Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 394–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:51:46

Оценки в теоремах типа теоремы

Берлинга–Хелсона. Многомерный случай

В. В. Лебедев

Рассматриваются пространства $A_p(\mathbb{T}^m)$, состоящие из функций f на m -мерном торе $\mathbb{T}^m$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}^m\}$ принадлежит $l^p(\mathbb{Z}^m)$, $1 \leq p < 2$. Норма в $A_p(\mathbb{T}^m)$ определяется соотношением $\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = \|\hat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^m)}$. Исследуется порядок роста норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}^m$ (в одномерном случае этот вопрос рассматривался автором ранее). Полученные оценки снизу имеют прямые аналоги в пространствах $A_p(\mathbb{R}^m)$.

Библиография: 15 названий.

Введение. Для всякой интегрируемой функции f на m -мерном торе $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$, $m \geq 1$ (где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел) рассмотрим ее коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(t) e^{-i(k,t)} dt, \quad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Пусть $A_1(\mathbb{T}^m)$ – пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\hat{f} = \{\hat{f}(k), k \in \mathbb{Z}^m\}$ принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^m)$. При $1 < p \leq 2$ пусть $A_p(\mathbb{T}^m)$ – пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что $\hat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^m)$. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = \|\hat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^m)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\hat{f}(k)|^p \right)^{1/p}$$

пространства A_p являются банаховыми ($1 \leq p \leq 2$), причем $A = A_1$ – банахова алгебра (с обычным умножением функций).

Согласно теореме Берлинга–Хелсона [1] (см. также [2]), если φ – отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то φ – линейно (с целым угловым коэффициентом), т.е. $\varphi(t) = kt + \varphi(0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогичное утверждение верно для отображений $\varphi: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}$. Этот случай легко сводится к одномерному.

Пусть $C^\nu(\mathbb{T}^m)$ – класс (комплекснозначных) функций на торе $\mathbb{T}^m$ таких, что все частные производные порядка ν непрерывны.

В настоящей работе мы исследуем рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}^m$. В одномерном случае этот вопрос был рассмотрен нами в [3]. Там же содержится история вопроса¹.

Легко показать, что для любой C^1 -гладкой (вещественной) функции φ на окружности $\mathbb{T}$ имеем²

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{1/p-1/2}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

при всех p , $1 \leq p < 2$.

С другой стороны, известна оценка Лейбензона–Кахана–Алпара ([2], [4]–[6]): если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ – непостоянная (или, что в силу периодичности, то же, что нелинейная) вещественная функция, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c_p |\lambda|^{1/p-1/2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

при всех $1 \leq p < 2$.

Таким образом, для любой C^2 -гладкой нелинейной вещественной функции φ на $\mathbb{T}$ имеем³

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/2}. \quad (3)$$

В частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/2}$.

Случай C^1 -гладкой фазы φ существенно отличается от C^2 -гладкого случая. Как было показано нами в [3] (и ранее в [7]), для $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ могут расти очень медленно, а именно, можно вплотную подойти к $O(\log |\lambda|)$ -условию. При $p > 1$ соответствующие нормы могут вовсе не расти.

Отметим, что доказательство оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (2) опирается на лемму ван дер Корпута и существенно использует невырожденность кривизны некоторой дуги графика функции φ . Этот подход не позволяет рассматривать функции гладкости меньшей чем C^2 .

В многомерном случае для фазовых функций φ гладкости C^2 (и выше) поведение норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ рассматривал Хедстром [8]. Как и в одномерном случае, легко получить оценку сверху, так, например⁴, если $\varphi \in C^\nu(\mathbb{T}^m)$, $\nu > m/2$, $m \geq 2$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m/2})$ (в [8] эта оценка получена при несколько иных предположениях гладкости). В той же работе [8] получена следующая оценка снизу: если $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция такая, что матрица ее вторых производных имеет определитель не равный тождественно нулю, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c |\lambda|^{m/2}. \quad (4)$$

Доказательство заключается в сведении к одномерному случаю.

¹ В работе [3] автором допущена опечатка. На с. 127 во 2-й строке сверху напечатано “и взаимно однозначна”, должно быть “и по mod 2π взаимно однозначна”.

² В действительности, оценка (1) верна даже в случае, когда φ абсолютно непрерывна и ее производная принадлежит $L^2(\mathbb{T})$ и, в частности, когда φ удовлетворяет условию Липшица с показателем 1 (см. [2; гл. VI, § 3] для $p = 1$; для $1 < p < 2$ оценка немедленно получается интерполяцией между l^1 и l^2).

