, \quad -\frac{q}{p} > \varphi^2,$$

и для некоторого нечетного $a_h > \varphi^2 - \varphi = 1$, определяемого однозначно, $-a_h - q/p$ будет лежать в интервале $(\varphi - 2, \varphi)$. Если же $\varepsilon_{h+1} = 1$, то $q/p > 1/\varphi$ и для некоторого нечетного

$$a_h \geq \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1,$$

также определяемого однозначно, $q/p - a_h$ также попадет в интервал $(\varphi - 2, \varphi)$. Таким образом, в каждом из случаев однозначно находится пара (ε_{h+1}, a_h) , для которой $\varepsilon_{h+1} + a_h > 0$ и осуществляется переход к дроби

$$\frac{r}{p} = \pm \frac{q}{p} - a_h \in (\varphi - 2, \varphi).$$

Разложение будет конечным, поскольку на каждом шаге уменьшается высота раскладываемого числа ($|r| + |p| < |p| + q$). Единственность представления дуальной дробью следует из однозначности описанного алгоритма.

Длину разложения рационального числа a/b в дуальную дробь будем далее обозначать через $h^*(a/b)$.

3. Цепные дроби и матрицы. При изучении статистических свойств конечных цепных дробей ключевую роль (см., например, [5], [11]) играет биекция, которая каждому непустому набору натуральных чисел $(a_1, \dots, a_n)$ (составленному из неполных частных рационального числа) ставит в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_s \end{pmatrix} \in \mathcal{M},$$

где

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}) : P \geq 0, 1 \leq P' \leq Q', 1 \leq Q \leq Q' \right\}. \quad (12)$$

Для изучения цепных дробей с нечетными неполными частными и дуальных к ним дробей введем отображение Φ , которое будет ставить в соответствие рациональному числу

$$\frac{a}{b} = \left\langle 0; \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{a_1} \right\rangle^* \in (\varphi - 2, \varphi)$$

матрицу

$$\Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{h+1} \\ 1 & a_h \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим основные свойства отображения Φ .

1°. Если $\Phi(a/b) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \left\langle 0; \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h}, \dots, \frac{\varepsilon_3}{a_2} \right\rangle^*, & \frac{P}{P'} &= \left\langle 0; \frac{1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \dots, \frac{\varepsilon_{h-1}}{a_{h-1}} \right\rangle, \\ \frac{P'}{Q'} &= \left\langle 0; \frac{\varepsilon_{h+1}}{a_h}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{a_1} \right\rangle^* = \frac{a}{b}, & \frac{Q}{Q'} &= \left\langle 0; \frac{1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \dots, \frac{\varepsilon_h}{a_h} \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

2°. Всякая матрица $S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$, лежащая в образе отображения Φ однозначно восстанавливается как по строке $(Q \ Q')$, так и по столбцу $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$. В частности, определитель матрицы S есть функция от отношения P'/Q' , которую в дальнейшем будем обозначать через $\Delta(P'/Q')$.

3°. Отображение Φ является биекцией между $\mathbb{Q} \cap (\varphi - 2, \varphi)$ и множеством матриц

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}) : 1 \leq Q \leq Q', PQ' - P'Q = \Delta\left(\frac{P'}{Q'}\right), \frac{P'}{Q'} \in (\varphi - 2, \varphi) \right\}.$$

4°. Если $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$, то $h^*(P'/Q') = h(Q/Q')$.

5°. Если $Q' \geq 2$ и

$$\Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} * & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N},$$

то $\Delta((Q' - P')/Q') = \Delta(P'/Q')$ и

$$\Phi\left(\frac{b-a}{b}\right) = \begin{pmatrix} * & Q' - P' \\ Q' - Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}.$$

6°. При $Q' \geq 2$ строка $(Q \ Q')$ и столбец $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ могут быть двумя способами дополнены до матрицы из $\mathcal{M}$. При этом в каждой из двух пар полученных матриц $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} P' - P & P' \\ Q' - Q & Q' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q - P & Q' - P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}$ ровно одна матрица лежит в множестве $\mathcal{N}$.

Свойство 1° проверяется по индукции.

Свойство 2° непосредственно следует из свойства 1°.

В свойстве 3° инъективность отображения Φ следует из леммы 1 и равенства $P'/Q' = a/b$. Для доказательства сюръективности рассмотрим произвольную матрицу $S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ и положим $\tilde{S} = \Phi(P'/Q') = \begin{pmatrix} \tilde{P} & P' \\ \tilde{Q} & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$. Тогда $\det S = \det \tilde{S} = \Delta(P'/Q')$, и для некоторого целого t выполняются равенства $\tilde{P} = P + tP'$, $\tilde{Q} = Q + tQ'$. Но $1 \leq Q, \tilde{Q} \leq Q'$, следовательно, $t = 0$ и $S = \tilde{S}$.

