Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Вл. Булинская, Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 845–859

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:40:33

Предельные распределения численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании

Е. Вл. Булинская

Исследуется ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем. Частицы, блуждающие по $\mathbb{Z}^2$, могут размножаться и гибнуть только в начале координат. Предполагается, что закон воспроизводства потомков в источнике ветвления критический, а случайное блуждание вне источника однородно и симметрично. При наличии частиц в начале координат доказывается условная предельная теорема о совместном распределении должным образом нормированных численностей частиц в источнике и вне его, когда время неограниченно растёт. Как следствие, устанавливается асимптотическая независимость упомянутых случайных величин.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Критическим каталитическим ветвящимся случайным блужданием (КВСБ) по $\mathbb{Z}^2$ будем называть следующую модель. Пусть в момент времени $t = 0$ на решетке $\mathbb{Z}^2$ находится одна частица, расположенная в начале координат. Там она проводит время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром 1. Затем частица либо с вероятностью α , $0 < \alpha < 1$, может погибнуть, производя перед гибелью случайное число потомков ξ , либо с вероятностью $1 - \alpha$ совершить скачок в точку $y \neq 0$, $y \in \mathbb{Z}^2$.

Ветвление частицы в нуле определяется вероятностной производящей функцией $f(s) := \mathbb{E}s^\xi$, $s \in [0, 1]$. При этом закон воспроизводства критический и с конечной дисперсией, т.е.

$$\mathbb{E}\xi = f'(1) = 1, \quad \frac{\sigma^2}{\alpha} := D\xi = f''(1) < \infty. \quad (1.1)$$

Находясь вне нуля, частица совершает случайное блуждание по $\mathbb{Z}^2$ в соответствии с матрицей интенсивностей переходов $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^2}$ до момента первого возвращения в источник ветвления. Генератор A порождает симметричное, однородное и неразложимое (т.е. из каждой точки $x \in \mathbb{Z}^2$ за конечное время с вероятностью единица можно попасть в любую точку $y \in \mathbb{Z}^2$) случайное блуждание с конечной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00266а).

дисперсией скачков. Это означает, что

$$a(x, y) = a(y, x), \quad a(x, y) = a(0, y - x) =: a(y - x), \quad x, y \in \mathbb{Z}^2, \\ \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} a(y) = 0, \quad a(y) \geq 0, \quad y \neq 0, \quad \text{и} \quad a(0) < 0, \quad \sum_{y \in \mathbb{Z}^2} \|y\|^2 a(y) < \infty. \quad (1.2)$$

В нуле же интенсивность перехода частицы в точку $y \neq 0$ имеет вид

$$- (1 - \alpha) \frac{a(y)}{a(0)}. \quad (1.3)$$

При возвращении в начало координат частица проводит здесь время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром 1. Затем она либо делится с вероятностью α на случайное число потомков (в соответствии с производящей функцией f), либо с вероятностью $1 - \alpha$ продолжает блуждание по $\mathbb{Z}^2$ с интенсивностями (1.2) и (1.3).

Новые частицы появляются в нуле и с момента рождения эволюционируют по описанной выше схеме независимо друг от друга и от остальных частиц.

Пусть $\eta(t)$ – общее число частиц на решетке, $\zeta(t)$ и $\mu(t)$ – соответственно численности частиц в начале координат и вне его в момент времени $t \geq 0$. Цель данной работы состоит в нахождении предельного распределения подходящим образом нормированного двумерного вектора $(\zeta(t), \mu(t))$ при условии $\zeta(t) > 0$, когда $t \rightarrow \infty$.

Напомним ряд необходимых результатов из статей [1] и [2], также посвященных изучению критического КВСБ по $\mathbb{Z}^2$.

Положим $c_m := \gamma_2 a(0)/(\alpha - 1)$, здесь γ_2 – положительная постоянная, явный вид которой можно найти, например, в [3; с. 31].

ТЕОРЕМА 1 (см. [1], [2]). *Если выполнены условия (1.1)–(1.3), то*

$$P(\eta(t) > 0) \sim \sqrt{\frac{2}{c_m \sigma^2 \ln t}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при всех $s_1, s_2 \in [0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(s_1^{\zeta(t)} s_2^{\mu(t)} | \eta(t) > 0) = 1 - \sqrt{1 - s_2}.$$

При $s \in [0, 1]$ и $t \geq 0$ обозначим

$$q(t; s) := 1 - E s^{\zeta(t)}, \quad H(s) := \alpha \int_0^\infty (f(1 - q(t; s)) - 1 + q(t; s)) dt.$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [2]). *Пусть выполнены условия (1.1)–(1.3). Тогда $H(0) < 1$ и*

$$P(\zeta(t) > 0) \sim \frac{c_m(1 - H(0))}{t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

а также $H(s) < 1 - s$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(s^{\zeta(t)} | \zeta(t) > 0) = \frac{s - (H(0) - H(s))}{1 - H(0)}.$$

Теперь сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнены условия (1.1)–(1.3), то для всех $s \in [0, 1]$ и $\lambda \geq 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[s^{\zeta(t)} \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu(t)}{2c_m \sigma^2 \ln t} \right\} \middle| \zeta(t) > 0 \right] = \frac{s - (H(0) - H(s))}{1 - H(0)} \frac{4}{\sqrt{1 + \lambda} (1 + \sqrt{1 + \lambda})^2}.$$

Ключевая идея доказательства теоремы состоит в рассмотрении КВСБ как ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Благодаря этому удается вывести интегральное уравнение для функции

$$Q(t; s_1, s_2) := 1 - \mathbb{E} s_1^{\zeta(t)} s_2^{\mu(t)}, \quad \text{где } s_1, s_2 \in [0, 1], \quad t \geq 0.$$

Анализ полученного уравнения в случае, когда вместо переменной s_2 фигурирует функция

$$\exp \left\{ -\frac{\lambda}{2c_m \sigma^2 \ln t} \right\}, \quad \lambda \geq 0, \quad t \geq 1,$$

