Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Аккарди, Ф. М. Мухамедов, М. Х. Сабуров, Единственность квантовых марковских цепей на дереве Кэли порядка 2, ассоциированных с XU -моделью, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 168–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:44:49

Единственность квантовых марковских цепей на дереве Кэли порядка 2, ассоциированных с XU -моделью

Л. Аккарди, Ф. М. Мухамедов, М. Х. Сабуров

В настоящей работе мы предлагаем конструкцию квантовой марковской цепи (КМЦ), которая соответствует “вперед идущим” КМЦ. В данной конструкции КМЦ определяется как предел конечномерных состояний, зависящих от граничных условий. Подобное построение широко используется в определении гиббсовских состояний в классической статистической механике. Используя эту конструкцию, мы исследуем КМЦ ассоциированных с XU -моделью на дереве Кэли. Для этой модели в рамках этой конструкции доказывается единственность КМЦ, т.е. состояние не зависит от граничных условий.

Библиография: 26 названий.

1. Введение. Известно, что марковские случайные поля имеют многочисленные приложения в классической теории вероятностей, в статистической физике и т.д. Поэтому, естественно ожидать, что квантовые аналоги таких полей будут играть такую же важную роль, как обычные случайные поля. В [1] было введено понятие квантовой марковской цепи (КМЦ), определенное в алгебре квазилокальных алгебр, состоящих из бесконечных тензорных произведений конечномерных алгебр. В настоящее время КМЦ стали стандартным инструментом в физике твердого тела, квантовой статистической физике и квантовой теории информации [2]–[5].

Первые попытки построения квантовых аналогов классических марковских полей были рассмотрены в работах [4], [6]–[8]. В этих работах было обобщено понятие квантового марковского состояния, рассмотренное в [9]. Заметим, что такие состояния составляют подкласс КМЦ. В работе [10] было предложено определение квантовых марковских состояний и цепей, которые обобщают все известные определения соответствующих состояний и цепей, и, более того, все существующие примеры подпадают под это определение.

Заметим, что обычно система отождествляется с вершиной графа, если граф не изоморфен $\mathbb{Z}$. Важную роль в локализации играет так называемая корневая вершина графа, что позволяет конструировать нетривиальные примеры марковских

полей. В выше упомянутых работах квантовые марковские поля были рассмотрены в основном над целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^d$. В силу существования петель в $\mathbb{Z}^d$ не было известно нетривиальных примеров квантовых марковских полей над этой решеткой. Из [11]–[13] известно, что многочисленные примеры классических марковских полей имеются на деревьях Кэли. И поэтому, чтобы конструировать нетривиальные примеры квантовых марковских полей, естественно рассматривать их над такими деревьями. Следует отметить, что первые исследования КМЦ над деревьями Кэли были рассмотрены в [14]; к таким работам относятся исследования термодинамического предела VBS-моделей на дереве Кэли [15]. В [16] было предложено понятие марковости состояний, определенных на квази-локальной алгебре над иерархическими деревьями. Мы обобщили конструкцию, предложенную в [9], на случай деревьев. Эта конструкция определяет “назад идущий” КМЦ. Заметим, что некоммутативные расширения классических марковских полей, ассоциированных с моделями Изинга и Поттса, были изучены в работах [17]–[19]. В классическом случае марковские случайные поля над деревьями были рассмотрены в [11]–[13], [20], [21].

Настоящая работа является продолжением исследования КМЦ, начатого в [16]. Тем не менее, в данной статье мы предлагаем отличную от [16] конструкцию КМЦ, которая соответствует “вперед идущим” КМЦ. В этой конструкции КМЦ определяется как предел конечномерных состояний, зависящих от граничных условий. Подобное построение широко используется в определении гиббсовских состояний в классической статистической механике. Известно, что для систем с локальными взаимодействиями всегда существует, по крайней мере, одно гиббсовское состояние. Однако данная система может допускать несколько различных гиббсовских мер; в таком случае говорят, что система имеет фазовый переход. Одним из центральных проблем статистической физики является нахождение фазового перехода или единственности гиббсовской меры. Для марковских случайных полей существуют достаточные условия, обеспечивающие единственность гиббсовской меры (см. [22], [23]). Одним из важных результатов в классической и квантовой теорий является то, что для одномерной спиновой системы с конечным радиусом взаимодействия не существует фазового перехода, т.е. существует единственное гиббсовское состояние. Однако существование фазового перехода зависит от размерности решетки. Например, для двумерной непрерывной XY-модели существует фазовый переход. В настоящей работе, используя идеи и методы теории гиббсовских мер, мы исследуем КМЦ, ассоциированную с XY-моделью на дереве Кэли порядка два. С физической точки зрения для такой модели ожидается существование фазового перехода, так как рассматриваемое дерево не одномерно. В данном случае, мы доказываем в рамках этой конструкции единственность КМЦ, т.е. состояние не зависит от граничных условий. Следует отметить, что для рассматриваемой модели на дереве Кэли порядка три существует фазовый переход (см. [26]).

2. Предварительные сведения. Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\Gamma^k = (L, E)$, где L – множество вершин Γ^k , E – его множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует ребро, соединяющее их; это ребро обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Множество пар

$\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ называется *путем*, идущим от точки x к y . Расстояние $d(x, y)$ между x и y определяется как число ребер в кратчайшем пути, соединяющем вершины x и y . Если отрезать одно ребро $\langle x, y \rangle$ из Γ^k , тогда Γ^k распадается на две связные компоненты, называемые *полубесконечными деревьями Кэли*, с корневыми вершинами x и y . Далее в работе будем рассматривать только полубесконечные деревья Кэли $\Gamma_+^k = (L, E)$ с корневой вершиной x^0 .