Свойство 4° вытекает из свойства 3° и равенств (13).

Для доказательства свойства 5° сначала заметим, что при $Q' = 2$ есть ровно одна матрица $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, лежащая в $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Для нее утверждение леммы очевидно, поэтому можно считать, что $Q' \geq 3$. Согласно свойству 2°, столбец $\begin{pmatrix} Q' - P' \\ Q' \end{pmatrix}$ можно дополнить до некоторой матрицы $\tilde{S} = \begin{pmatrix} * & Q' - P' \\ \tilde{Q} & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$. По определению (12) эта матрица лежит в множестве $\mathcal{M}$ и $1 \leq \tilde{Q} < Q'$. При этом $\tilde{Q} \neq Q$, так как $Q' - P' \neq P'$. Поскольку $\det S = \pm \det \tilde{S}$, то $QP' \equiv \pm \tilde{Q}P' \pmod{Q'}$, и $\tilde{Q} = Q' - Q$. Значит, имеем $\det S \equiv P'Q \equiv \det \tilde{S} \pmod{Q'}$ и $\Delta((Q' - P')/Q') = \Delta(P'/Q')$.

Свойство 6° следует из свойства 2°.

4. Сведение к статистикам Гаусса–Кузьмина.

ЛЕММА 2. Пусть $b \geq 2$, $b/2 \leq a < b$, $(a, b) = 1$. Тогда

$$h^* \left(\frac{a}{b} \right) + h^* \left(\frac{b-a}{b} \right) = s_\varphi \left(\frac{a}{b} \right) + s_{\varphi-1} \left(\frac{a}{b} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a/b = [0; 1, a_1, \dots, a_s, 1]$ ($s \geq 0$). Каждому k в пределах $0 \leq k \leq s$ будем ставить в соответствие четверку чисел (u_k, v_k, p_k, q_k) , определяемую равенствами $(u_k, v_k) = (p_k, q_k) = 1$,

$$\frac{u_k}{v_k} = [0; a_k, \dots, a_1, 1], \quad \frac{p_k}{q_k} = [0; a_{k+1}, \dots, a_s, 1].$$

Определим мультимножество (его элементы могут повторяться) $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(u_k, v_k, p_k, q_k) : 0 \leq k \leq s\}, \\ A_2 &= \left\{ (u_k, v_k, p_k, q_k) : 0 \leq k \leq s, u_k \leq \frac{v_k}{2}, \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{\varphi} \right\}, \\ A_3 &= \left\{ (u_k, v_k, p_k, q_k) : 0 \leq k \leq s, v_k \geq 2, \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{\varphi} \right\}. \end{aligned}$$

При этом кратность вхождения каждой четверки в множество A равна сумме кратностей, с которыми эта четверка входит в A_1 , A_2 и A_3 .

Разложению

$$\frac{a}{b} = \left\langle 0; \frac{1}{b_h}, \frac{\varepsilon_h}{b_{h-1}}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{b_1} \right\rangle^*$$

и номеру j в пределах $2 \leq j \leq h$ будем ставить в соответствие четверку чисел $(\alpha_j, \beta_j, \lambda_j, \mu_j)$, определяемую условиями $\alpha_j, \beta_j, \mu_j > 0$, $(\alpha_j, \beta_j) = (\lambda_j, \beta_j) = 1$,

$$\frac{\alpha_j}{\beta_j} = \left\langle 0; \frac{1}{b_j}, \frac{\varepsilon_{j+1}}{b_{j+1}}, \dots, \frac{\varepsilon_h}{b_h} \right\rangle, \quad \frac{\lambda_j}{\mu_j} = \left\langle 0; \frac{\varepsilon_j}{b_{j-1}}, \dots, \frac{\varepsilon_2}{b_1} \right\rangle^*. \quad (14)$$

Через B обозначим множество всех таких четверок:

$$B = \left\{ (\alpha_j, \beta_j, \lambda_j, \mu_j) : 2 \leq j \leq h \right\}.$$

При этом $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ (\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in B : 0 < \frac{\lambda}{\mu} \leq 1 \right\}, \\ B_2 &= \left\{ (\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in B : 1 < \frac{\lambda}{\mu} < \varphi \right\}, \\ B_3 &= \left\{ (\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in B : \varphi - 2 < \frac{\lambda}{\mu} < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Через $\tilde{B}$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ и $\tilde{B}_3$ обозначим аналогичные множества, построенные из разложения $(b-a)/b$ в дуальную дробь.