занимает основную часть доказательства. При этом преодолеваются трудности, связанные с отсутствием дополнительных условий, налагаемых на $f''(s)$ при $s \rightarrow 1$ (ср. с [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичный результат такими же методами может быть доказан для модели критического *симметричного ветвящегося случайного блуждания* (СВСБ) по $\mathbb{Z}^2$. Различные свойства СВСБ по $\mathbb{Z}^d$, где $d \in \mathbb{N}$, изучались в [3], [5]–[7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интересно сравнить нормировочные функции для компонент вектора $(\zeta(t), \mu(t))$, использованные в теореме 3, с нормировочными функциями для компонент аналогичного вектора в модели КВСБ по $\mathbb{Z}$, которая впервые рассматривалась в статье [8], а затем анализировалась в работах [4] и [9]. В результате была установлена теорема (см. [4]), утверждающая, что $(\zeta(t)/\mathbb{E}(\zeta(t) | \zeta(t) > 0), \mu(t)/\sqrt{t})$ имеет нетривиальный предел в смысле слабой сходимости при условии $\zeta(t) > 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Заметим, что в силу [2] и [4] при $t \rightarrow \infty$ функция $\mathbb{E}(\zeta(t) | \zeta(t) > 0)$ эквивалентна $b_1 \ln t$ и b_2 соответственно для КВСБ по $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$. Там же показано, что асимптотика хвоста функции распределения $G_2(t)$ времени τ_2 , проведенного частицей вне нуля до момента возвращения в него, есть $B_1/\sqrt{t}$ в одномерном случае и $B_2/\ln t$ – в двумерном. Здесь b_1, b_2, B_1 и B_2 – известные положительные постоянные. Таким образом, с точностью до постоянного множителя в качестве нормирующей функции для $\zeta(t)$ в моделях КВСБ по $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ выступает условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\zeta(t) | \zeta(t) > 0)$. Для случайной величины $\mu(t)$ аналогичную роль играет функция $1 - G_2(t)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает асимптотическая независимость нормированных соответствующим образом случайных величин $\zeta(t)$ и $\mu(t)$ при условии $\zeta(t) > 0$, когда $t \rightarrow \infty$. Такой же эффект наблюдался ранее и для КВСБ по $\mathbb{Z}$ [4; теорема 3].

2. КВСБ и процессы Беллмана–Харриса. Для доказательства теоремы 3 мы будем использовать подход, развитый в [4], [8] и [9]. А именно, рассмотрим КВСБ как ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Частица первого типа имеет функцию распределения времени жизни

$$G_1(t) := \mathbb{P}(\tau_1 \leq t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0;$$

в момент гибели она дает потомков двух типов в соответствии с вероятностной производящей функцией

$$f_1(s_1, s_2) := \alpha f(s_1) + (1 - \alpha)s_2.$$

Функция распределения времени жизни частицы второго типа есть

$$G_2(t) = P(\tau_2 \leq t);$$

перед гибелью частица дает потомков в соответствии с вероятностной производящей функцией

$$f_2(s_1, s_2) := s_1.$$

Здесь $s_1, s_2 \in [0, 1]$.

Обозначим $Z_i(t)$ число частиц i -го типа, $i = 1, 2$, в момент времени t . Ясно, что

$$\text{Law}(Z_1(t), Z_2(t)) = \text{Law}(\zeta(t), \mu(t)).$$

Пусть

$$F_i(t; s_1, s_2) = \mathbb{E} s_1^{Z_1(t)} s_2^{Z_2(t)}, \quad i = 1, 2, \quad s_1, s_2 \in [0, 1],$$

– производящая функция числа частиц обоих типов в момент времени $t \geq 0$ в предположении, что процесс начался в момент $t = 0$ с одной частицы i -го типа. Имеют место следующие интегральные уравнения [10; гл. VIII, § 1, теорема 1]:

$$\begin{aligned} F_1(t; s_1, s_2) &= s_1(1 - G_1(t)) \\ &\quad + \int_0^t (\alpha f(F_1(t-u; s_1, s_2)) + (1 - \alpha)F_2(t-u; s_1, s_2)) dG_1(u), \\ F_2(t; s_1, s_2) &= s_2(1 - G_2(t)) + \int_0^t F_1(t-u; s_1, s_2) dG_2(u). \end{aligned}$$

Следуя [4], подставим выражение для функции $F_2(t; s_1, s_2)$ из второго уравнения в первое, а затем решим полученное уравнение восстановления относительно функции $Q(t; s_1, s_2) = 1 - F_1(t; s_1, s_2)$. С учетом результатов [2] приходим к основному интегральному уравнению

$$Q(t; s_1, s_2) = (1 - s_1)m(t) + (1 - s_2)(1 - m(t)) - \int_0^t h(Q(t-u; s_1, s_2))m(u) du, \quad (2.1)$$

где $m(t) := \mathbb{E}\zeta(t)$ и $h(x) := \alpha(f(1-x) - 1 + x)$, $x \in [0, 1]$.

Напомним важные свойства первого момента случайной величины $\zeta(t)$.

ЛЕММА 1 (см. [2], [11]). Если выполнены условия (1.1)–(1.3), то функция $m(t)$ монотонно убывает на $[0, \infty)$, причем

$$m(t) \sim \frac{c_m}{t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим теперь первый момент случайной величины $\eta(t)$, т.е. $M(t) := \mathbb{E}\eta(t)$. Из (1.1), (2.1) и равенства $M(t) \equiv -Q'_s(t; s, s)|_{s=1}$ следует, что

$$M(t) \equiv 1. \quad (2.2)$$

Дополним изложение еще одним полезным фактом из [2]: для каждого $s \in [0, 1]$

$$q(t; s) \sim \frac{c_m(1 - s - H(s))}{t} =: \frac{C_q(s)}{t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

3. Доказательство теоремы 3. Очевидно, $q(t; s) = Q(t; s, 1)$. Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 2 (см. [4]). Для всех $t \geq 0$ и $s_1, s_2 \in [0, 1]$ верны оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1) \leq 1 - s_2, \\ 0 &\leq (Q(t; s_1, s_2) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - q(t; 0)) \\ &= (q(t; 0) - q(t; s_1)) - (Q(t; 0, s_2) - Q(t; s_1, s_2)). \end{aligned}$$

Положим при $t > 0$, $u \geq 0$ и $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} s_2(t; \lambda) &:= \exp\left\{-\frac{\lambda}{2c_m\sigma^2 \max\{1, \ln t\}}\right\}, \\ \Delta_1(u, t; \lambda) &:= Q(u, 0, s_2(t; \lambda)) - q(u; 0), & \Delta_1(t; \lambda) &:= \Delta_1(t, t; \lambda), \\ \Delta_2(u, t; s_1, \lambda) &:= Q(u, s_1, s_2(t; \lambda)) - q(u; s_1), & \Delta_2(t; s_1, \lambda) &:= \Delta_2(t, t; s_1, \lambda), \\ \Delta(u, t; s_1, \lambda) &:= \Delta_2(u, t; s_1, \lambda) - \Delta_1(u, t; \lambda), & \Delta(t; s_1, \lambda) &:= \Delta(t, t; s_1, \lambda), \\ \Psi(u, t; s_1, \lambda) &:= \frac{\Delta(u, t; s_1, \lambda)}{q(u; 0)}, & \Psi(t; s_1, \lambda) &:= \Psi(t, t; s_1, \lambda). \end{aligned}$$

Из леммы 2 следует неотрицательность введенных величин.