Ради удобства обозначений в Γ_+^k введем координатную структуру следующим образом: вершине x^0 сопоставим координату (0) ; ближайшим соседям x^0 сопоставим координаты (i) , где i обозначает i -ю вершину (нумерование вершин ведется справа налево). Далее, каждая вершина x дерева Γ_+^k имеет координаты $(i_1, \dots, i_n)$, где $i_m \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq m \leq n$. Итак, символ (0) обозначает уровень 0, и вершины $(i_1, \dots, i_n)$ образуют n -й уровень (т.е. $d(x^0, x) = n$) дерева. Обозначим

$$W_n = \{x \in L : d(x, x_0) = n\}, \quad \Lambda_n = \bigcup_{k=0}^n W_k, \quad \Lambda_{[n,m]} = \bigcup_{k=n}^m W_k, \quad n < m,$$

$$E_n = \{\langle x, y \rangle \in E : x, y \in \Lambda_n\}, \quad \Lambda_n^c = \bigcup_{k=n}^{\infty} W_k.$$

Для $x \in \Gamma_+^k$, $x = (i_1, \dots, i_n)$, положим

$$S(x) = \{(x, i) : 1 \leq i \leq k\},$$

здесь (x, i) означает $(i_1, \dots, i_n, i)$. Такое множество называется *прямыми потомками* x .

Из этих определений легко видеть, что

$$\Lambda_m = \Lambda_{m-2} \cup \left(\bigcup_{x \in W_{m-1}} \{x \cup S(x)\} \right), \quad E_m \setminus E_{m-1} = \bigcup_{x \in W_{m-1}} \bigcup_{y \in S(x)} \{\langle x, y \rangle\}.$$

Для каждой вершины $x \in L$ в качестве алгебры наблюдаемых $\mathcal{B}_x$ рассмотрим алгебру комплексных $(d \times d)$ -матриц M_d . Алгебра наблюдаемых локализованных на конечном объеме $\Lambda \subset L$ определяется как

$$\mathcal{B}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{B}_x.$$

Если $\Lambda^1 \subset \Lambda^2 \subset L$, то, как обычно, $\mathcal{B}_{\Lambda^1}$ отождествляется с подалгеброй $\mathcal{B}_{\Lambda^2}$. Далее, через $\mathcal{B}_{\Lambda,+}$ будем обозначать положительную часть $\mathcal{B}_\Lambda$. Полная алгебра $\mathcal{B}_L$ на дереве Кэли получается переходом индуктивного предела

$$\mathcal{B}_L = \overline{\bigcup_{\Lambda_n} \mathcal{B}_{\Lambda_n}}.$$

Далее, $\mathcal{S}(\mathcal{B}_\Lambda)$ обозначает множество состояний, определенных на $\mathcal{B}_\Lambda$.

Напомним [24], что *квази-условным ожиданием* по отношению к тройке $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ C^* -алгебр с единицами называется вполне положительное, сохраняющее единицу отображение $\mathcal{E} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{E}(ca) = c\mathcal{E}(a), \quad a \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathcal{C}. \quad (2.1)$$

Состояние φ на $\mathcal{B}_L$ называется *f-квантовой d-марковской цепью* (*f-КМЦ*), ассоциированной с $\{\Lambda_n\}$, если для каждого Λ_n , существует квази-условное ожидание $\mathcal{E}_{\Lambda_n^c}$ по отношению к тройке $\mathcal{B}_{\Lambda_{n+1}^c} \subseteq \mathcal{B}_{\Lambda_n^c} \subseteq \mathcal{B}_{\Lambda_{n-1}^c}$ и состояние $\widehat{\varphi}_{\Lambda_n^c} \in \mathcal{S}(\mathcal{B}_{\Lambda_n^c})$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\widehat{\varphi}_{\Lambda_n^c} |_{\mathcal{B}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n}} = \widehat{\varphi}_{\Lambda_{n+1}^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_{n+1}^c} |_{\mathcal{B}_{\Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n}}, \quad (2.2)$$

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_{\Lambda_n^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_{n-1}^c} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{\Lambda_1^c} \quad (2.3)$$

в *-слабой топологии.

Заметим, что в данном определении *f-КМЦ* φ , порожденная $\mathcal{E}_{\Lambda_n^c}$ и $\varphi_{\Lambda_n^c}$, корректно определена. В самом деле, согласно (2.2) имеем

$$\widehat{\varphi}_{\Lambda_n^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} |_{\mathcal{B}_{\Lambda_n}} = \widehat{\varphi}_{\Lambda_{n+1}^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_{n+1}^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} |_{\mathcal{B}_{\Lambda_n}}$$

и для $a \in \mathcal{B}_{\Lambda}$ при $\Lambda \subset \Lambda_k$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_{\Lambda_n^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_{n-1}^c} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{\Lambda_1^c}(a) = \widehat{\varphi}_{\Lambda_k^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_k^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_{k-1}^c} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{\Lambda_1^c}(a).$$