³ Мы пишем $a(\lambda) \simeq b(\lambda)$ в случае, когда $c_1 \leq a(\lambda)/b(\lambda) \leq c_2$ при всех достаточно больших $|\lambda|$ (с константами $c_1, c_2 > 0$, не зависящими от λ).

⁴ Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить, с очевидными изменениями, рассуждения, использованные при $m = 1$ в [2; гл. VI, § 3].

В п. 1 мы получаем основной результат настоящей работы, а именно теорему 1, в которой даем оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на торе $\mathbb{T}^m$. При этом мы предполагаем, что множество значений $\nabla\varphi(\mathbb{T}^m)$ градиента $\nabla\varphi$ функции φ имеет положительную (лебегову) меру; в этом случае мы говорим, что градиент функции φ невырожден. Основой доказательства теоремы является естественная модификация метода, ранее использованного нами для одномерного случая в работе [3]. Этот метод может быть назван методом концентрации больших значений преобразования Фурье. Мы получаем также локальные варианты оценок снизу в пространствах $A_p(\mathbb{T}^m)$ (теорема 1') и $A_p(\mathbb{R}^m)$ (теорема 1''), где $A_p(\mathbb{R}^m)$ – пространство функций f на $\mathbb{R}^m$ таких, что преобразование Фурье $\hat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^m)$.

Заметим, что в одномерном случае мы имеем очевидное включение $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$. Однако, уже на торе размерности $m \geq 3$ условие C^1 -гладкости не гарантирует принадлежность функции всем классам A_p , $1 \leq p < 2$. (Условия гладкости, зависящие от размерности, влекущие принадлежность функций классам $A_p(\mathbb{T}^m)$, хорошо известны, см. п. 3). В связи с этим мы, естественно, рассматриваем оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ при $\lambda \in \Lambda(\varphi, p)$, где для функции φ на $\mathbb{T}^m$ множество $\Lambda(\varphi, p)$ – это множество всех тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m)$.

Здесь, во введении, отметим лишь следствия из теоремы 1. Пусть $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция такая, что ее градиент невырожден и удовлетворяет условию Липшица с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$; тогда (следствие 1) при $1 \leq p < 1 + \alpha$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p |\lambda|^{m(1/p-1/(1+\alpha))}, \quad \lambda \in \Lambda(\varphi, p).$$

В частности (следствие 2), видим, что если градиент фазовой функции φ невырожден и удовлетворяет условию Липшица с показателем 1, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p |\lambda|^{m(1/p-1/2)}, \quad \lambda \in \Lambda(\varphi, p). \quad (5)$$

Полагая здесь $p = 1$, получаем для всякой такой функции φ оценку (4) при всех $\lambda \in \Lambda(\varphi, 1)$.

В п. 2 для каждого класса $C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ (см. определение классов $C^{1,\omega}$ в конце введения) мы строим вещественную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$, имеющую невырожденный градиент, такую, что нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ растут очень медленно. (Для одномерного случая это было сделано нами в работе [3]. Общий случай легко получить из одномерного.) Тем самым мы показываем (см. теорему 2 и ее следствия 3, 4), что оценки снизу, полученные в п. 1, близки к окончательным, а в некоторых случаях являются окончательными.

В п. 3, пользуясь вполне стандартными методами, мы получаем многомерный аналог оценки (1), а именно (теорема 3): если φ достаточно гладкая (в зависимости от размерности) вещественная функция на $\mathbb{T}^m$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m(1/p-1/2)})$. Отсюда с учетом нашей оценки (5) получаем многомерный аналог соотношения (3), а именно (теорема 4): если φ достаточно гладкая и ее градиент невырожден, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m(1/p-1/2)},$$

в частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m/2}$.

Мы пользуемся следующими обозначениями. Пусть V – область в $\mathbb{R}^m$ и g – функция на V . Определим модуль непрерывности функции g , полагая

$$\omega(V, g, \delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in V \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} |g(t_1) - g(t_2)|, \quad \delta \geq 0,$$

где $|x|$ – длина вектора $x \in \mathbb{R}^m$. Если $V = \mathbb{R}^m$, мы пишем просто $\omega(g, \delta)$. Пусть ω – заданная непрерывная неубывающая функция на $[0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$. Класс $\text{Lip}_\omega(V)$ состоит из функций g на V таких, что $\omega(V, g, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$. Класс $C^{1,\omega}(V)$ состоит из функций f на V таких, что все производные первого порядка $\partial f / \partial t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, принадлежат $\text{Lip}_\omega(V)$. Разумеется, для (вещественной) функции φ на V условие $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ означает, что $\omega(V, \nabla \varphi, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, где

$$\omega(V, \nabla \varphi, \delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in V \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} |\nabla \varphi(t_1) - \nabla \varphi(t_2)|, \quad \delta \geq 0,$$