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(s_1^{\zeta(t)} \exp\left\{-\frac{\lambda\mu(t)}{2c_m\sigma^2 \ln t}\right\} \middle| \zeta(t) > 0\right) &= \frac{F_1(t; s_1, s_2(t; \lambda)) - F_1(t; 0, s_2(t; \lambda))}{\mathbb{P}(\zeta(t) > 0)} \\ &= \frac{Q(t; 0, s_2(t; \lambda)) - Q(t; s_1, s_2(t; \lambda))}{q(t; 0)} = \frac{q(t; 0) - q(t; s_1)}{q(t; 0)} - \Psi(t; s_1, \lambda). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как предельное поведение первого слагаемого в последнем выражении установлено в теореме 2, для доказательства теоремы 3 достаточно найти $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t; s_1, \lambda)$.

Условимся о некоторых упрощениях в записи формул. В дальнейшем $\mathcal{K}$ будет обозначать произвольный отрезок вида $[0, b]$, где $0 < b < \infty$, а $\mathcal{K}_\varepsilon$ – любой отделенный от нуля отрезок $[\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b < \infty$. Кроме того, пусть $\mathcal{L}$ – множество функций $\rho = \rho(t; s_1, \lambda)$, $\rho_1 = \rho_1(t; s_1, \lambda), \dots$ (с нижним индексом или без него), ограниченных при всех $t > 0$, $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathcal{K}$. Определим также $\mathcal{U}$ как множество всех ограниченных функций $\gamma = \gamma(t; s_1, \lambda)$, $\gamma_1 = \gamma_1(t; s_1, \lambda), \dots$, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathcal{K}$. Аналогично зададим множество $\mathcal{U}_\varepsilon$ всех ограниченных функций $\gamma^\varepsilon = \gamma^\varepsilon(t; s_1, \lambda)$, $\gamma_1^\varepsilon = \gamma_1^\varepsilon(t; s_1, \lambda), \dots$, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Функции с совпадающими индексами могут быть неодинаковыми в различных формулах. Положим $Q(t; s) := Q(t; s, s)$.

ЛЕММА 3. При $t > 0$, $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \geq 0$ и некоторой функции $\rho \in \mathcal{L}$ имеем

$$\Delta_2(t; s_1, \lambda) = Q(t; s_2(t; \lambda)) + \frac{\rho(t; s_1, \lambda)}{t}, \quad \Delta_1(t; \lambda) = Q(t; s_2(t; \lambda)) + \frac{\rho(t; 0, \lambda)}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $0 \leq s_{10} \leq s_{11} \leq 1$ верны соотношения

$$Q(t; s_{10}, s_2) - Q(t; s_{11}, s_2) = \mathbb{E}[(s_{11}^{\zeta(t)} - s_{10}^{\zeta(t)})s_2^{\mu(t)}] \leq \mathbb{E}[s_{11}^{\zeta(t)} - s_{10}^{\zeta(t)}] \leq q(t; 0). \quad (3.2)$$

Из (3.2) и определения функции $\Delta_2(t; s_1, \lambda)$ следует, что

$$|\Delta_2(t; s_1, \lambda) - Q(t; s_2(t; \lambda))| \leq |Q(t; s_1, s_2(t; \lambda)) - Q(t; s_2(t; \lambda))| + q(t; s_1) \leq 2q(t; 0).$$

Последнее неравенство и соотношение (2.3) влекут первое утверждение леммы. Второе утверждение – следствие первого при $s_1 = 0$.

Таким образом, чтобы найти первый член асимптотики $\Delta_1(t; \lambda)$ и $\Delta_2(t; s_1, \lambda)$, необходимо изучить предельное поведение функции $Q(t; s_2(t; \lambda))$ при $t \rightarrow \infty$.

В силу (2.1) функция $Q(t; s)$ удовлетворяет уравнению

$$Q(t; s) = 1 - s - \int_0^t h(Q(t-u; s))m(u) du. \quad (3.3)$$

С помощью (2.2) и неравенства $1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$, имеем при $t > 0$, $u \geq 0$, $\lambda \geq 0$

$$Q(u; s_2(t; \lambda)) = E\left(1 - \exp\left\{-\frac{\lambda\eta(u)}{2c_m\sigma^2 \max\{1, \ln t\}}\right\}\right) \leq \frac{\lambda}{2c_m\sigma^2 \max\{1, \ln t\}}. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что равномерно по u и λ из любых отрезков, принадлежащих $\mathbb{R}_+$,

$$Q(u; s_2(t; \lambda)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Изучим асимптотическое поведение интегралов $J_1(t; \lambda)$, $J_2(t; \lambda)$ и $J_3(t; \lambda)$, берущихся от функции $h(Q(t-u; s_2(t; \lambda)))m(u)/(1-s_2(t; \lambda))$ по переменной u соответственно из множеств $[0, \varepsilon_1(t))$, $[\varepsilon_1(t), t - \varepsilon_2(t))$ и $[t - \varepsilon_2(t), t]$, где для $t > 0$

$$\varepsilon_1(t) := \sqrt{\max\{0, \ln t\}}, \quad \varepsilon_2(t) := t(1 - \exp\{-\varepsilon_1(t)\}).$$

ЛЕММА 4. При условиях (1.1)–(1.3) имеем $J_1(t; \lambda) = \gamma_1(t; \lambda)$, $J_3(t; \lambda) = \gamma_3(t; \lambda)$ и

$$J_2(t; \lambda) = \frac{\lambda}{4} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t-t^x, t; \lambda) dx + \gamma_2(t; \lambda),$$

где $\varphi(u, t; \lambda) := Q(u; s_2(t; \lambda))/(1-s_2(t; \lambda))$ и $\gamma_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (3.4), легко проверяемых неравенств $m(t) \leq 1$ и $h(x) \leq \sigma^2 x^2$, верных соответственно при $t \geq 0$ и всех $x \in [0, 1]$, а также очевидного соотношения $1 - e^{-x} \sim x$, $x \rightarrow 0+$, мы видим, что при больших значениях t

$$J_1(t; \lambda) = \int_0^{\varepsilon_1(t)} \frac{h(Q(t-u; s_2(t; \lambda)))m(u)}{1-s_2(t; \lambda)} du \leq \frac{\lambda^2 \varepsilon_1(t)}{4(1-s_2(t; \lambda))c_m^2 \sigma^2 \ln^2 t} = \gamma_1(t; \lambda).$$

