Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, К теории обобщенных квазиизометрий, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 571–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:11:59

К теории обобщенных квазиизометрий

Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов

Работа посвящена изучению так называемых конечно билипшицевых отображений, которые являются далеко идущим обобщением изометрий и квазиизометрий. Получен ряд критериев для гомеоморфного продолжения на границу конечно билипшицевых гомеоморфизмов f между областями в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, внешние дилатации $K_O(x, f)$ которых удовлетворяют интегральным ограничениям $\int \Phi(K_O^{n-1}(x, f)) dm(x) < \infty$ с возрастающей выпуклой функцией $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$. Отметим, что найденные интегральные условия на функцию Φ являются не только достаточными, но и необходимыми для непрерывного продолжения f на границу.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В теории отображений, квазиконформных в среднем, интегральные условия типа

$$\int_D \Phi(K(x)) dm(x) < \infty \quad (1.1)$$

применяются к различным характеристикам K этих отображений, см., например, [1]–[10]. Здесь $dm(x)$ соответствует мере Лебега в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Исследования классов отображений с интегральными условиями (1.1) также актуальны в связи с недавним развитием теории так называемых отображений с конечным искажением, см. соответствующие ссылки, например, в монографиях [11] и [12]. Настоящая статья является естественным продолжением наших предыдущих работ [13] и [14], см. также главы 9 и 10 в монографии [12], которые посвящены интегральным условиям другого типа, оказавшихся полезными при изучении отображений с ограничениями типа (1.1).

Следуя [13], см. также главу 10 в [12], говорим, что гомеоморфизм f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *конечно билипшицевым*, если

$$0 < l(x, f) \leq L(x, f) < \infty \quad \text{для всех } x \in D, \quad (1.2)$$

где

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}, \quad l(x, f) = \liminf_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Отметим, что конечно билипшицевы гомеоморфизмы $f: D \rightarrow D'$ дифференцируемы с $J(x, f) \neq 0$ п.в. и обладают (N) -свойством Лузина.

Напомним, что *внешняя дилатация* отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в точке дифференцируемости $x \in D$ отображения f с $J(x, f) \neq 0$ определяется равенством

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|}.$$

Как обычно, здесь через $f'(x)$ обозначена якобиева матрица отображения f в точке x , $J(x, f) = \det f'(x)$ – якобиан f и

$$\|f'(x)\| = \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

2. Предварительные замечания. Комбинируя лемму 4.1 и теорему 5.5 в [13], см. также лемму 10.3 и теорему 10.11 в [12], теорему 10.1 в [14], а также теорему 9.8 в [12], получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть D и D' – либо ограниченные выпуклые области, либо ограниченные области с гладкими границами класса C^1 в $\mathbb{R}^n$. Если $f: D \rightarrow D'$ является конечно билипшицевым гомеоморфизмом с

$$\int_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, r)} = \infty \quad \text{для всех } x_0 \in \partial D \quad (2.1)$$

для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ и

$$\|K_O\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int_{D \cap S(x_0, r)} K_O^{n-1}(x, f) dA \right)^{1/(n-1)},$$

то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}$ в $\bar{D}$, которое отображает $\bar{D}$ на $\bar{D}'$.

Здесь, как обычно, через $S(x_0, r)$ обозначается сфера $|x - x_0| = r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Более того, как следует из наших результатов в [13] и [14], см. также главы 9 и 10 в [12], предложение 1 справедливо для отображений конечного искажения площади (и так называемых нижних Q -гомеоморфизмов с заменой $K_O(x, f)$ на $Q(x)$ в (2.1)) и для гораздо более общих областей с так называемыми слабо плоскими границами.

3. Основная лемма. Следующее утверждение является обобщением леммы 3.1 из [15]. Здесь $\mathbb{B}^n$ обозначает единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть $K: \mathbb{B}^n \rightarrow [0, \infty]$, $n \geq 2$, – измеримая функция, и $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – возрастающая выпуклая функция. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dr}{rk^{1/p}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\epsilon_M}^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/p}} \quad \text{для всех } p \in (0, \infty), \quad (3.1)$$

