Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ютила, Преобразование Меллина функции Харди –
целая функция, *Матем. заметки*, 2010, том 88, вы-
пуск 4, 635–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:26:54

Преобразование Меллина функции Харди – целая функция

М. Ютила

В работе доказано, что (подходящим образом модифицированное) преобразование Меллина функции Харди $Z(x)$ является целой функцией. Доказательство основано на том факте, что функция $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$ является целой.

Библиография: 6 названий.

Памяти профессора А. А. Карацубы

1. Введение. Пусть $\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(s\pi/2) \Gamma(1-s)$ есть функция из функционального уравнения $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ для дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Определим функцию Харди как

$$Z(t) = \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \chi\left(\frac{1}{2} + it\right)^{-1/2}.$$

Тогда $Z(t)$ является вещественной для вещественного t и $|Z(t)| = |\zeta(1/2 + it)|$. Как было недавно показано Ивичем [1], преобразование Меллина (модифицированное)

$$\mathcal{M}(s) = \int_1^\infty Z(x) x^{-s} dx$$

может быть аналитически продолжено на полуплоскость $\sigma > 0$. Мы докажем аналитичность этой функции на всей комплексной плоскости.

ТЕОРЕМА. *Функция $\mathcal{M}(s)$ является целой.*

Для доказательства воспользуемся методом работы [2], где мероморфность преобразования Меллина для $Z^2(x)$ была доказана нами как следствие мероморфности $\zeta^2(s)$. Аналогично, аналитичность $\mathcal{M}(s)$ будет следствием аналитичности функции $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$.

Аналитическая природа преобразования Меллина для $Z^k(x)$ известна для трех случаев: $k = 1, 2, 4$. В случае $k = 2$ имеется двойной полюс в точке $s = 1$, а также простые полюсы в точках $s = -1, -3, \dots$. Вычеты в последних полюсах были определены Луккаринен [3] через числа Бернулли. Другой подход к мероморфному продолжению предложен Ивичем [4]. В его рассуждениях, как и у Луккаринен, было использовано преобразование Лапласа. Мероморфное продолжение для $k = 4$ было получено Мотохашаи (см. [5; теорема 5.4]). В этом случае кроме полюса пятого

порядка в точке $s = 1$ имеются полюса, отвечающие собственным значениям гиперболического лапласиана и комплексным нулям дзета-функции Римана. Для случая $k = 3$ формула для соответствующего преобразования Меллина в полуплоскости $\sigma > 1$ была получена Ивичем [1]. Его аналитическое продолжение, содержащее функцию числа делителей $d_3(n)$, представляет собой сложную открытую проблему.

2. Предварительные выкладки. Достаточно доказать, что функция $\mathcal{M}(s)$ может быть аналитически продолжена на любую область

$$D = \{s = \sigma + it \mid \sigma > -A, |t| < T\}$$

где $A, T > 0$. Далее будем считать эти параметры фиксированными, а также предполагать, что T является достаточно большим.

Следуя рассуждениям [2], определим

$$f(s, w) = \zeta(w) \chi(w)^{-1/2} \left(- \left(w - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-s/2},$$

и заметим, что для $\sigma > 1$

$$\mathcal{M}(s) = -i \int_{1/2+i}^{1/2+i\infty} f(s, w) dw. \quad (1)$$

Используем приближение (см. [6; формула (1.25)])

$$\chi(a + ix) = \chi_0(a + ix) \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right), \quad \chi_0(a + ix) = \left(\frac{2\pi}{x} \right)^{a+ix-1/2} e^{i(x+\pi/4)},$$

где a ограничено и $x \geq x_0 > 0$. Нам понадобится более точная форма этого приближения, а именно, асимптотическое разложение, где $1 + O(1/x)$ заменяется полиномом степени N от $1/x$ с остаточным членом $O(1/x^{N+1})$.

Затем мы перенесем интегрирование в (1) на прямую $\operatorname{Re} w = 5/4$, и чтобы гарантировать сходимость нового интеграла, предположим, что $\sigma > 11/8$. Введем отношение эквивалентности $F(s) \sim G(s)$, означающее, что $F(s)$ и $G(s)$ голоморфны в области $\sigma > 11/8$, $|t| < T$, и что $F(s) - G(s)$ может быть аналитически продолжена на D . Таким образом, наша теорема может быть сформулирована как отношение $\mathcal{M}(s) \sim 0$. Далее, новый интеграл вдоль прямой $\operatorname{Re} w = 5/4$ эквивалентен $\mathcal{M}(s)$, поскольку интеграл по отрезку $[1/2 + i, 5/4 + i]$ является целой функцией. Следовательно, подставляя ряд для дзета-функции в подынтегральное выражение и интегрируя почленно, получим

$$\mathcal{M}(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} I_n(s),$$

где

$$I_n(s) = \int_1^{\infty} n^{-ix} \chi\left(\frac{5}{4} + ix\right)^{-1/2} \alpha(x, s) x^{-s} dx, \quad \alpha(x, s) = \left(1 - \frac{3}{2} ix^{-1} - \frac{9}{16} x^{-2} \right)^{-s/2}.$$