Кроме того, используя лемму 1, получаем

$$J_3(t; \lambda) \leq \frac{\lambda^2}{4(1-s_2(t; \lambda))c_m^2 \sigma^2 \ln^2 t} \int_{t-\varepsilon_2(t)}^t m(u) du = \frac{\rho(t; \lambda)}{\ln t} \int_{t-\varepsilon_2(t)}^t \frac{du}{u} = \gamma_3(t; \lambda).$$

Те же соотношения, а также (3.5) и формула $h(x) \sim \sigma^2 x^2/2$, верная при $x \rightarrow 0+$, позволяют записать

$$\begin{aligned} J_2(t; \lambda) &= \frac{\sigma^2 c_m}{2} \int_{\varepsilon_1(t)}^{t-\varepsilon_2(t)} \frac{Q^2(t-u; s_2(t; \lambda))}{(1-s_2(t; \lambda))^2} (1-s_2(t; \lambda)) \frac{du}{u} (1 + \gamma_4(t; \lambda)) \\ &= \frac{\lambda}{4} \int_{\varepsilon_1(t)}^{t-\varepsilon_2(t)} \varphi^2(t-u, t; \lambda) \frac{d(\ln u)}{\ln t} (1 + \gamma_5(t; \lambda)). \end{aligned}$$

После замены переменных $u = t^x$ под знаком интеграла последнее соотношение переписывается следующим образом:

$$J_2(t; \lambda) = \frac{\lambda}{4} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t - t^x, t; \lambda) dx (1 + \gamma_5(t; \lambda)).$$

Поскольку в силу (3.3) верно неравенство $Q(t; s) \leq 1 - s$ для $t \geq 0$ и $s \in [0, 1]$, то $0 \leq \varphi(u, t; \lambda) \leq 1$ при $u \geq 0$, $t > 0$, $\lambda \geq 0$ (считаем, что $\varphi(u, t; 0) = 1$, $u \geq 0$, $t > 0$). Таким образом, доказательство леммы 4 завершено.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие (1.1). Тогда справедливо равенство

$$\varphi(t - t^x, t; \lambda) = \varphi(t - t^x, t - t^x; \lambda) + r(t; x, \lambda),$$

где $r(t; x, \lambda) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\ln \ln t / (2 \ln t), 1 - 1/\sqrt{\ln t}]$ и $\lambda \in \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.4) и определения функции φ следует, что найдется положительная функция $\gamma_1 \in \mathcal{U}$ такая, что при $x \in [\ln \ln t / (2 \ln t), 1 - 1/\sqrt{\ln t}]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(t - t^x, t; \lambda) - \frac{Q(t - t^x; s_2(t; \lambda))}{1 - s_2(t - t^x; \lambda)} \\ &\leq \frac{\lambda}{2c_m \sigma^2 \ln t} \left(\frac{1}{1 - s_2(t; \lambda)} - \frac{1}{1 - s_2(\varepsilon_2(t); \lambda)} \right) = \gamma_1(t; \lambda). \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу определения функций $s_2(t; \lambda)$, $Q(t; s)$ и $\varphi(u, t; \lambda)$, а также (2.2) и неравенства $1 - e^{-x} \leq x$ при $x \geq 0$, для всех $x \in [\ln \ln t / (2 \ln t), 1 - 1/\sqrt{\ln t}]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(t - t^x, t - t^x; \lambda) - \frac{Q(t - t^x; s_2(t; \lambda))}{1 - s_2(t - t^x; \lambda)} = \frac{\mathbb{E}[s_2(t; \lambda)^{\eta(t-t^x)} - s_2(t - t^x; \lambda)^{\eta(t-t^x)}]}{1 - s_2(t - t^x; \lambda)} \\ &\leq \frac{1}{1 - s_2(t - \varepsilon_1(t); \lambda)} \mathbb{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda \eta(t - t^x)}{2c_m \sigma^2} \left(\frac{1}{\ln \varepsilon_2(t)} - \frac{1}{\ln t} \right) \right\} \right] \leq \gamma_2(t; \lambda). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Соотношения (3.6) и (3.7) влекут утверждение леммы 5.

Теперь мы готовы доказать лемму об асимптотике $Q(t; s_2(t; \lambda))$.

ЛЕММА 6. Если имеют место (1.1)–(1.3), то равномерно по $\lambda \in \mathcal{K}$

$$\frac{Q(t; s_2(t; \lambda))}{1 - s_2(t; \lambda)} \rightarrow \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \lambda}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После подстановки $s_2(t; \lambda)$ вместо s в уравнение (3.3) разделим обе его части на $1 - s_2(t; \lambda)$. Тогда, обозначив $\varphi(t; \lambda) := \varphi(t, t; \lambda)$, в силу лемм 4 и 5 получим

$$\varphi(t; \lambda) = 1 + \gamma(t; \lambda) - \frac{\lambda}{4} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{1-1/\sqrt{\ln t}} \varphi^2(t - t^x; \lambda) dx, \quad \gamma \in \mathcal{U}.$$

Рассмотрим уравнение, которое нам будет удобно записать в виде

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{4} \int_0^1 \varphi^2(\lambda) dx, \quad \lambda \geq 0.$$

Его положительным решением является функция

$$\varphi(\lambda) = \frac{2(\sqrt{1+\lambda} - 1)}{\lambda} = \frac{2}{1 + \sqrt{1+\lambda}}. \quad (3.8)$$

Далее с помощью метода, использованного в [9], нетрудно показать, что равномерно по $0 \leq \lambda \leq \Lambda$ таким, что $\sigma^2 \Lambda < 1$, верно соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; \lambda) = \varphi(\lambda). \quad (3.9)$$

Для доказательства справедливости (3.9) при всех $\lambda > 0$, достаточно обратиться к схеме серий ветвящихся процессов, рассмотренной в [12]. Это позволит установить, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; \lambda)$ в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$ является аналитической и ограниченной функцией. Поскольку то же самое верно для ветви функции $2/(1 + \sqrt{1+\lambda})$, принимающей значение 1 при $\lambda = 0$, то (3.9) имеет место при всех $\lambda > 0$ в силу теоремы единственности для аналитических функций. Как следствие, получаем равномерную сходимость в (3.9) по $\lambda \in \mathcal{K}$, что завершает доказательство леммы.