где $k(r)$ – среднее значение функции $K(x)$ на сфере $|x| = r$,

$$M := \int_{\mathbb{B}^n} \Phi(K(x)) dm(x) \quad (3.2)$$

– среднее значение функции $\Phi \circ K$ в единичном шаре $\mathbb{B}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что неравенство (3.1) при каждом $p \in (0, \infty)$ эквивалентно неравенству

$$\int_0^1 \frac{dr}{rk^{1/p}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM}^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)}, \quad \text{где } \Phi_p(t) := \Phi(t^p). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Утверждение очевидно, если $M = \infty$, поскольку в этом случае интеграл в правой части неравенства (3.1) равен нулю. Поэтому мы можем считать, что $M < \infty$. Кроме того, мы можем также считать, что $\Phi(0) > 0$, и поэтому $M > 0$ (случай $\Phi(0) = 0$ сводится к этому аппроксимацией $\Phi(t)$ путем срезания той части ее графика, который лежит ниже прямой $\tau = \delta + \Phi'(t_0) \cdot t$, $t_0 > 0$, $\delta > 0$). Обозначим

$$t_* = \sup_{\Phi_p(t)=\tau_0} t, \quad \tau_0 = \Phi(0) > 0. \quad (3.4)$$

Полагая

$$H_p(t) := \log \Phi_p(t), \quad (3.5)$$

видим, что

$$H_p^{-1}(\eta) = \Phi_p^{-1}(e^\eta), \quad \Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau). \quad (3.6)$$

Таким образом, получаем, что

$$k^{1/p}(r) = H_p^{-1}\left(\log \frac{h(r)}{r^n}\right) = H_p^{-1}\left(n \log \frac{1}{r} + \log h(r)\right) \quad \text{для всех } r \in R_*, \quad (3.7)$$

где

$$h(r) := r^n \Phi(k(r)) = r^n \Phi_p(k^{1/p}(r)) \quad \text{и} \quad R_* = \{r \in (0, 1) : k^{1/p}(r) > t_*\}.$$

Тогда также

$$k^{1/p}(e^{-s}) = H_p^{-1}(ns + \log h(e^{-s})) \quad \text{для всех } s \in S_*, \quad (3.8)$$

где

$$S_* = \{s \in (0, \infty) : k^{1/p}(e^{-s}) > t_*\}.$$

Теперь из неравенства Йенсена ввиду выпуклости функции Φ получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(e^{-s}) ds &= \int_0^1 h(r) \frac{dr}{r} = \int_0^1 \Phi(k(r)) r^{n-1} dr \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_{S(r)} \Phi(K(x)) d\mathcal{A} \right) r^{n-1} dr \leq \frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}} \cdot M = \frac{M}{n}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где мы используем среднее значение функции $\Phi \circ K$ по сфере $S(r) = \{x \in \mathbb{B} : |x| = r\}$ относительно площади. Как обычно, здесь Ω_n и ω_{n-1} – объем единичного шара и площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Рассуждая от противного, легко видеть, что

$$|T| = \int_T ds \leq \frac{1}{n}, \quad (3.10)$$

где $T = \{s \in (0, \infty) : h(e^{-s}) > M\}$. Далее, покажем, что

$$k^{1/p}(e^{-s}) \leq H_p^{-1}(ns + \log M) \quad \text{для всех } s \in (0, \infty) \setminus T_*, \quad (3.11)$$

где $T_* = T \cap S_*$. Заметим, что

$$(0, \infty) \setminus T_* = [(0, \infty) \setminus S_*] \cup [(0, \infty) \setminus T] = [(0, \infty) \setminus S_*] \cup [S_* \setminus T].$$

Из (3.8) следует, что неравенство (3.11) справедливо для $s \in S_* \setminus T$ в силу возрастания функции H_p^{-1} . Заметим также, что из (3.4) следует неравенство

$$e^{ns} M > \Phi(0) = \tau_0 \quad \text{для всех } s \in (0, \infty), \quad (3.12)$$

а тогда согласно (3.6) получаем, что

$$t_* < \Phi_p^{-1}(e^{ns} M) = H_p^{-1}(ns + \log M) \quad \text{для всех } s \in (0, \infty). \quad (3.13)$$

Следовательно, (3.11) выполнено также для $s \in (0, \infty) \setminus S_*$. Таким образом, справедливость (3.11) доказана.