3. Конструкция квантовых марковских цепей на дереве Кэли. Предположим, что каждому ребру $\langle x, y \rangle \in E$ сопоставлен оператор $K_{\langle x, y \rangle} \in \mathcal{B}_{\{x, y\}}$. Далее, мы хотим определить состояние на $\mathcal{B}_{\Lambda_n}$ с граничными условиями $w_0 \in \mathcal{B}_{(0),+}$ и $\mathbf{h} = \{h_x \in \mathcal{B}_{x,+}\}_{x \in L}$. Для этого введем следующие обозначения:

$$K_n = w_0^{1/2} \prod_{\{x, y\} \in E_1} K_{\langle x, y \rangle} \prod_{\{x, y\} \in E_2 \setminus E_1} K_{\langle x, y \rangle} \cdots \prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle} \prod_{x \in W_n} h_x^{1/2}; \quad (3.1)$$

здесь по определению положим

$$\prod_{\{x, y\} \in E_m \setminus E_{m-1}} K_{\langle x, y \rangle} := \prod_{x \in W_{m-1}} (K_{\langle x, (x, 1) \rangle} \cdots K_{\langle x, (x, k) \rangle}). \quad (3.2)$$

Следует отметить, что в этом определении произведение на самом деле берется по отношению порядка, т.е. положение операторов $K_{\langle x, (x, i) \rangle}$ нельзя менять, так как они, вообще говоря, не коммутируют между собой.

Определим

$$\mathcal{U}_n] = K_n K_n^*. \quad (3.3)$$

Ясно, что $\mathcal{U}_n]$ – положительный оператор.

Для любого $\Lambda \subseteq_{\text{fin}} L$ через $\text{Tr}_{\Lambda}: \mathcal{B}_L \rightarrow \mathcal{B}_{\Lambda}$ будем обозначать частичный след. Ради краткости и удобства положим $\text{Tr}_n] := \text{Tr}_{\Lambda_n}$.

Итак, определим положительный функционал $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}$ на $\mathcal{B}_{\Lambda_n}$ соотношением

$$\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}(a) = \text{Tr}(\mathcal{U}_{n+1}](a \otimes \mathbb{I}_{W_{n+1}})) \quad (3.4)$$

для каждого $a \in \mathcal{B}_{\Lambda_n}$. Здесь

$$\mathbb{I}_{W_{n+1}} = \bigotimes_{y \in W_{n+1}} \mathbb{I}.$$

Заметим, что Tr обозначает нормированный след на $\mathcal{B}_L$.

Чтобы определить состояние $\varphi^{(f)}$ на $\mathcal{B}_L$ (т.е. на бесконечном объеме) с данными маргинальными состояниями $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}$, т.е. $\varphi^{(f)} \upharpoonright_{\mathcal{B}_{\Lambda_n}} = \varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}$, мы должны наложить некоторые ограничения на граничные условия $\{w_0, \mathbf{h}\}$, так чтобы функционалы $\{\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}\}$ удовлетворяли условию согласования

$$\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n+1, f)} \upharpoonright_{\mathcal{B}_{\Lambda_n}} = \varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}. \quad (3.5)$$

Известно [9], что $\{\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}\}$ удовлетворяют условию согласования, если последовательность $\{\mathcal{U}_n\}$ является *проективной* по отношению Tr_n , т.е.

$$\text{Tr}_{n-1}(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n-1} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть граничные условия $w_0 \in \mathcal{B}_{(0),+}$ и $\mathbf{h} = \{h_x \in \mathcal{B}_{x,+}\}_{x \in L}$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$\text{Tr}(w_0 h_0) = 1; \quad (3.7)$$

$$\text{Tr}_{\{x\}} \left(\prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, i) \rangle} \prod_{i=1}^k h_{(x, i)} \prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, k+1-i) \rangle}^* \right) = h_x \quad \text{для любого } x \in L. \quad (3.8)$$

Тогда $\{\mathcal{U}_n\}$ является проективной последовательностью. Более того, существует единственное состояние $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(f)}$ на $\mathcal{B}_L$ такое, что

$$\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(f)} = w - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверим равенство (3.6). Из (3.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n &= w_0^{1/2} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_m \setminus E_{m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right) \prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle} \prod_{x \in W_n} h_x \\ &\times \left(\prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)^* \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_{n-m} \setminus E_{n-m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)^* w_0^{1/2}. \end{aligned}$$

Мы знаем, что для различных x и x' , взятых из W_{n-1} , соответствующие алгебры $\mathcal{B}_{x \cup S(x)}$ и $\mathcal{B}_{x' \cup S(x')}$ коммутируют, поэтому из (3.2) находим

$$\begin{aligned} &\prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle} \prod_{x \in W_n} h_x \left(\prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)^* \\ &= \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, i) \rangle} \prod_{i=1}^k h_{(x, i)} \prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, k+1-i) \rangle}^*. \end{aligned}$$

Следовательно, используя (3.8), получим

$$\text{Tr}_{n-1}(\mathcal{U}_n) = w_0^{1/2} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_m \setminus E_{m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \prod_{x \in W_{n-1}} \text{Tr}_x \left(\prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, i) \rangle} \prod_{i=1}^k h_{(x, i)} \prod_{i=1}^k K_{\langle x, (x, k+1-i) \rangle}^* \right) \\
 & \times \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_{n-m} \setminus E_{n-m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)^* w_0^{1/2} \\
 & = w_0^{1/2} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_m \setminus E_{m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right) \prod_{x \in W_{n-1}} h_x \\
 & \times \prod_{m=1}^{n-1} \left(\prod_{\{x, y\} \in E_{n-m} \setminus E_{n-m-1}} K_{\langle x, y \rangle} \right)^* w_0^{1/2} = \mathcal{U}_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, из (3.7) можно получить $\text{Tr}(\mathcal{U}_n) = 1$, которое означает, что каждый функционал $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}$ есть состояние и, следовательно, существует предельное состояние.