Если

$$I(t; s_1, s_2) := \int_0^t [h(Q(t-u; s_1, s_2)) - h(q(t-u; s_1))]m(u) du,$$

то в силу (2.1)

$$\Delta(t; s_1, \lambda) = I(t; 0, s_2(t; \lambda)) - I(t; s_1, s_2(t; \lambda)). \quad (3.10)$$

Положим $y = Q(t-u; s_1, s_2)$ и $x = q(t-u; s_1) = Q(t-u; s_1, 1)$, а затем применим формулу Тейлора $h(y) - h(x) = h'(x)(y-x) + h''(\theta)(y-x)^2/2$, где $\theta = \theta(x, y) \in [x, y]$. В результате получаем представление $I(t; s_1, s_2) = I_1(t; s_1, s_2) + I_2(t; s_1, s_2)$, где

$$I_1(t; s_1, s_2) := \int_0^t h'(q(t-u; s_1))[Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1)]m(u) du, \quad (3.11)$$

$$I_2(t; s_1, s_2) := \frac{1}{2} \int_0^t h''(\theta(t-u; s_1, s_2))[Q(t-u; s_1, s_2) - q(t-u; s_1)]^2 m(u) du, \quad (3.12)$$

причем $\theta(v; s_1, s_2) \in [q(v; s_1), Q(v; s_1, s_2)]$.

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 3 при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{I_1(t; s_1, s_2(t; \lambda))}{q(t; 0)} \rightarrow \frac{3C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{2C_q(0)} + \frac{2C_q(s_1)\ln \varphi(\lambda)}{C_q(0)}$$

равномерно по $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим интеграл $I_1(t; s_1, s_2(t; \lambda))$ в виде суммы интегралов $I_{11}(t; s_1, \lambda)$, $I_{12}(t; s_1, \lambda)$, $I_{13}(t; s_1, \lambda)$ и $I_{14}(t; s_1, \lambda)$, взятых соответственно по множествам $[0, \sqrt{\ln t})$, $[\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t})$, $[t - t/\sqrt{\ln t}, t - \sqrt{\ln t})$ и $[t - \sqrt{\ln t}, t]$.

В силу лемм 1 и 2, а также соотношения (2.3) и неравенства $h'(x) \leq \sigma^2 x$, $x \geq 0$, при некоторых $\gamma_1, \gamma_4 \in \mathcal{U}$ справедливы оценки

$$I_{11}(t; s_1, \lambda) \leq \sigma^2 C_q(s_1)(1 - s_2(t; \lambda)) \int_0^{\sqrt{\ln t}} \frac{du}{t-u} = \frac{\gamma_1(t; s_1, \lambda)}{t}, \quad (3.13)$$

$$I_{14}(t; s_1, \lambda) \leq c_m(1 - s_2(t; \lambda)) \int_{t-\sqrt{\ln t}}^t \frac{du}{u} = \frac{\gamma_4(t; \lambda)}{t}. \quad (3.14)$$

Вспоминая определение функции $\Delta_2(u, t; s_1, \lambda)$ и соотношение $h'(x) \sim \sigma^2 x$, $x \rightarrow 0$, убеждаемся, что при некоторых $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathcal{U}$

$$I_{12}(t; s_1, \lambda) = \sigma^2 C_q(s_1) c_m \int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda)}{(t-u)u} du (1 + \gamma_2(t; s_1, \lambda)), \quad (3.15)$$

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \sigma^2 C_q(s_1) c_m \int_{t-t/\sqrt{\ln t}}^{t-\sqrt{\ln t}} \frac{\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda)}{(t-u)u} du (1 + \gamma_3(t; s_1, \lambda)). \quad (3.16)$$

Исследуем поведение функции $I_{12}(t; s_1, \lambda)$ при $t \rightarrow \infty$. Легко видеть, что

$$\frac{\ln(t-u)}{\ln t} \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по } u \in \left[\sqrt{\ln t}, t - \frac{t}{\sqrt{\ln t}} \right]. \quad (3.17)$$

Далее, используя определения $\Delta_2(u, t; s_1, \lambda)$, $Q(u; s_1, s_2)$ и $s_2(t; \lambda)$, а также (2.2) и неравенство $1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$, получаем, что равномерно по $u \in [\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t}]$

$$\begin{aligned} & |\Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda) - \Delta_2(t-u, t-u; s_1, \lambda)| \\ & \leq \mathbb{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu(t-u)}{2c_m \sigma^2} \left(\frac{1}{\ln(t-u)} - \frac{1}{\ln t} \right) \right\} \right] \\ & \leq \frac{\lambda}{2c_m \sigma^2} \left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t} \right) \mathbb{E} \mu(t-u) = \frac{\gamma_5(t; \lambda)}{\ln t}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу лемм 3 и 6 комбинация соотношений (3.15), (3.17) и (3.18) влечет

$$\begin{aligned} I_{12}(t; s_1, \lambda) &= \frac{C_q(s_1) \lambda \varphi(\lambda)}{2 \ln t} \int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{du}{u(t-u)} (1 + \gamma_6(t; s_1, \lambda)) \\ &= \frac{C_q(s_1) \lambda \varphi(\lambda)}{2t} (1 + \gamma_7(t; s_1, \lambda)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Обратимся к исследованию асимптотического по времени поведения функции $I_{13}(t; s_1, \lambda)$. В интеграле (3.16) перейдем к переменной x , совершив замену $u = t - t^x$. Тогда

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \sigma^2 C_q(s_1) c_m \ln t \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{1 - \ln \ln t / (2 \ln t)} \frac{\Delta_2(t^x, t^x; s_1, \lambda x)}{t - t^x} dx (1 + \gamma_3(t; s_1, \lambda)).$$

Поскольку

$$\frac{1}{t - t^x} \sim \frac{1}{t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{равномерно по } x \in \left[\frac{\ln \ln t}{2 \ln t}, 1 - \frac{\ln \ln t}{2 \ln t} \right], \quad (3.20)$$

то с помощью лемм 3 и 6 находим

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \frac{C_q(s_1) \lambda}{t} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{1 - \ln \ln t / (2 \ln t)} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda x} + 1} dx (1 + \gamma_8(t; s_1, \lambda)).$$

Учитывая равенство

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y} + 1} = 2(\sqrt{1+y} - \ln(1 + \sqrt{1+y})) + C \quad (3.21)$$

и представление (3.8), имеем

$$I_{13}(t; s_1, \lambda) = \left(\frac{C_q(s_1)\lambda\varphi(\lambda)}{t} + \frac{2C_q(s_1)\ln\varphi(\lambda)}{t} \right) (1 + \gamma_9(t; s_1, \lambda)). \quad (3.22)$$

Теперь утверждение леммы следует из (2.3), (3.13), (3.14), (3.19) и (3.22).