– модуль непрерывности градиента $\nabla \varphi$ функции φ . Класс $C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ состоит из 2π -периодических по каждой переменной функций, принадлежащих $C^{1,\omega}(\mathbb{R}^m)$. Для $0 < \alpha \leq 1$ мы пишем $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α} . Вообще, при произвольном $\nu = 0, 1, 2, \dots$ и $0 < \alpha \leq 1$ пусть $C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ – класс функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что f является ν раз дифференцируемой и все частные производные порядка ν функции f (при $\nu = 0$ сама функция f) удовлетворяют условию Липшица с показателем α (т.е. принадлежат $\text{Lip}_{\delta^\alpha}$). Удобно считать, что $C^{\nu,0} = C^\nu$. Для произвольного измеримого множества E в $\mathbb{T}^m$ или в $\mathbb{R}^m$ через $|E|$ мы обозначаем его лебегову меру. Через (x, y) обозначается обычное скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^m$ (или векторов $x \in \mathbb{Z}^m$, $y \in \mathbb{T}^m$). Если W – множество в $\mathbb{R}^m$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то мы полагаем $\lambda W = \{\lambda x : x \in W\}$. Обычным образом мы отождествляем интегрируемые функции на торе $\mathbb{T}^m$ и интегрируемые функции на кубе $[0, 2\pi]^m$. Через c , c_p , $c(p, \varphi)$, c_m и т.д. обозначаем различные положительные константы, зависящие, может быть, только от p , φ и размерности m .

1. Оценки снизу. Как было указано во введении, для функции φ на торе $\mathbb{T}^m$ через $\Lambda(\varphi, p)$ мы обозначаем множество всех тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция. Предположим, что градиент $\nabla \varphi$ не вырожден, т.е. множество $\nabla \varphi(\mathbb{T}^m)$ имеет положительную меру. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c \left(|\lambda|^{1/p} \chi^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right)^m, \quad \lambda \in \Lambda(\varphi, p), \quad |\lambda| \geq 1,$$

где χ^{-1} – функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta \omega(\delta)$, и $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ .

В одномерном случае эта теорема была получена нами в [3]. (Для всякой C^1 -гладкой функции φ на $\mathbb{T}$ мы имеем $\Lambda(\varphi, p) = \mathbb{R}$ при всех $p \geq 1$. Невырожденность градиента в одномерном случае означает нелинейность функции φ , что ввиду периодичности равносильно условию $\varphi \neq \text{const.}$)

Из теоремы 1 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Пусть $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция с невырожденным градиентом. Тогда при всех p , $1 \leq p < 1 + \alpha$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p |\lambda|^{m(1/p-1/(1+\alpha))}, \quad \lambda \in \Lambda(\varphi, p).$$

В частности $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c |\lambda|^{m\alpha/(1+\alpha)}$, $\lambda \in \Lambda(\varphi, 1)$.

Особо отметим случай C^2 -гладкой и даже более общий случай $C^{1,1}$ -гладкой фазы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция с невырожденным градиентом. Тогда при всех p , $1 \leq p < 2$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p |\lambda|^{m(1/p-1/2)}, \quad \lambda \in \Lambda(\varphi, p).$$

В частности $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c |\lambda|^{m/2}$, $\lambda \in \Lambda(\varphi, 1)$.

Справедлив также локальный вариант теоремы 1. Пусть E – произвольное множество, содержащееся в $[0, 2\pi]^m$ или, более обще, – в каком-то кубе с ребрами длиной 2π , параллельными координатным осям. Скажем, что функция f , заданная на E , принадлежит $A_p(\mathbb{T}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{T}^m)$ такая, что ее сужение $F|_E$ на множество E совпадает с f . При этом полагаем

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m, E)} = \inf_{F|_E=f} \|F\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}.$$

Как и в теореме 1, всюду далее χ^{-1} – функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть V – область в $[0, 2\pi]^m$. Пусть $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ – вещественная функция на V . Предположим, что градиент $\nabla\varphi$ не вырожден на V , т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m, V)} \geq c \left(|\lambda|^{1/p} \chi^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right)^m$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m, V)$.

Локальный аналог следствия 1 (равно как и следствия 2) очевиден.

Технически нам будет удобно иметь дело с пространствами A_p в непериодическом случае. (Причина этого в том, что в отличие от одномерного случая множество значений градиента C^1 -гладкой функции нескольких переменных может быть очень сложным⁵.)

