Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, С. А. Терентьев, Регуляризованные следы возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на единичной двумерной сфере, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 702–705

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:34:09

УДК 517.927.25

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ НА ЕДИНИЧНОЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

В. В. Дубровский, С. А. Терентьев

В работе с достаточно полным обоснованием приведены формулы регуляризованных следов для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной двумерной сфере с возмущением, определяемым ограниченным комплекснозначным потенциалом.

Библиография: 5 названий.

Пусть $T = -\Delta$ – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной двумерной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $T: H \rightarrow H$, где $H = L_2(S^2)$ – комплексное гильбертово пространство. Известно [1, гл. III, с. 163–172], что его спектр дискретен, собственными значениями являются числа $\lambda_k = k(k+1)$, имеющие кратность $\nu_k = 2k+1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Мы рассматриваем оператор $T + P$, где $P: H \rightarrow H$ – оператор умножения на ограниченную в существенном и измеримую по Лебегу на сфере S^2 комплекснозначную функцию $p(\in L^\infty(S^2))$. Оператор P ограничен в H .

В случае гладкого потенциала p обсуждаемый круг вопросов полностью решен в работе В. Е. Подольского [2].

Через $\mu_{k,i}$ обозначим собственные значения оператора $T + P$, занумерованные с учетом алгебраической кратности ν_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) так, что

$$|\mu_{k,i} - \lambda_k| \leq \text{const}, \quad i = 0, 1, \dots, \nu_k - 1.$$

Ниже в предложении 1 мы докажем, что спектр оператора $T + P$ дискретен и обладает отмеченным здесь свойством. Через $v_{k,i} \in H$ ($i = 0, 1, \dots, \nu_k - 1$) обозначим собственные ортонормированные векторы оператора T , соответствующие собственным значениям λ_k . Здесь и далее мы следуем [3].

Основной результат этой работы выражен в следующей теореме и представляет некоторое усиление главного утверждения упомянутой работы [3].

ТЕОРЕМА. Если K – вращение сферы такое, что $Kp(x) = p(Kx) = tp(x)$, $|t| = 1$, $t^2 \neq 1$, то для собственных значений $\mu_{k,i}$ возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами $T + P$ имеют место формулы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=0}^{2k} \mu_{k,i} - k(k+1)(2k+1) \right) = 0.$$

(Вращением K сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ называют ограничение вращения пространства $\mathbb{R}^3$ на сферу S^2 .)

В доказательстве теоремы используется достаточно хорошо разработанная В. А. Садовничим [4] и его учениками теория регуляризованных следов для различных классов линейных операторов $T + P$ с резольвентным оператором $R(\lambda, T) = (T - \lambda E)^{-1}$, принадлежащим некоторому S_p -идеалу ($1 \leq p \leq \infty$) кольца ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве [5]. (Норму оператора $A \in S_p$ обозначают $\|A\|_p$.)

Остановимся подробнее на технике доказательства приведенной теоремы. Положим: $d_k = \inf_{n \neq k} |\lambda_n - \lambda_k|$,

$$\begin{aligned} l_N &= \{\lambda \mid \lambda = \lambda_N + d_N 2^{-1} + i\rho, -\infty < \rho < +\infty\}, \\ \alpha_N^{k-1}(P) &= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{l_N} \lambda (R(\lambda, T)P)^k R(\lambda, T) d\lambda, \\ \beta_N^{k-1}(P) &= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{l_N} \lambda (R(\lambda, T)P)^k R(\lambda, T + P) d\lambda, \end{aligned}$$

$\varphi_N(\rho) = \|R(\lambda, T)\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ – норма Гильберта–Шмидта и $\lambda = \lambda_N + d_N 2^{-1} + i\rho$.

Имеют место следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спектр оператора $T + P$ дискретен. Между спектрами $T + P$ и T существует синхронная нумерация с учетом алгебраической кратности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – единичный оператор в H . Тогда

$$T + P - \lambda E = (E + PR(\lambda, T))(T - \lambda E).$$

Так как $\|PR(\lambda, T)\| \leq \|P\|d_k^{-1}$ (через $\|\cdot\|$, как обычно, обозначается $\sup$ -норма оператора в H) и $d_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, очевидно, что

$$(\lambda \notin \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(T + P)),$$