Займемся поиском предела функции $I_2(t; 0, s_2(t; \lambda)) - I_2(t; s_1, s_2(t; \lambda))$ при $t \rightarrow \infty$. Применяя формулу Тейлора к следующим функциям:

$$\begin{aligned} h(Q(u; 0, s_2)) - h(q(u; 0)), & \quad h(Q(u; s_1, s_2)) - h(q(u; s_1)), \\ h(Q(u; 0, s_2)) - h(Q(u; s_1, s_2)), & \quad h(q(u; 0)) - h(q(u; s_1)), \end{aligned}$$

получаем два представления

$$\begin{aligned} & h(Q(u; 0, s_2)) - h(q(u; 0)) - h(Q(u; s_1, s_2)) + h(q(u; s_1)) \\ &= h'(q(u; 0))[Q(u; 0, s_2) - q(u; 0)] + h''(\theta(u; 0, s_2)) \frac{[Q(u; 0, s_2) - q(u; 0)]^2}{2} \\ & \quad - h'(q(u; s_1))[Q(u; s_1, s_2) - q(u; s_1)] - h''(\theta(u; s_1, s_2)) \frac{[Q(u; s_1, s_2) - q(u; s_1)]^2}{2} \\ &= h'(Q(u; s_1, s_2))[Q(u; 0, s_2) - Q(u; s_1, s_2)] \\ & \quad + h''(\kappa(u; s_1, s_2)) \frac{[Q(u; 0, s_2) - Q(u; s_1, s_2)]^2}{2} \\ & \quad - h'(q(u; s_1))[q(u; 0) - q(u; s_1)] - h''(\kappa(u; s_1)) \frac{[q(u; 0) - q(u; s_1)]^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta(u; s_1, s_2) &\in [q(u; s_1), Q(u; s_1, s_2)], \quad \kappa(u; s_1, s_2) \in [Q(u; s_1, s_2), Q(u; 0, s_2)], \\ \kappa(u; s_1) &\in [q(u; s_1), q(u; 0)], \quad u \geq 0, \quad s_1, s_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Из (3.24) при $s_2 = s_2(t; \lambda)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} W(u, t; s_1, \lambda) &:= h''(\theta(u; 0, s_2(t; \lambda))) \frac{\Delta_1^2(u, t; \lambda)}{2} - h''(\theta(u; s_1, s_2(t; \lambda))) \frac{\Delta_2^2(u, t; s_1, \lambda)}{2} \\ &= h'(Q(u; s_1, s_2(t; \lambda)))[Q(u; 0, s_2(t; \lambda)) - Q(u; s_1, s_2(t; \lambda))] \\ & \quad + h''(\kappa(u; s_1, s_2(t; \lambda))) \frac{[Q(u; 0, s_2(t; \lambda)) - Q(u; s_1, s_2(t; \lambda))]^2}{2} \\ & \quad - h'(q(u; s_1))[q(u; 0) - q(u; s_1)] - h''(\kappa(u; s_1)) \frac{[q(u; 0) - q(u; s_1)]^2}{2} \\ & \quad + h'(q(u; s_1))\Delta_2(u, t; s_1, \lambda) - h'(q(u; 0))\Delta_1(u, t; \lambda). \end{aligned} \quad (3.24)$$

В силу определения (3.12) имеем

$$I_2(t; 0, s_2(t; \lambda)) - I_2(t; s_1, s_2(t; \lambda)) = \int_0^t W(t - u, t; s_1, \lambda) m(u) du. \quad (3.25)$$

ЛЕММА 8. Если условия (1.1)–(1.3) выполнены, то при некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\ln t}} W(t-u, t; s_1, \lambda) m(u) du &= \frac{\gamma_1(t; s_1, \lambda)}{t}, \\ \int_{t-\ln t}^t W(t-u, t; s_1, \lambda) m(u) du &= \frac{\gamma_2(t; s_1, \lambda)}{t}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что из (3.24) в силу лемм 2 и 3, неравенства $h''(x) \leq \sigma^2$, $0 \leq x \leq 1$, а также соотношений (2.3) и (3.2) вытекает неравенство $|W(u, t; s_1, \lambda)| \leq \rho(t; s_1, \lambda)(1/(u \ln t) + 1/u^2)$, справедливое при больших t , всех достаточно больших $u \leq t$ и некоторой функции $\rho \in \mathcal{L}$. Отсюда приходим к первому утверждению леммы, а именно,

$$\left| \int_0^{\sqrt{\ln t}} W(t-u, t; s_1, \lambda) m(u) du \right| \leq \rho(t; s_1, \lambda) \int_{t-\sqrt{\ln t}}^t \left[\frac{1}{u \ln t} + \frac{1}{u^2} \right] du = \frac{\gamma_3(t; s_1, \lambda)}{t}.$$

Второе утверждение леммы является следствием определения $W(u, t; s_1, \lambda)$, неравенства $h''(x) \leq \sigma^2$, $0 \leq x \leq 1$, лемм 1 и 2. Действительно,

$$\left| \int_{t-\ln t}^t W(t-u, t; s_1, \lambda) m(u) du \right| \leq \frac{\lambda^2}{4c_m \sigma^2 \ln^2 t} \int_{t-\ln t}^t \frac{du}{u} = \frac{\gamma_4(t; \lambda)}{t}.$$

Лемма 8 полностью доказана.

ЛЕММА 9. Равномерно по $u \in [t/\sqrt{\ln t}, t]$, $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$ имеем

$$\Psi(u, t; s_1, \lambda) - \Psi(u, u; s_1, \lambda) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению $\Psi(u, t; s_1, \lambda)$, $Q(t; s_1, s_2)$ и $s_2(t; \lambda)$ для всех $u \in [t/\sqrt{\ln t}, t - \sqrt{\ln t}]$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |\Psi(u, u; s_1, \lambda) - \Psi(u, t; s_1, \lambda)| &= \frac{1}{q(u; 0)} \mathbb{E}[s_1^{\zeta(u)} - 0^{\zeta(u)}][s_2(t; \lambda)^{\mu(u)} - s_2(u; \lambda)^{\mu(u)}] \\ &\leq \frac{1}{q(u; 0)} \mathbb{E} \mathbb{I}(\zeta(u) > 0) s_2(t; \lambda)^{\mu(u)} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu(u)}{2c_m \sigma^2} \left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Разобьем пространство элементарных исходов Ω на два события $\{\omega : \mu(u) > r(t)\}$ и $\{\omega : \mu(u) \leq r(t)\}$, где

$$r(t; \delta) := \delta \left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t} \right)^{-1},$$

а δ – некоторое положительное число. Заметим, что $r(t; \delta)/\ln t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство $s_2(t; \lambda)^{r(t; \delta)} \leq \varepsilon_0$ равномерно по $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Тогда продолжая