Поскольку H_p^{-1} является возрастающей функцией, из (3.10) и (3.11) имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dr}{rk^{1/p}(r)} &= \int_0^\infty \frac{ds}{k^{1/p}(e^{-s})} \geq \int_{(0, \infty) \setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} \\ &\geq \int_{|T_*|}^\infty \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} \geq \int_{1/n}^\infty \frac{ds}{H_p^{-1}(ns + \Delta)} = \frac{1}{n} \int_{1+\Delta}^\infty \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\Delta = \log M$. Заметим также, что $1 + \Delta = \log eM$. Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{dr}{rk^{1/p}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\log eM}^\infty \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} \quad (3.15)$$

и после замены $\eta = \log \tau$ получаем (3.3), см. (3.6), и поэтому (3.1).

Поскольку отображение $t \mapsto t^p$ для любого положительного p является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $[0, \infty]$ на $[0, \infty]$, мы можем переписать теорему 2.1 из [15] в следующем виде, который более удобен для дальнейших приложений. Интеграл в (3.18) понимается как интеграл Лебега–Стилтьеса, а интегралы в (3.17) и (3.19)–(3.22) – как обычные интегралы Лебега.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – возрастающая функция. Положим

$$H_p(t) = \log \Phi_p(t), \quad \Phi_p(t) = \Phi(t^p), \quad p \in (0, \infty). \quad (3.16)$$

Тогда из равенства

$$\int_\delta^\infty H_p'(t) \frac{dt}{t} = \infty \quad (3.17)$$

следует равенство

$$\int_\delta^\infty \frac{dH_p(t)}{t} = \infty \quad (3.18)$$

и (3.18) эквивалентно равенству

$$\int_\delta^\infty H_p(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \quad (3.19)$$

для некоторого $\delta > 0$, и (3.19) эквивалентно каждому из равенств

$$\int_0^\delta H_p\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \quad (3.20)$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int_{\delta_*}^\infty \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} = \infty \quad (3.21)$$

для некоторого $\delta_* > H(+0)$,

$$\int_{\delta^*}^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad (3.22)$$

для некоторого $\delta^* > \Phi(+0)$.

Более того, (3.17) эквивалентно (3.18), и поэтому каждое из равенств (3.17)–(3.22) эквивалентно каждому из остальных, если Φ при этом еще и абсолютно непрерывна. В частности, все условия (3.17)–(3.22) эквивалентны, если Φ является выпуклой и возрастающей.

Легко видеть, что условия (3.17)–(3.22) становятся слабее при увеличении p , см., например, (3.19). Заметим также, что в правых частях равенств (3.17)–(3.22) мы имеем в виду $+\infty$.

4. Основной результат. Комбинируя предложение 1 и лемму 1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D и D' – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые либо выпуклы, либо имеют гладкие границы класса C^1 . Предположим, что $f: D \rightarrow D'$ – конечно билипшицевый гомеоморфизм с

$$\int_D \Phi(K_O^{n-1}(x, f)) dm(x) < \infty \quad (4.1)$$

для выпуклой возрастающей функции $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$. Если

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty \quad (4.2)$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$, то f имеет гомеоморфное продолжение $\bar{f}$ в $\bar{D}$, отображающее $\bar{D}$ на $\bar{D}'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что условие (4.2) может быть переписано в виде

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi_{n-1}^{-1}(\tau)} = \infty, \quad \text{где } \Phi_{n-1}(t) := \Phi(t^{n-1}). \quad (4.3)$$

Отметим также, что по предложению 2 условие (4.3) может быть заменено любым из условий (3.17)–(3.21) при $p = n - 1$ и, в частности, условие (3.19) может быть переписано в виде

$$\int_\delta^\infty \log \Phi(t) \frac{dt}{t^{n'}} = +\infty \quad (4.4)$$

для некоторого $\delta > 0$, где $1/n' + 1/n = 1$, т.е. $n' = 2$ для $n = 2$, n' строго убывает по n , и $n' = n/(n - 1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Действительно, продолжим функцию $K_O(x, f)$ нулем вне D и положим для фиксированного $x_0 \in \partial D$

$$K(x) = K_O^{n-1}(x_0 + xd_0, f), \quad x \in \mathbb{B},$$

с некоторым положительным $d_0 < \sup_{z \in D} |z - x_0|$. Тогда по лемме 1 с указанной $K(x)$ и $p = n - 1$ получаем, что

$$\int_0^1 \frac{dr}{rk^{1/(n-1)}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM}^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}}, \quad (4.5)$$

где $k(r)$ – среднее значение функции $K(x)$ на сфере $|x| = r$ и

$$M = \int_{\mathbb{B}} \Phi(K(x)) dm(x). \quad (4.6)$$

Далее, после замены $y_0 = x_0 + xd_0$ в (4.6) по условию (4.1) получаем, что

$$M \leq N := \Phi(0) + \frac{1}{\Omega_n d_0^n} \int_D \Phi(K_O^{n-1}(y, f)) dm(y) < \infty,$$

где Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, и после замены $\rho = rd_0$ в интеграле левой части неравенства (4.5) получаем, что

$$\int_0^{d_0} \frac{d\rho}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, \rho)} \geq \frac{1}{n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}} \int_{eN}^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}},$$

где ω_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ и

$$\|K_O\|_{n-1}(x_0, \rho) = \left(\int_{|z-x_0|=\rho} K_O^{n-1}(z, f) dA \right)^{1/(n-1)}.$$

Отметим, что $N > \Phi(0)$. Таким образом, получаем из условия (4.2), что

$$\int_0^{\delta_0} \frac{d\rho}{\|K_O\|_{n-1}(x_0, \rho)} = \infty. \quad (4.7)$$

Это очевидно, если $\delta := eN \leq \delta_0$. Если же $\delta > \delta_0$, то

$$\int_{\delta_0}^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \int_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} + \int_{\delta_0}^\delta \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}},$$

где

$$0 < \int_{\delta_0}^\delta \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} \leq \frac{\log(\delta/\delta_0)}{[\Phi^{-1}(\delta_0)]^{1/(n-1)}} < \infty,$$

поскольку $\Phi^{-1}(\delta_0) > 0$.

Наконец, из (4.7) и предложения 1 получаем утверждение теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Более того, как следует из замечания 1, теорема 1 справедлива для отображений конечного искажения площади (и так называемых нижних Q -гомеоморфизмов с заменой $K_O(x, f)$ на $Q(x)$ в (2.1)) и для гораздо более общих областей с так называемыми слабо плоскими границами. Последний класс областей включает в себя, в частности, так называемые QED -области (квазиэкстремальной длины по Герингу–Мартио) и так называемые равномерные области по Мартио–Сарвасу, см. [16] и [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Ahlfors, “On quasiconformal mappings”, *J. Anal. Math.*, **3** (1954), 1–58.
- [2] П. А. Билута, “Экстремальные задачи для отображений квазиконформных в среднем”, *Сиб. матем. журн.*, **6** (1965), 717–726.
- [3] A. Golberg, “Homeomorphisms with finite mean dilatations”, *Complex Analysis and Dynamical Systems II*, Contemp. Math., **382**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 177–186.
- [4] В. И. Кругликов, “Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем”, *Матем. сб.*, **130:2** (1986), 185–206.
- [5] С. Л. Крушкаль, “Об отображениях, квазиконформных в среднем”, *Докл. АН СССР*, **157:3** (1964), 517–519.
- [6] С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения: новые методы и приложения*, Наука, Новосибирск, 1984.
- [7] R. Kühnau, “Über Extremalprobleme bei im Mittel quasikonformen Abbildungen”, *Complex Analysis – Fifth Romanian–Finnish Seminar*, Part 1 (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., **1013**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 113–124.
- [8] И. Н. Песин, “Отображения, квазиконформные в среднем”, *Докл. АН СССР*, **187:4** (1969), 740–742.
- [9] В. И. Рязанов, “Об отображениях, квазиконформных в среднем”, *Сиб. матем. журн.*, **37:2** (1996), 378–388.
- [10] A. Ukhlov, S. K. Vodopyanov, “Mappings associated with weighted Sobolev spaces”, *Complex Analysis and Dynamical Systems III*, Contemp. Math., **455**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 369–382.
- [11] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
- [12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2009.
- [13] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, “On the theory of mappings with finite area distortion”, *J. Anal. Math.*, **104** (2008), 291–306.
- [14] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, “К теории нижних Q -гомеоморфизмов”, *Укр. матем. вестник*, **5:2** (2008), 159–184.
- [15] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “On integral conditions in the mapping theory”, *Укр. матем. вестник*, **7:1** (2010), 73–87.
- [16] F. W. Gehring, O. Martio, “Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings”, *J. Anal. Math.*, **45** (1985), 181–206.
- [17] O. Martio, J. Sarvas, “Injectivity theorems in plane and space”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4:2** (1979), 383–401.

Д. А. Ковтонюк

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк

E-mail: denis_kovtonyuk@bk.ru

Поступило

08.09.2010

В. И. Рязанов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк

E-mail: vlryazanov1@rambler.ru