Кроме того, имеем

$$\mathcal{M}(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} \widetilde{I}_n(s), \quad (2)$$

где интеграл $\tilde{I}_n(s)$ аналогичен $I_n(s)$ с той разницей, что интегрирование ведется по интервалу $[T^2, \infty)$.

Упростим интеграл $\tilde{I}_n(s)$, заменив $\chi(5/4 + ix)^{-1/2}\alpha(x, s)$ достаточно длинным асимптотическим разложением по степеням $1/x$ с главным членом $\chi_0(5/4 + ix)^{-1/2}$. Тогда остаточный член в (2) будет пренебрежимо мал. Вклад в $\tilde{I}_n(s)$ от главного члена составит

$$\tilde{J}_n(s) = \int_{T^2}^{\infty} n^{-ix} \chi_0 \left(\frac{5}{4} + ix \right)^{-1/2} x^{-s} dx;$$

другие члены асимптотического разложения внесут вклад в виде сдвинутых функций $\tilde{J}_n(n+\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$, умноженных на полиномы от s . Поэтому, если мы сможем показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} \tilde{J}_n(s) \sim 0, \quad (3)$$

то правая часть (2) будет эквивалентна нулю и, тем самым, $\mathcal{M}(s) \sim 0$. Наконец, (3) будет эквивалентно соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} J_n(s) \sim 0, \quad (4)$$

где

$$J_n(s) = \int_1^{\infty} n^{-ix} \chi_0 \left(\frac{5}{4} + ix \right)^{-1/2} x^{-s} dx = e^{-\pi i/8} \int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^{3/8} x^{-s} e^{i\varphi_n(x)} dx, \quad (5)$$

$$\varphi_n(x) = -x \log n + \left(\frac{x}{2} \right) \log \left(\frac{x}{2\pi} \right) - \frac{x}{2}.$$

Следовательно, остается доказать утверждение (4).

3. Завершение доказательства. Экспоненциальный интеграл $J_n(s)$ из (5) можно было бы вычислить с помощью метода перевала, но поскольку подынтегральная функция довольно проста, мы предпочтем более простой способ. Заметим, что поскольку s ограничена, функцию x^{-s} можно рассматривать как стационарную; множитель $e^{i\varphi_n(x)}$ в подынтегральном выражении является хорошо осциллирующей функцией.

Седловой точкой для $J_n(s)$ является нуль $\varphi'_n(x)$: $x_0 = x_0(n) = 2\pi n^2$. Поэтому основной вклад в $J_n(s)$ вносит подходящая окрестность x_0 . Выберем нормировку так, чтобы седловая точка оказалась равной 1. Определим теперь окрестность точки x_0 с помощью весовой функции W с носителем в окрестности 1: $[1/2, 3/2]$. Предположим, что $W(1+v)$ есть четная функция v такая, что $W(1+v) = 1$ при $|v| \leq 1/4$. Кроме того, предположим, что W имеет достаточно много производных и все они ограничены. Соответствующая весовая функция переменной x – функция вида

$$W_n(x) = W \left(1 + n^{3/4} \left(\frac{x}{2\pi n^2} - 1 \right) \right)$$

с носителем на интервале $|x - 2\pi n^2| \leq \pi n^{5/4}$. Нам понадобится оценка первых нескольких производных $W_n^{(\nu)}(x) \ll n^{-(5/4)\nu}$. Теперь интеграл $J_n(s)$ разлагается

следующим образом:

$$J_n(s) = J_{n,0}(s) + J_{n,1}(s) + J_{n,2}(s),$$

где

$$J_{n,0}(s) = e^{-\pi i/8} \int_1^\infty W_n(x) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{3/8} x^{-s} e^{i\varphi_n(x)} dx,$$

$$J_{n,1}(s) = e^{-\pi i/8} \int_1^{2\pi n^2} (1 - W_n(x)) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{3/8} x^{-s} e^{i\varphi_n(x)} dx,$$

и $J_{n,2}(s)$ подобен $J_{n,1}(s)$ с учетом того, что интеграл берется по $[2\pi n^2, \infty)$.