цепочку неравенств (3.26), получаем

$$\begin{aligned}
 & |\Psi(u, u; s_1, \lambda) - \Psi(u, t; s_1, \lambda)| \\
 & \leq \frac{1}{q(u; 0)} \mathbb{E} \mathbb{I}(\zeta(u) > 0) \mathbb{I}(\mu(u) > r(t; \delta)) s_2(t; \lambda)^{r(t; \delta)} + \frac{1}{q(u; 0)} \mathbb{E} \mathbb{I}(\zeta(u) > 0) \mathbb{I}(\mu(u) \\
 & \leq r(t; \delta)) \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda r(t; \delta)}{2c_m \sigma^2} \left(\frac{1}{\ln(t/\sqrt{\ln t})} - \frac{1}{\ln t} \right) \right\} \right] \\
 & \leq \frac{\varepsilon_0}{q(u; 0)} \mathbb{E} \mathbb{I}(\zeta(u) > 0) + \frac{1 - e^{-\lambda \delta / (2c_m \sigma^2)}}{q(u; 0)} \mathbb{E} \mathbb{I}(\zeta(u) > 0) \leq \varepsilon_0 + \frac{\lambda \delta}{2c_m \sigma^2}.
 \end{aligned}$$

Поскольку число δ может быть выбрано сколь угодно малым, то последнее неравенство влечет утверждение леммы.

ЛЕММА 10. Если имеют место (1.1)–(1.3), то равномерно по $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 & \frac{I_2(t; 0, s_2(t; \lambda)) - I_2(t; s_1, s_2(t; \lambda))}{q(t; 0)} + \frac{\lambda \varphi(\lambda)}{2} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t}) / \ln t} \Psi(t - t^x; s_1, \lambda) dx \\
 & + \frac{\lambda}{2} \int_{\ln \ln t / \ln t}^{1 - \ln \ln t / (2 \ln t)} \Psi(t^x; s_1, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что соотношения (3.24), $h'(x) \sim \sigma^2 x$ и $h''(x) \rightarrow \sigma^2$, $x \rightarrow 0+$, с помощью элементарных преобразований позволяют записать

$$W(u, t; s_1, \lambda) = -\frac{\sigma^2}{2} [\Delta_2^2(u, t; s_1, \lambda) - \Delta_1^2(u, t; \lambda)] (1 + r(u, t; s_1, \lambda)), \quad (3.27)$$

где $r(u, t; s_1, \lambda) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $u \in [\ln t, t - \sqrt{\ln t}]$, $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}$.

Пусть $I_{21}(t; s_1, \lambda)$ и $I_{22}(t; s_1, \lambda)$ – интегралы от функции $W(t - u, t; s_1, \lambda) m(u) / q(t; 0)$, взятые соответственно по $u \in [\sqrt{\ln t}, t - t/\sqrt{\ln t}]$ и $u \in [t - t/\sqrt{\ln t}, t - \ln t]$. Тогда из представления (3.25) и леммы 8 следует, что для некоторой функции $\gamma_1 \in \mathcal{U}$

$$\frac{I_2(t; 0, s_2(t; \lambda)) - I_2(t; s_1, s_2(t; \lambda))}{q(t; 0)} = I_{21}(t; s_1, \lambda) + I_{22}(t; s_1, \lambda) + \gamma_1(t; s_1, \lambda). \quad (3.28)$$

Перейдем к изучению асимптотического поведения $I_{21}(t; s_1, \lambda)$ при $t \rightarrow \infty$. В силу лемм 1, 3, 6 и 9, а также соотношений (2.3), (3.17), (3.18) и (3.27) имеем при $\gamma_1^\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 & I_{21}(t; s_1, \lambda) \\
 & = -\frac{\lambda \varphi(\lambda)}{2 \ln t} \int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \Psi(t - u; s_1, \lambda) \frac{t}{u(t - u)} du + \gamma_1^\varepsilon(t; s_1, \lambda) \\
 & = -\frac{\lambda \varphi(\lambda)}{2 \ln t} \left[\int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Psi(t - u; s_1, \lambda)}{u} du + \int_{\sqrt{\ln t}}^{t-t/\sqrt{\ln t}} \frac{\Psi(t - u; s_1, \lambda)}{t - u} du \right] + \gamma_1^\varepsilon(t; s_1, \lambda).
 \end{aligned}$$

В первом и втором интегралах последнего выражения введем новую переменную x соответственно по формулам $u = t^x$ и $u = t - t^x$. Результатом этих преобразований

будет соотношение

$$\begin{aligned} \frac{2I_{21}(t; s_1, \lambda)}{\lambda\varphi(\lambda)} + \left[\int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t}) / \ln t} \Psi(t-t^x; s_1, \lambda) dx \right. \\ \left. + \int_{1-\ln \ln t / (2 \ln t)}^{\ln(t-\sqrt{\ln t}) / \ln t} \Psi(t^x; s_1, \lambda) dx \right] \rightarrow 0, \end{aligned}$$

справедливое равномерно по $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}_\varepsilon$. В силу соотношения (3.1) функция $\Psi(t; s_1, \lambda)$ ограничена при $t > 0$, $s_1 \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathcal{K}$, а так как $1 - \ln \ln t / (2 \ln t) \rightarrow 1$ и $\ln(t - \sqrt{\ln t}) / \ln t \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, то для некоторой функции $\gamma_2^\varepsilon(t; s_1, \lambda) \in \mathcal{U}_\varepsilon$

$$I_{21}(t; s_1, \lambda) = -\frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t}) / \ln t} \Psi(t-t^x; s_1, \lambda) dx + \gamma_2^\varepsilon(t; s_1, \lambda). \quad (3.29)$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $I_{22}(t; s_1, \lambda)$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма 1 и соотношения (2.3), (3.27) позволяют утверждать, что при $t \rightarrow \infty$

$$I_{22}(t; s_1, \lambda) + \frac{\sigma^2 c_m t}{2} \int_{t-t/\sqrt{\ln t}}^{t-\ln t} \frac{\Psi(t-u, t; s_1, \lambda)}{u(t-u)} [\Delta_1(t-u, t; \lambda) + \Delta_2(t-u, t; s_1, \lambda)] du \rightarrow 0$$

равномерно по $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}$. После замены переменных $u = t - t^x$ под знаком интеграла в последнем выражении, получаем, что равномерно по $s_1 \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathcal{K}$

$$I_{22}(t; s_1, \lambda) + \frac{\sigma^2 c_m}{2} \int_{\ln \ln t / \ln t}^{1-\ln \ln t / (2 \ln t)} \Psi(t^x; s_1, \lambda x) \frac{t \ln t}{t - t^x} [\Delta_1(t^x; \lambda x) + \Delta_2(t^x; s_1, \lambda x)] dx \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. С помощью лемм 3 и 6, а также соотношения (3.20) находим

$$I_{22}(t; s_1, \lambda) = -\frac{\lambda}{2} \int_{\ln \ln t / \ln t}^{1-\ln \ln t / (2 \ln t)} \Psi(t^x; s_1, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx + \gamma_2(t; s_1, \lambda). \quad (3.30)$$

Сочетание (3.28), (3.29) и (3.30) завершает доказательство леммы.