как только $|\operatorname{Im} \lambda| > d_k \|P\|^{-1}$. (Через $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A .) Более того, операторы $R(\lambda, T)$ и $R(\lambda, T + P)$ одновременно компактны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $2^{-1} < \varepsilon < 1$ справедливо неравенство:*

$$\varphi_N(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{(\lambda_k - \lambda_N - d_N 2^{-1})^2 + \rho^2} \leq \frac{\operatorname{const}}{N^{2\varepsilon-1}(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\varphi_N(\rho)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\varphi_N(\rho) = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \sum_{k=0}^{N-1}, \quad J_2 = \frac{\nu_N}{((d_N 2^{-1})^2 + \rho^2)^p} \quad \text{и} \quad J_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2k+1}{(N^2 + 2N - (k^2 + k))^2 + \rho^2} \\
 &\leq \frac{2}{C(\varepsilon)(9N^2 + 2\rho^2)^{1-\varepsilon}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2k+1}{(N^2 + 2N - (k^2 + k))^{2\varepsilon}} \\
 &\leq \frac{2}{C(\varepsilon)(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}} \left(- \int_{N^2+2N}^{3N} s^{-2\varepsilon} ds \right) \leq \frac{\text{const}}{N^{2\varepsilon-1}(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}}, \\
 J_2 &= \frac{\nu_N}{(d_N 2^{-1})^2 + \rho^2} = \frac{2N+1}{N^2 + \rho^2} \leq \frac{4(N+2^{-1})}{C(\varepsilon)N^{2\varepsilon}(N^2 + 2\rho^2)^{1-\varepsilon}} \\
 &\leq \frac{\text{const}}{N^{2\varepsilon-1}(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}}, \\
 J_3 &= \sum_{k=N+1}^{\infty} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^2 + k - (N^2 + 2N))^2 + \rho^2} \\
 &\leq \frac{2}{C(\varepsilon)((N+2)^2 + 2\rho^2)^{1-\varepsilon}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^2 + k - (N^2 + 2N))^{2\varepsilon}} \\
 &\leq \frac{2}{C(\varepsilon)(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}} \int_{N+2}^{\infty} s^{-2\varepsilon} ds \leq \frac{\text{const}}{N^{2\varepsilon-1}(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались неравенством $a + b \geq C(\varepsilon)a^\varepsilon b^{1-\varepsilon}$, верным при $0 \leq a \leq b$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ($C(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1} - 1)^\varepsilon$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для $k > 2$ верно соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N^{k-1}(P) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (см. [4, с. 339])

$$\alpha_N^{k-1}(P) = \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi i} \text{Sp} \int_{l_N} (R(\lambda, T)P)^k d\lambda$$

и $\|R(\lambda, T)\| \leq \text{const}/(N + |\rho|)$, с учетом неравенства $\|AB\|_2 \leq \|A\| \|B\|_2$ и предложения 2 получаем

$$\begin{aligned}
 \text{Sp} \int_{l_N} (R(\lambda, T)P)^k d\lambda &\leq \text{const} \int_{l_N} \|R(\lambda, T)P\|^{k-2} \varphi_N(\rho) d\rho \\
 &\leq \frac{\text{const}}{N^{2\varepsilon-1}} \int_0^\infty \frac{d\rho}{(N + \rho)^{k-2}(N^2 + \rho^2)^{1-\varepsilon}} \leq \frac{\text{const}}{N^{2\varepsilon-1}}
 \end{aligned}$$

при $k > 1 + \varepsilon$, $2^{-1} < \varepsilon < 1$, что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если K – некоторое вращение сферы S^2 и $Kp(x) = p(Kx) = tp(x)$, $|t| = 1$, $t^2 \neq 1$, то $\alpha_N^0 = \alpha_N^1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основе теории вычетов можно показать, что

$$\alpha_N^1(P) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_k - \lambda_l},$$

где

$$\alpha_{k,l} = \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \sum_{j=0}^{\nu_l-1} (Pv_{k,i}, v_{l,j})(Pv_{l,j}, v_{k,i}).$$

В развернутой форме последнее принимает вид

$$\alpha_{k,l} = \frac{(2k+1)(2l+1)}{4\pi^2} \int_{S^2} \int_{S^2} p(\xi)p(\xi')p_k(\cos \alpha)p_l(\cos \alpha) dS_\xi dS_{\xi'},$$

где $dS_\xi, dS_{\xi'}$ – меры Лебега на S^2 , α – угол между векторами ξ и ξ' , p_k и p_l – полиномы Лежандра порядка k и l соответственно.

Если теперь здесь сделать замену переменных $\xi \rightarrow K\xi$, $\xi' \rightarrow K\xi'$, то, используя инвариантность меры Лебега на S^2 относительно вращений, получим $\alpha_{k,l} = t^2\alpha_{k,l}$. Следовательно, $\alpha_{k,l} = 0$, что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$\sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{\nu_k-1} \mu_{k,i} = \sum_{k=0}^N \nu_k \lambda_k + o(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из установленных выше предложений 3 и 4.

Теперь доказательство теоремы следует из установленных предложений 1, 2, 4 и 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
- [2] Подольский В. Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с гладким потенциалом на сфере S^2 // Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 1. P. 123–130.
- [3] Дубровский В. В. О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 40–44.
- [4] Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.
- [5] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

Магнитогорский государственный педагогический институт

Поступило

31.07.1997

Исправленный вариант

25.02.1999