Повторное интегрирование по частям по отношению к множителю $e^{i\varphi_n(x)}$ с функцией $\varphi'_n(x) = (1/2) \log(x/2\pi n^2)$ показывает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} J_{n,j}(s) \sim 0$$

при $j = 1, 2$. Действительно, интегрируемые члены (возникающие только в случае $j = 1$) не зависят от s , и подынтегральные функции, появляющиеся в процессе интегрирования, шаг от шага убывают по x . В конечном счете эта процедура приводит к двум рядам, которые голоморфны на D .

Остается рассмотреть интегралы $J_{n,0}(s)$ и доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/4} J_{n,0}(s) \sim 0. \quad (6)$$

Ясно, что здесь достаточно ограничиться значениями n , превышающими T^2 . Запишем $J_{n,0}(s)$ сначала с помощью переменной $u = x/2\pi n^2$, а затем с помощью переменной $v = u - 1$. Так получим

$$W_n(x) = V_n(u) = W(1 + n^{3/4}(u - 1)) = W(1 + n^{3/4}v) = V_n(1 + v),$$

$$J_{n,0}(s) = e^{-\pi i/8} (2\pi)^{1-s} n^{11/4-2s} \int_0^\infty V_n(u) \exp(i\pi n^2(u \log u - u)) u^{3/8-s} du$$

$$= e^{-\pi i/8} (2\pi)^{1-s} n^{11/4-2s} (-1)^n$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \frac{V_n(1+v)}{(1+v)^{s-3/8}} \exp\left(i\pi n^2\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{6}v^3 + \dots\right)\right) dv.$$

Поскольку $|v| \leq (2n^{3/4})^{-1}$ и, по предположению, $n \geq T^2$, то v -интеграл при этом может быть приближенно записан в виде конечного числа интегралов вида

$$\int_{-\infty}^\infty V_n(1+v) v^{2k} \exp\left(i\pi n^2 \frac{v^2}{2}\right) dv, \quad (7)$$

возможно умноженных на полином от переменной s степени n^{2h} , $2k \geq 3h$; здесь h и k – целые неотрицательные числа. Ошибки приближения пренебрежимо малы, и при доказательстве (6) ими можно пренебречь.

Последние из указанных интегралов могут быть вычислены приближенно с помощью известной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda v^2} dv = \sqrt{\pi} \lambda^{-1/2} e^{\pi i/4},$$

где $\lambda > 0$. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_n(1+v) e^{i\lambda v^2} dv = \sqrt{\pi} \lambda^{-1/2} e^{\pi i/4} + \int_{-\infty}^{\infty} (V_n(1+v) - 1) e^{i\lambda v^2} dv. \quad (8)$$

При $\lambda = \pi n^2/2$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_n(1+v) e^{i\pi n^2 v^2/2} dv = \sqrt{2} n^{-1} e^{\pi i/4} + \int_{-\infty}^{\infty} (V_n(1+v) - 1) e^{i\pi n^2 v^2/2} dv.$$

Повторное интегрирование по частям показывает, что для доказательства (6) интегралом справа можно пренебречь из-за малости. Аналогично, повторно интегрируя по частям в правой части (8), дифференцируя k раз по λ и подставляя наконец $\lambda = \pi n^2/2$, мы видим, что с некоторыми константами c_k интегралы (7) равны $c_k n^{-1-2k}$ с пренебрежимо малой ошибкой.

В итоге, подставляя главные члены для $J_{n,0}(s)$ (снова при всех $n \geq 1$) в ряд из (6), получаем ряд

$$\sqrt{2} e^{\pi i/8} (2\pi)^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{1/2-2s} = \sqrt{2} e^{\pi i/8} (2\pi)^{1-s} (2^{3/2-2s} - 1) \zeta\left(2s - \left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Это целая функция. От других членов $J_{n,0}(s)$ получаются аналогичные ряды, умноженные на полиномы по s при s , сдвинутом на натуральное число, которые также являются целыми функциями. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Ivić, “On the Mellin transforms of powers of Hardy’s function”, *Hardy-Ramanujan J.*, **33** (2010), 32–58; arXiv:[math.NT/1001.1824](#).
- [2] M. Jutila, “The Mellin transform of the square of Riemann’s zeta-function”, *Period. Math. Hungar.*, **42**:1-2 (2001), 179–190.
- [3] M. Lukkarinen, “The Mellin transform of the square of Riemann’s zeta-function and Atkinson’s formula”, Dissertation, University of Turku, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss.*, **140** (2005).
- [4] A. Ivić, “The Mellin transform of the square of Riemann’s zeta-function”, *Int. J. Number Theory*, **1**:1 (2005), 65–73.
- [5] Y. Motohashi, *Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Tracts in Math., **127**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [6] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, New York, NY, 1985.

М. Ютила
University of Turku, Финляндия
E-mail: jutila@utu.fi

Поступило
02.01.2010