По определению статистик Гаусса–Кузьмина

$$\#(A_1 \cup A_2) = s_\varphi \left(\frac{a}{b} \right) - 1, \quad \#A_3 = s_{\varphi-1} \left(\frac{a}{b} \right) - 1.$$

Кроме того,

$$\#B = h^* \left(\frac{a}{b} \right) - 1, \quad \#\tilde{B} = h^* \left(\frac{b-a}{b} \right) - 1.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить равномощность множеств A и $B \cup \tilde{B}$. Для этого укажем отображения f_i , $i = 1, 2, 3$, которые устанавливают взаимно однозначные отображения из A_i в $B_i \cup \tilde{B}_i$:

$$\begin{aligned} f_1(u, v, p, q) &= (u, v, p, q), \\ f_2(u, v, p, q) &= (u, v - u, p + q, q), \\ f_3(u, v, p, q) &= (v - u, v, -p, p + q). \end{aligned}$$

Например, если $(u, v, p, q) \in A_1$, то для некоторых u' и v'

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & p \\ * & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & a \\ * & b \end{pmatrix},$$

где каждый из сомножителей лежит в $\mathcal{M}$. Если при этом $\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$, то $(u, v, p, q) \in B_1$, если же $\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}$, то $\begin{pmatrix} u-u' & v-v' \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ (см. свойство 6°),

$$\begin{pmatrix} u-u' & v-v' \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & p \\ * & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & b-a \\ * & b \end{pmatrix},$$

и $(u, v, p, q) \in \tilde{B}_1$. При этом каждая четверка $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in B_1 \cup \tilde{B}_1$ будет лежать в образе f_1 . Так, если $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in B_1$, то (сомножители лежат в $\mathcal{N}$)

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \lambda \\ * & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & a \\ * & b \end{pmatrix}.$$

Первый сомножитель лежит и в множестве $\mathcal{M}$, а матрицы $\begin{pmatrix} * & \lambda \\ * & \mu \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} * & a \\ * & b \end{pmatrix}$ можно превратить в матрицы из $\mathcal{M}$, изменив первые столбцы (см. свойство 6°). Значит, $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in A_1$.

Если же $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in \tilde{B}_1$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \lambda \\ * & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & b-a \\ * & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha - \alpha' & \beta - \beta' \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \lambda \\ * & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & a \\ * & b \end{pmatrix}.$$

В последнем равенстве каждый из сомножителей (быть может, после замены элементов, помеченных звездочками) будет лежать в $\mathcal{M}$, а значит, и в этом случае $(\alpha, \beta, \lambda, \mu) \in A_1$.

Биективность f_2 и f_3 проверяется аналогично, исходя из равенств

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & p \\ q' & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & v' - u' \\ u & v - u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' + q' & p + q \\ q' & q \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & p \\ q' & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' - u' & v' \\ v - u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p' & -p \\ p' + q' & p + q \end{pmatrix},$$

которые произведения матриц из $\mathcal{M}$ позволяют переводить в произведения матриц из множества $\mathcal{N}$ и наоборот.

ПРИМЕР. Для дроби $5/7 = [0; 1, 2, 1, 1]$ множества A_1 , A_2 и A_3 имеют вид

$$A_1 = \{(1, 1, 2, 5), (1, 3, 1, 2), (3, 4, 1, 1)\}, \quad A_2 = A_3 = \{(1, 3, 1, 2)\}.$$

Элементы A_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с разложениями матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \Psi(1, 2, 1, 1)$ в произведение элементов $\mathcal{M}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По разложению $5/7 = \langle 0; 1/1, 1/1, 1/1, -1/3 \rangle^*$ находится множество

$$B = \{(1, 1, 2, 5), (1, 2, 3, 2), (2, 3, -1, 3)\},$$

элементам которого соответствуют разложения матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \Phi(5/7)$ в произведение матриц из $\mathcal{N}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$B_1 = \{(1, 1, 2, 5)\}, \quad B_2 = \{(1, 2, 3, 2)\}, \quad B_3 = \{(2, 3, -1, 3)\}.$$

Аналогично, по дроби $2/7 = \langle 0; 1/3, 1/1, 1/1 \rangle^*$ строится множество

$$\tilde{B} = \{(1, 3, 1, 2), (3, 4, 1, 1)\},$$

элементы которого соответствуют разложению матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \Phi(2/7)$ в произведение матриц из $\mathcal{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\tilde{B}_1 = \{(1, 3, 1, 2), (3, 4, 1, 1)\}, \quad \tilde{B}_2 = \tilde{B}_3 = \emptyset.$$

Легко видеть, что $f_i(A_i) = B_i \cup \tilde{B}_i$, $i = 1, 2, 3$.