Заметим, что если положить $k = 1$ и $h_x = I$ для всех $x \in L$, то получим условные амплитуды, введенные в [9].

ТЕОРЕМА 3.2. *Состояние $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(f)}$ является f -КМП.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради краткости полагая

$$K_{[n-1, n]} = \prod_{\{x, y\} \in E_n \setminus E_{n-1}} K_{\langle x, y \rangle}, \quad \mathbf{h}^{(n)} = \prod_{x \in W_n} h_x, \quad (3.9)$$

определим квази-условное ожидание $\mathcal{E}_{\Lambda_n^c}$ для каждого n следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\Lambda_1^c}(x_{[0]}) = \text{Tr}_{[1]}(K_{[0, 1]}^* w_0^{1/2} x_{[0]} w_0^{1/2} K_{[0, 1]}), \quad x_{[0]} \in \mathcal{B}_{\Lambda_0^c}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{E}_{\Lambda_k^c}(x_{[k-1]}) = \text{Tr}_{[n]}(K_{[k-1, k]}^* x_{[k-1]} K_{[k-1, k]}), \quad x_{[k-1]} \in \mathcal{B}_{\Lambda_{k-1}^c}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1; \quad (3.11)$$

здесь $\text{Tr}_{[n]} := \text{Tr}_{\Lambda_n^c}$. Тогда для любого монома вида

$$a_{\Lambda_1} \otimes a_{W_2} \otimes \dots \otimes a_{W_n}, \quad \text{где } a_{\Lambda_1} \in \mathcal{B}_{\Lambda_1}, \quad a_{W_k} \in \mathcal{B}_{W_k}, \quad k = 2, \dots, n,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 & \varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}(a_{\Lambda_1} \otimes a_{W_2} \otimes \dots \otimes a_{W_n}) \\
 & = \text{Tr}(\mathbf{h}^{(n+1)} K_{[n, n+1]}^* \dots K_{[0, 1]}^* w_0^{1/2} (a_{\Lambda_1} \otimes a_{W_2} \otimes \dots \otimes a_{W_n}) w_0^{1/2} K_{[0, 1]} \dots K_{[n, n+1]}) \\
 & = \text{Tr}_{[1]}(\mathbf{h}^{(n+1)} K_{[n, n+1]}^* \dots K_{[1, 2]}^* \widehat{\mathcal{E}}_{\Lambda_1^c}(a_{\Lambda_1}) a_{W_2} K_{[1, 2]} \dots a_{W_n} K_{[n, n+1]}) \\
 & = \text{Tr}_{[n+1]}(\mathbf{h}^{(n+1)} \mathcal{E}_{\Lambda_{n+1}^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} \circ \dots \circ \mathcal{E}_{\Lambda_2^c} \circ \widehat{\mathcal{E}}_{\Lambda_1^c}(a_{\Lambda_1} \otimes a_{W_2} \otimes \dots \otimes a_{W_n})). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $a \in \Lambda \subset \Lambda_{n+1}$ из (3.4) в силу (3.1), (3.2), (3.10), (3.12) находим

$$\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}(a) = \text{Tr}_{[n+1]}(\mathbf{h}^{(n+1)} \mathcal{E}_{\Lambda_{n+1}^c} \circ \mathcal{E}_{\Lambda_n^c} \circ \dots \circ \mathcal{E}_{\Lambda_2^c} \circ \widehat{\mathcal{E}}_{\Lambda_1^c}(a)). \quad (3.13)$$

Из проективности $\mathcal{U}_n$ вытекает равенство (2.2) для $\varphi_{w_0, \mathbf{h}}^{(n, f)}$, поэтому, из (3.13) получим требуемое утверждение.

Заметим, что в одномерном случае приведенная конструкция была рассмотрена в [25].

4. Квантовые марковские цепи, ассоциированные с ХУ-моделью. В этом пункте мы докажем единственность f -КМЦ, ассоциированной с ХУ-моделью на дереве Кэли. В дальнейшем в этом пункте будем рассматривать полубесконечное дерево Кэли $\Gamma_+^2 = (L, E)$ порядка 2. Рассмотрим C^* -алгебру $\mathcal{B}_L$ с $\mathcal{B}_x = M_2(\mathbb{C})$ для каждого $x \in L$. Через $\sigma_x^{(u)}$, $\sigma_y^{(u)}$, $\sigma_z^{(u)}$, как обычно, обозначаются матрицы Паули, соответствующие вершине $u \in L$, т.е.

$$\sigma_x^{(u)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y^{(u)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z^{(u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Для каждого ребра $\langle u, v \rangle \in E$ положим

$$K_{\langle u, v \rangle} = \exp\{\beta H_{\langle u, v \rangle}\}, \quad \beta > 0, \quad (4.2)$$

где

$$H_{\langle u, v \rangle} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(u)}\sigma_x^{(v)} + \sigma_y^{(u)}\sigma_y^{(v)}). \quad (4.3)$$

В силу равенств

$$H_{\langle u, v \rangle}^{2m} = H_{\langle u, v \rangle}^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \sigma_z^{(u)}\sigma_z^{(v)}), \quad H_{\langle u, v \rangle}^{2m-1} = H_{\langle u, v \rangle}, \quad m \in \mathbb{N},$$