Таким образом, из лемм 7 и 10, а также соотношения (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} \Psi(t; s_1, \lambda) = & \left(\frac{3\lambda\varphi(\lambda)}{2} + 2 \ln \varphi(\lambda) \right) \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)} \right] \\ & - \frac{\lambda}{2} \int_{\ln \ln t / \ln t}^{1-\ln \ln t / (2 \ln t)} \Psi(t^x; s_1, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx \\ & - \frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2} \int_{\ln \ln t / (2 \ln t)}^{\ln(t-t/\sqrt{\ln t}) / \ln t} \Psi(t-t^x; s_1, \lambda) dx + \gamma^\varepsilon(t; s_1, \lambda), \quad \gamma^\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \Psi(s_1, \lambda) = & \left(\frac{3\lambda\varphi(\lambda)}{2} + 2 \ln \varphi(\lambda) \right) \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)} \right] \\ & - \frac{\lambda\varphi(\lambda)}{2} \int_0^1 \Psi(s_1, \lambda) dx - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Psi(s_1, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

ЛЕММА 11. *Функция*

$$\Psi(s_1, \lambda) = \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)} \right] \left[1 - \frac{\varphi^3(\lambda)}{2 - \varphi(\lambda)} \right], \quad \lambda \geq 0, \quad s_1 \in [0, 1],$$

является единственным решением уравнения (3.32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение уравнения (3.32) в следующем виде:

$$\Psi(s_1, \lambda) = \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)} \right] [1 - \theta(s_1, \lambda)],$$

где

$$\theta(s_1, \lambda), \quad s_1 \in [0, 1], \quad \lambda \geq 0,$$

– неизвестная функция. Тогда с учетом (3.8) и (3.21) получаем уравнение относительно функции $\theta(s_1, \lambda)$, равносильное (3.32):

$$\theta(s_1, \lambda) \left[1 + \frac{\lambda \varphi(\lambda)}{2} \right] = 1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \theta(s_1, \lambda x) \varphi(\lambda x) dx. \quad (3.33)$$

После замены переменных $y = \lambda x$ в последнем интеграле, привлекая представление (3.8), перепишем (3.33) в виде

$$\theta(s_1, \lambda) \frac{2 - \varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = 1 - \frac{1}{2} \int_0^\lambda \theta(s_1, y) \varphi(y) dy.$$

Для дифференцируемой по λ функции $\theta(s_1, \lambda)$ последнее уравнение равносильно следующему:

$$\theta'_\lambda(s_1, \lambda) = \theta(s_1, \lambda) \left[-\sigma^2 \frac{\varphi^2(\lambda)}{2 - \varphi(\lambda)} - \left(\frac{2 - \varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \right)' / \left(\frac{2 - \varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \right) \right] \quad (3.34)$$

с начальным условием $\theta(s_1, 0) = 1$. Заметим, что в силу (3.8) справедливо тождество $\varphi^2(\lambda)/[2 - \varphi(\lambda)] = -\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$. Приходим к простому дифференциальному уравнению, решение которого с учетом начального условия имеет вид $\theta(s_1, \lambda) = \varphi^3(\lambda)/[2 - \varphi(\lambda)]$. Тем самым находим решение уравнения (3.33). Единственность решения этого уравнения устанавливается аналогично лемме 4 из [4].

Снова применяя подход, изложенный в [9], несложно показать, что

$$\Psi(t; s_1, \lambda) \rightarrow \Psi(s_1, \lambda), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

равномерно по $s_1 \in [0, 1]$ и $0 < \varepsilon \leq \lambda \leq \Lambda$, где $\sigma^2 \Lambda < 1$. Тогда в силу (2.3), (3.1), (3.35) и леммы 11 при указанных s_1 и λ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[s_1^{\zeta(t)} \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu(t)}{2c_m \sigma^2 \ln t} \right\} \mid \zeta(t) > 0 \right] = \left[1 - \frac{C_q(s_1)}{C_q(0)} \right] \frac{\varphi^3(\lambda)}{2 - \varphi(\lambda)}. \quad (3.36)$$

В последней формуле положим $s_1 = s_1(\lambda_1) = e^{-\lambda_1}$. Преобразование Лапласа вектора, составленного из неотрицательных случайных величин, является аналитической и ограниченной функцией в области $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Это же верно для функции

$(1 - C_q(s_1(\lambda_1))/C_q(0))\varphi^3(\lambda)/(2 - \varphi(\lambda))$. В силу теоремы единственности для аналитических функций соотношение (3.36) справедливо для всех λ_1, λ_2 с $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Теорема 3 полностью доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. Б. Яровой за постановку задач и постоянное внимание, а также В. А. Ватутину за советы, замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Захарьева, “О вероятностях выживания частиц на $\mathbb{Z}^2$ в одной из моделей критического ветвящегося случайного блуждания”, *Труды VI международных Колмогоровских чтений* (Ярославль, 19–22 мая 2008 г.), Изд-во ЯГПУ, Ярославль, 2008, 218–229.
- [2] Е. Вл. Булинская, “Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке”, *ТВП*, **55**:1 (2010), 142–148.
- [3] Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Изд-во мех.-матем. фак-та МГУ, М., 2007.
- [4] В. А. Ватутин, В. А. Топчий, “Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий”, *ТВП*, **49**:3 (2004), 461–484.
- [5] S. Albeverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaia, “Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **326**:8 (1998), 975–980.
- [6] S. Albeverio, L. V. Bogachev, “Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations”, *Positivity*, **4**:1 (2000), 41–100.
- [7] Е. Б. Яровая, “Критические ветвящиеся случайные блуждания по решеткам низких размерностей”, *Дискрет. матем.*, **21**:1 (2009), 117–138.
- [8] V. A. Vatutin, V. A. Topchii, E. B. Yarovaia, “Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers”, *Theor. Probability and Math. Statist.*, **69** (2004), 1–15.
- [9] V. Topchii, V. Vatutin, “Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk”, *Discrete Random Walks* (Paris, 2003), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AC, Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2003, 325–332.
- [10] Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971.
- [11] Е. Б. Яровая, “Монотонность вероятности возвращения в источник в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 2, 44–47.
- [12] В. А. Ватутин, “Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, начинающиеся с большого числа частиц”, *Матем. заметки*, **40**:4 (1986), 527–541.

Е. Вл. Булинская

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bulinskaya@yandex.ru

Поступило

14.08.2010

Исправленный вариант

27.12.2010