5. Основные результаты.

ЛЕММА 3. Пусть $b \geq 2$, $(a, b) = 1$, $1 \leq a$, $a^* < b$, $aa^* \equiv 1 \pmod{b}$. Тогда

$$h^*\left(\frac{a}{b}\right) + h^*\left(\frac{b-a}{b}\right) = h\left(\frac{a^*}{b}\right) + h\left(\frac{b-a^*}{b}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополняя столбцы $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b-a \\ b \end{pmatrix}$ до матриц из $\mathcal{N}$, при $\Delta(a/b) = 1$ получим матрицы

$$\begin{pmatrix} * & a \\ b-a^* & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & b-a \\ a^* & b \end{pmatrix},$$

а при $\Delta(a/b) = -1$ – матрицы

$$\begin{pmatrix} * & a \\ a^* & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & b-a \\ b-a^* & b \end{pmatrix}.$$

В любом случае утверждение леммы вытекает из свойства 4°.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Применяя леммы 2 и 3, находим

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^b h\left(\frac{a}{b}\right) &= \sum_{a=1}^b h\left(\frac{a^*}{b}\right) = \sum_{a=1}^b h^*\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= \sum_{b/2 \leq a \leq b}^* \left(h^*\left(\frac{a}{b}\right) + h^*\left(\frac{b-a}{b}\right) \right) = \sum_{b/2 \leq a \leq b}^* \left(s_\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + s_{\varphi-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right). \end{aligned}$$

Если $a/b = [0; 1, a_1, a_2, \dots, a_s, 1]$, то $(b-a)/b = [0; a_1 + 1, a_2, \dots, a_s, 1]$. Поэтому, по определению статистик Гаусса–Кузьмина

$$s_x\left(\frac{a}{b}\right) - s_x\left(\frac{b-a}{b}\right) = \chi_{[0, \{x\}]}\left(\frac{a}{b}\right) + \chi_{[0, x]}\left(\frac{b-a}{b}\right) - \chi_{[0, \{x\}]}\left(\frac{b-a}{b}\right) - \chi_{[0, x]}\left(\frac{a}{b-a}\right),$$

где χ_I – характеристическая функция отрезка I . В частности,

$$s_\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = s_\varphi\left(\frac{b-a}{b}\right), \quad s_{\varphi-1}\left(\frac{a}{b}\right) = s_{\varphi-1}\left(\frac{b-a}{b}\right).$$

Значит,

$$\sum_{a=1}^b h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^b \left(s_\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + s_{\varphi-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right),$$

а следовательно, и

$$\sum_{1 \leq a \leq b} h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq a \leq b} \left(s_\varphi\left(\frac{a}{b}\right) + s_{\varphi-1}\left(\frac{a}{b}\right) \right).$$

Применяя равенства (8) и (9), приходим к утверждению теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Vallée, “Dynamical analysis of a class of Euclidean algorithms”, *Theoret. Comput. Sci.*, **297**:1-3 (2003), 447–486.
- [2] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number Theory and Analysis*, Papers in Honor of Edmund Landau, Plenum, New York, 1969, 87–96.
- [3] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
- [4] D. E. Knuth, “Evaluation of Porter’s constant”, *Comput. Math. Appl.*, **2**:2 (1976), 137–139.
- [5] А. В. Устинов, “Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 189–224.
- [6] G. J. Rieger, “Über die mittlere Schrittzahl bei Divisionsalgorithmen”, *Math. Nachr.*, **82**:1 (1978), 157–180.
- [7] G. J. Rieger, “Ein Heilbronn–Satz für Kettenbrüche mit ungeraden Teilnennern”, *Math. Nachr.*, **101**:1 (1981), 295–307.
- [8] V. Baladi, B. Vallée, “Euclidean algorithms are Gaussian”, *J. Number Theory*, **110**:2 (2005), 331–386.
- [9] М. О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11.
- [10] Д. Э. Кнут, *Искусство программирования. Т. 2: Получисленные алгоритмы*, М., Вильямс, 2000.
- [11] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216.
- [12] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимального по модулю остатка”, *Матем. заметки*, **85**:1 (2009), 153–156.

А. В. Устинов

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступило

13.04.2010