получим

$$K_{\langle u, v \rangle} = \mathbb{I} + \sinh \beta H_{\langle u, v \rangle} + (\cosh \beta - 1)H_{\langle u, v \rangle}^2.$$

Чтобы установить основной результат этого пункта, мы должны описать все решения $\{w_0, \{h_x\}\}$ уравнения (3.7), (3.8). Далее будем предполагать, что $h_x = h_y$ для любого $x, y \in W_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому обозначим $h_x^{(n)} := h_x$, $x \in W_n$. Из (4.2), (4.3) легко видеть, что $K_{\langle u, v \rangle} = K_{\langle u, v \rangle}^*$. Следовательно, уравнение (3.8) записывается следующим образом:

$$\mathrm{Tr}_x(K_{\langle x, y \rangle} K_{\langle x, z \rangle} h_y^{(n+1)} h_z^{(n+1)} K_{\langle x, z \rangle} K_{\langle x, y \rangle}) = h_x^{(n)} \quad \text{для всех } x \in L. \quad (4.4)$$

После некоторых вычислений последнее уравнение (4.4) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} \left(\frac{a_{11}^{(n+1)} + a_{22}^{(n+1)}}{2} \right)^2 \cosh^4 \beta + a_{12}^{(n+1)} a_{21}^{(n+1)} \sinh^2 \beta \cosh \beta = a_{11}^{(n)}, \\ a_{12}^{(n+1)} \frac{a_{11}^{(n+1)} + a_{22}^{(n+1)}}{2} \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = a_{12}^{(n)}, \\ a_{21}^{(n+1)} \frac{a_{11}^{(n+1)} + a_{22}^{(n+1)}}{2} \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = a_{21}^{(n)}, \\ \left(\frac{a_{11}^{(n+1)} + a_{22}^{(n+1)}}{2} \right)^2 \cosh^4 \beta + a_{12}^{(n+1)} a_{21}^{(n+1)} \sinh^2 \beta \cosh \beta = a_{22}^{(n)}; \end{cases} \quad (4.5)$$

здесь

$$h_x^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad h_y^{(n+1)} = h_z^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n+1)} & a_{12}^{(n+1)} \\ a_{21}^{(n+1)} & a_{22}^{(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Из (4.5) непосредственно получим $a_{11}^{(n)} = a_{22}^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Самосопряженность $h_x^{(n)}$, т.е. $\overline{a_{12}^{(n)}} = a_{21}^{(n)}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, позволяет нам редуцировать систему (4.5) к

$$\begin{cases} |a_{11}^{(n+1)}|^2 \cosh^4 \beta + |a_{12}^{(n+1)}|^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = a_{11}^{(n)}, \\ a_{12}^{(n+1)} a_{11}^{(n+1)} \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = a_{12}^{(n)}. \end{cases} \quad (4.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В силу положительности $h_x^{(n)}$ заключаем, что $a_{11}^{(n)} a_{22}^{(n)} \geq |a_{12}^{(n)}|^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теперь исследуем полученную систему (4.6). Для этого определим отображение $f: (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C} \rightarrow (x', y') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\begin{cases} |x'|^2 \cosh^4 \beta + |y'|^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ x' y' \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = y; \end{cases} \quad (4.7)$$

здесь $\beta > 0$.

Легко видеть, что последнее уравнение (4.7) сводится к

$$\begin{cases} |x'|^2 \cosh^4 \beta + |y'|^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ x' |y'| \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = |y|. \end{cases}$$

Поэтому, далее будем рассматривать следующую динамическую систему

$$f: (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \rightarrow (x', y') \in \mathbb{R}_+^2$$

вида

$$\begin{cases} |x'|^2 \cosh^4 \beta + |y'|^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ x' y' \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = y. \end{cases} \quad (4.8)$$

Согласно замечанию 4.1 рассмотрим динамическую систему (4.8) в области

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \geq y, x \neq 0\}.$$

В дальнейшем будем пользоваться следующим вспомогательным фактом.

ЛЕММА 4.2. Если $\beta > 0$, то имеет место

$$0 < \sinh \beta (1 + \cosh \beta) < \cosh^3 \beta.$$

Доказательство получается непосредственной проверкой последнего неравенства.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть f – динамическая система, заданная равенством (4.8). Тогда следующие утверждения справедливы:

- (i) существует единственная неподвижная точка отображения f , принадлежащая области Δ ;

- (ii) динамическая система f не имеет периодических точек с периодом k , $k \geq 2$, в области Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть (x, y) является неподвижной точкой, т.е.

$$\begin{cases} x^2 \cosh^4 \beta + y^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ xy \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = y. \end{cases} \quad (4.9)$$

Рассмотрим два различных случая относительно значений y .

Случай (а). Пусть $y = 0$. Тогда либо $x = 0$, либо $x = 1/\cosh^4 \beta$. Из определения Δ вытекает, что только точка $(1/\cosh^4 \beta, 0)$ принадлежит этой области.

Случай (б). Теперь предположим, что $y \neq 0$. Тогда из (4.9) получим

$$x = \frac{1}{\sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta)},$$

следовательно, имеем

$$y^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = \frac{\sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) - \cosh^4 \beta}{\sinh^2 \beta \cosh^2 \beta (1 + \cosh \beta)^2}. \quad (4.10)$$

Из леммы 4.2 вытекает, что

$$\frac{\sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) - \cosh^4 \beta}{\sinh^2 \beta \cosh^2 \beta (1 + \cosh \beta)^2} < 0,$$

что противоречит положительности (4.10). Итак, в этом случае неподвижная точка не существует.

Таким образом, динамическая система имеет только одну неподвижную точку $(1/\cosh^4 \beta, 0)$.

(ii) Теперь перейдем к периодическим точкам. Предположим, что система имеет периодическую точку $(x^{(0)}, y^{(0)})$ с периодом k , $k \geq 2$, в области Δ . Это означает существование следующих различных точек:

$$(x^{(0)}, y^{(0)}), (x^{(1)}, y^{(1)}), \dots, (x^{(k-1)}, y^{(k-1)}) \in \Delta$$

таких, что

$$\begin{cases} (x^{(i+1)})^2 \cosh^4 \beta + (y^{(i+1)})^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x^{(i)}, \\ x^{(i+1)} y^{(i+1)} \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta) = y^{(i)}, \end{cases} \quad (4.11)$$

где $i = 0, \dots, k-1$, т.е. $f(x^{(i)}, y^{(i)}) = (x^{(i+1)}, y^{(i+1)})$, здесь $x^{(k)} = x^{(0)}$, $y^{(k)} = y^{(0)}$.

Снова рассмотрим два случая.

Случай (а). Пусть $y^{(0)} \neq 0$. Тогда $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ положительны для всех значений $i = 0, \dots, k-1$. Поэтому имеем

$$\frac{x^{(i)}}{y^{(i)}} = \frac{(x^{(i+1)}/y^{(i+1)})^2 \cosh^4 \beta + \sinh^2 \beta \cosh \beta}{x^{(i+1)}/y^{(i+1)} \sinh \beta \cosh \beta (1 + \cosh \beta)}$$

$$= \frac{\cosh^3 \beta}{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)} \cdot \frac{x^{(i+1)}}{y^{(i+1)}} + \frac{\sinh \beta}{1 + \cosh \beta} \cdot \frac{y^{(i+1)}}{x^{(i+1)}},$$

где $i = 0, \dots, k-1$.

В силу $x^{(i)}, y^{(i)} > 0$ для всех $i = 0, \dots, k-1$, получим

$$\frac{x^{(i)}}{y^{(i)}} > \frac{\cosh^3 \beta}{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)} \cdot \frac{x^{(i+1)}}{y^{(i+1)}} \quad (4.12)$$

при всех значениях $i = 0, \dots, k-1$.

Тогда из (4.12) следует

$$\frac{x^{(0)}}{y^{(0)}} > \left(\frac{\cosh^3 \beta}{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)} \right)^k \cdot \frac{x^{(0)}}{y^{(0)}}.$$

Но последнее противоречит утверждению леммы 4.2. Следовательно, динамическая система (4.8) не имеет периодических точек порядка больше 2.

Случай (b). Предположим, что $y^{(0)} = 0$. Из $k \geq 2$ находим $x^{(0)} \neq 1/\cosh^4 \beta$. Поэтому из (4.11) получим $y^{(i)} = 0$ для всех $i = 0, \dots, k-1$. Тогда снова из (4.11) вытекает

$$(x^{(i+1)})^2 \cosh^4 \beta = x^{(i)} \quad \text{для всех } i = 0, \dots, k-1,$$

что означает

$$x^{(i+1)} = \frac{1}{\cosh^2 \beta} \sqrt{x^{(i)}} \quad \text{для всех } i = 0, \dots, k-1.$$

Следовательно, имеем

$$x^{(0)} = \frac{1}{\cosh^4 \beta} \sqrt[2^{k+1}]{x^{(0)} \cosh^4 \beta}.$$

Откуда получаем либо $x^{(0)} = 0$, либо $x^{(0)} = 1/\cosh^4 \beta$, что приводит к противоречию.

Теперь запишем динамическую систему (4.8) в явном виде. Для этого решим систему (4.8) по отношению (x', y') . Из (4.8) получим

$$\begin{cases} (x')^2 \cosh^4 \beta + (y')^2 \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ (x')^2 (y')^2 \sinh^2 \beta \cosh^2 \beta (1 + \cosh \beta)^2 = y^2. \end{cases}$$

Полагая $(x')^2 = u$, $(y')^2 = v$, находим

$$\begin{cases} u \cosh^4 \beta + v \sinh^2 \beta \cosh \beta = x, \\ uv \sinh^2 \beta \cosh^2 \beta (1 + \cosh \beta)^2 = y^2. \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что

$$v = \frac{x - u \cosh^4 \beta}{\sinh^2 \beta \cosh \beta}. \quad (4.13)$$

Пользуясь этим выражением, получим следующее уравнение:

$$\cosh^5 \beta (1 + \cosh \beta)^2 \cdot u^2 - x \cosh \beta (1 + \cosh \beta)^2 \cdot u + y^2 = 0.$$

Решая это уравнение по отношению к u , находим

$$u_{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y^2 \cosh^3 \beta / (1 + \cosh \beta)^2}}{2 \cosh^4 \beta}.$$

Из (4.13) имеем

$$v_{\pm} = \frac{x \mp \sqrt{x^2 - 4y^2 \cosh^3 \beta / (1 + \cosh \beta)^2}}{2 \sinh^2 \beta \cosh \beta}.$$

Так как точка (x', y') принадлежит области Δ , то u должно быть больше, чем v . Итак, отображение $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ (см. (4.8)) в явном виде задается следующей системой:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4y^2 \cosh^3 \beta / (1 + \cosh \beta)^2}}{2 \cosh^4 \beta}}, \\ y' = \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4y^2 \cosh^3 \beta / (1 + \cosh \beta)^2}}{2 \sinh^2 \beta \cosh \beta}}. \end{cases} \quad (4.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из (4.14) непосредственно следует, что отображение f корректно определено тогда и только тогда, когда x и y удовлетворяют

$$x \geq 2y \sqrt{\frac{\cosh^3 \beta}{(1 + \cosh \beta)^2}}, \quad (4.15)$$

т.е. f отображает Δ в себя.

ЛЕММА 4.5. Пусть $f: \Delta \rightarrow \Delta$ – динамическая система, заданная через (4.14). Если x, y положительны и удовлетворяют (4.15), то x', y' также положительны и удовлетворяют следующему неравенству:

$$\frac{x'}{y'} < \frac{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)}{\cosh^3 \beta} \cdot \frac{x}{y}. \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы и из (4.14) непосредственно находим положительность x' и y' . Далее, из (4.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{x'}{y'} &= \frac{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)}{\cosh^3 \beta} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y^2 \cosh^3 \beta / (1 + \cosh \beta)^2}}{2y} \\ &< \frac{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)}{\cosh^3 \beta} \cdot \frac{x}{y}, \end{aligned}$$

которое и есть требуемое неравенство.

Теперь изучим асимптотическое поведение траекторий данной динамической системы.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $f: \Delta \rightarrow \Delta$ – динамическая система, заданная через (4.14). Тогда следующие утверждения справедливы:

- (i) если $y^{(0)} > 0$, то траектория $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ конечна, т.е. существует такое число $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N_0$ точки $(x^{(n)}, y^{(n)})$ не принадлежат $\kappa \Delta$;
- (ii) если $y^{(0)} = 0$, то траектория $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x^{(n)} = \frac{2^n \sqrt{x^{(0)} \cosh^4 \beta}}{\cosh^4 \beta}, \\ y^{(n)} = 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть выполнено $y^{(0)} > 0$. Предположим, что траектория $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ бесконечна. Это означает, что точки $(x^{(n)}, y^{(n)})$ корректно определены для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу замечания 4.4 и леммы 4.5 находим

$$\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}} < \left(\frac{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)}{\cosh^3 \beta} \right)^n \cdot \frac{x^{(0)}}{y^{(0)}} \quad (4.17)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

С другой стороны, согласно замечанию 4.4 $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}} \geq 2 \sqrt{\frac{\cosh^3 \beta}{(1 + \cosh \beta)^2}} \quad (4.18)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 4.2 получим

$$\left(\frac{\sinh \beta (1 + \cosh \beta)}{\cosh^3 \beta} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

которое с неравенством (4.17) означает невыполнение (4.18) для некоторого числа $N_0 \in \mathbb{N}$, что ведет к противоречию.

(ii) Пусть $y^{(0)} = 0$, тогда из (4.14) вытекает $y^{(n)} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (4.14) находим

$$x^{(n)} = \sqrt{\frac{x^{(n-1)}}{\cosh^4 \beta}}.$$

Итак, итерируя последнее равенство, получим

$$x^{(n)} \cosh^4 \beta = \sqrt[2^n]{x^{(0)} \cosh^4 \beta}.$$

Из теоремы 4.6 вытекает, что уравнение (4.4) имеет параметрическое решение $(w_0(\alpha), \{h_x(\alpha)\})$, заданное формулой

$$w_0(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad h_x^{(n)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2^n \sqrt{\alpha \cosh^4 \beta}}{\cosh^4 \beta} & 0 \\ 0 & \frac{2^n \sqrt{\alpha \cosh^4 \beta}}{\cosh^4 \beta} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

для всех $x \in L$, где $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Заметим, что граничные условия, соответствующие неподвижной точке системы (4.8), соответствуют значению $\alpha_0 = 1/\cosh^4 \beta$ в (4.19). Поэтому, соответственно, в дальнейшем эти операторы будем обозначать через $w_0(\alpha_0)$ и $h_x^{(n)}(\alpha_0)$.

Рассмотрим состояния $\varphi_{w_0(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)}^{(n,f)}$, соответствующие решениям $(w_0(\alpha), \{h_x^{(n)}(\alpha)\})$. Из определения этого состояния находим

$$\begin{aligned}
 & \varphi_{w_0(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)}^{(n,f)}(x) \\
 &= \text{Tr} \left(w_0^{1/2}(\alpha) \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \prod_{\{x,y\} \in E_2 \setminus E_1} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \right. \\
 & \quad \times \prod_{x \in W_{n+1}} h_x^{(n+1)}(\alpha) \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} w_0^{1/2}(\alpha) \Big) \\
 &= \frac{(\alpha^{2^{n+1}} \cosh^4 \beta)^{2^{n+1}}}{\alpha (\cosh^4 \beta)^{2^{n+1}}} \\
 & \quad \times \text{Tr} \left(\prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \prod_{\{x,y\} \in E_2 \setminus E_1} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \right. \\
 & \quad \times \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \Big) \\
 &= \frac{\alpha_0^{2^{n+1}}}{\alpha_0} \text{Tr} \left(\prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \prod_{\{x,y\} \in E_2 \setminus E_1} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \right. \\
 & \quad \times \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \Big) \\
 &= \text{Tr} \left(w_0^{1/2}(\alpha_0) \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} \prod_{\{x,y\} \in E_2 \setminus E_1} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \right. \\
 & \quad \times \prod_{x \in W_{n+1}} h_x^{(n+1)}(\alpha_0) \prod_{\{x,y\} \in E_{n+1} \setminus E_n} K_{\langle x,y \rangle} \cdots \prod_{\{x,y\} \in E_1} K_{\langle x,y \rangle} w_0^{1/2}(\alpha_0) \Big) \\
 &= \varphi_{w_0(\alpha_0), \mathbf{h}(\alpha_0)}^{(n,f)}(x),
 \end{aligned}$$

для любого α . Это означает, что

$$\varphi_{w_0(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)}^{(n,f)} = \varphi_{w_0(\alpha_0), \mathbf{h}(\alpha_0)}^{(n,f)}$$

для любого α .

Из определения f -КМЦ вытекает

$$\varphi_{w_0(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)}^{(f)} = \varphi_{w_0(\alpha_0), \mathbf{h}(\alpha_0)}^{(f)}.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.7. *Существует единственная f -КМЦ, ассоциированная с моделью (4.2).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Аккарди, “О некоммутативном марковском свойстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 1–8.
- [2] L. Accardi, F. Fidaleo, “Entangled Markov chains”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **184**:3 (2005), 327–346.
- [3] L. Accardi, F. Fidaleo, “Non-homogeneous quantum Markov states and quantum Markov fields”, *J. Funct. Anal.*, **200**:2 (2003), 324–347.
- [4] L. Accardi, F. Fidaleo, “Markov property – recent developments on the quantum Markov property”, *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis* (Burg, 2001), QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **15**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 1–19.
- [5] M. Ohya, D. Petz, *Quantum Entropy and its Use*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [6] L. Accardi, F. Fidaleo, “Quantum Markov fields”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **6**:1 (2003), 123–138.
- [7] L. Accardi, V. Liebscher, “Markovian KMS-states for one-dimensional spin chains”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **2**:4 (1999), 645–661.
- [8] V. Liebscher, “Markovianity of quantum random fields in the $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ case”, *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis* (Burg, 2001), QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **15**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 151–159.
- [9] L. Accardi, A. Frigerio, “Markovian cocycles”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **83**:2 (1983), 251–263.
- [10] L. Accardi, F. Fidaleo, F. Mukhamedov, “Markov states and chains on the CAR algebra”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **10**:2 (2007), 165–183.
- [11] C. J. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Tracts in Math., **68**, Cambridge Univ. Press, London, 1974.
- [12] A. Spätaru, “Construction of a Markov field on an infinite tree”, *Adv. Math.*, **81**:1 (1990), 105–116.
- [13] F. Spitzer, “Markov random fields on an infinite tree”, *Ann. Probab.*, **3**:3 (1975), 387–398.
- [14] L. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, H. Tasaki, “Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets”, *Comm. Math. Phys.*, **115**:3 (1988), 477–528.
- [15] M. Fannes, B. Nachtergaele, R. F. Werner, “Ground states of VBS models on Cayley trees”, *J. Stat. Phys.*, **66**:3-4 (1992), 939–973.
- [16] L. Accardi, H. Ohno, F. Mukhamedov, “Quantum Markov fields on graphs”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **13**:2 (2010), 165–189.
- [17] Ф. М. Мухамедов, “Об алгебрах фон Неймана, соответствующих трансляционно-инвариантным гиббсовским состояниям модели Изинга на решетке Бете”, *ТМФ*, **123**:1 (2000), 88–93.
- [18] F. M. Mukhamedov, “On a factor associated with the unordered phase of λ -model on a Cayley tree”, *Rep. Math. Phys.*, **53**:1 (2004), 1–18.
- [19] F. Mukhamedov, U. Rozikov, “On Gibbs measures of models with competing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras”, *J. Stat. Phys.*, **114**:3-4 (2004), 825–848; “On Gibbs measures of models with competing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras II”, *J. Stat. Phys.*, **119**:1-2 (2005), 427–446.
- [20] S. Zachary, “Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees”, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [21] S. Zachary, “Bounded, attractive and repulsive Markov specifications on trees and on the one-dimensional lattice”, *Stochastic Process. Appl.*, **20**:2 (1985), 247–256.
- [22] Р. Л. Добрушин, “Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности”, *ТВП*, **13**:2 (1968), 201–229.
- [23] H.-O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter Stud. Math., **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.

- [24] L. Accardi, C. Cecchini, “Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki”, *J. Funct. Anal.*, **45**:2 (1982), 245–273.
- [25] L. Accardi, “Cecchini’s transition expectations and Markov chains”, *Quantum Probability and Applications, IV* (Rome, 1987), Lecture Notes in Math., **1396**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 1–6.
- [26] F. Mukhamedov, M. Saburov, “Phase transitions for XY -model on the Cayley tree of order three in quantum Markov chain scheme”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **349**:7-8 (2011), 425–428.

Л. Аккарди

Università degli Studi di Roma – Tor Vergata

E-mail: accardi@volterra.uniroma2.it

Поступило

01.09.2010

Исправленный вариант

17.02.2011

Ф. М. Мухамедов

International Islamic University Malaysia

E-mail: far75m@yandex.ru

М. Х. Сабуров

International Islamic University Malaysia

E-mail: msaburov@gmail.com