Пусть $A_p(\mathbb{R}^m)$, где $1 \leq p \leq \infty$, – пространство умеренных распределений f на $\mathbb{R}^m$ таких, что преобразование Фурье $\hat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^m)$. Полагаем

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(u)|^p du \right)^{1/p}.$$

⁵В связи с этим отметим следующий вопрос. Пусть V – область в $\mathbb{R}^m$ и $\varphi \in C^1(V)$ – вещественная функция. Предположим, что множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Верно ли тогда, что это множество имеет непустую внутренность? При $m = 2$ ответ на этот вопрос положительный [9]. При $m \geq 3$ ответ неизвестен.

При $1 \leq p \leq 2$ всякое распределение из A_p в действительности, является функцией из L^q , $1/p + 1/q = 1$. При $p = 1$ мы, естественно, считаем, что f непрерывна⁶.

Поясним, что нормировочный множитель преобразования Фурье выбираем так, что

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(t) e^{-i(u,t)} dt, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

для $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

Мы часто пишем A вместо A_1 .

Определим локальные пространства A_p в непериодическом случае.

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ – произвольное множество. Скажем, что функция f , заданная на E , принадлежит $A_p(\mathbb{R}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{R}^m)$ такая, что ее сужение $F|_E$ на множество E совпадает с f . Норма в $A_p(\mathbb{R}^m, E)$ определяется естественным образом:

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m, E)} = \inf_{F|_E=f} \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

ТЕОРЕМА 1''. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть V – область в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ – вещественная функция на V . Предположим, что градиент $\nabla\varphi$ не вырожден на V , т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)} \geq c \left(|\lambda|^{1/p} \chi^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right)^m$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, V)$.

Основной результат настоящего раздела – теорема 1 – немедленно вытекает из теоремы 1'. Покажем, что в свою очередь теорема 1' вытекает из теоремы 1'', после чего докажем саму теорему 1''.

Фиксируем p , $1 \leq p < 2$. При каждом λ таком, что $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m, V)$, рассмотрим какое-нибудь 2π -периодическое (по каждой переменной) продолжение $F_\lambda \in A_p(\mathbb{T}^m)$ функции $e^{i\lambda\varphi}$ с V на $\mathbb{R}^m$.

В предположениях теоремы 1' мы можем найти куб $I \subseteq V$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащийся вместе со своим замыканием во внутренности куба $[0, 2\pi]^m$, такой, что градиент $\nabla\varphi$ не вырожден на I . Пусть χ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^m$, равная 1 на I и равная 0 на дополнении $\mathbb{R}^m \setminus [0, 2\pi]^m$. Имеем $\chi \in A(\mathbb{R}^m)$. Положим $c_0 = \|\chi\|_{A(\mathbb{R}^m)}$. При всяком $u \in \mathbb{R}^m$ определим функцию e_u на $\mathbb{R}^m$, полагая $e_u(t) = e^{i(u,t)}$, $t \in \mathbb{R}^m$. Имеем $\|e_u \chi\|_{A(\mathbb{R}^m)} = c_0$.

Для произвольной функции h на $\mathbb{R}^m$, аннулирующей вне куба $[0, 2\pi]^m$, пусть $\tilde{h}$ – есть ее 2π -периодическое по каждой переменной продолжение с куба $[0, 2\pi]^m$ на $\mathbb{R}^m$. Хорошо известно (см., например, [10; §50]), что если $h \in A(\mathbb{R}^m)$, то $\tilde{h} \in A(\mathbb{T}^m)$, причем $\|\tilde{h}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \leq c \|h\|_{A(\mathbb{R}^m)}$.

Положим $g_u = \widetilde{e_u \chi}$. При всяком $u \in \mathbb{R}^m$ имеем $\|g_u\|_{A(\mathbb{T}^m)} \leq c_1$, откуда

$$\|g_u F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \leq c_1 \|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}.$$

Ясно также, что $\|g_u F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ – измеримая функция от u .

⁶Отметим, что в [1] через A обозначено пространство (обратных) преобразований Фурье мер на $\mathbb{R}$. Мы следуем ныне общепринятым обозначениям (см., например [2]).

Функция χF_λ совпадает с $e^{i\lambda\varphi}$ на I . Таким образом,

$$\begin{aligned} \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^p &\leq \|\chi F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R})}^p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \int_{[0,1]^m} |\widehat{\chi F_\lambda}(u+k)|^p du \\ &= \int_{[0,1]^m} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{e^{-u}\chi F_\lambda}(k)|^p du \\ &= \int_{[0,1]^m} \|g_{-u} F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}^p du \leq c_1 \|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}^p. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться теоремой 1''.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1''. Мы можем найти замкнутый куб $I \subseteq V$ с ребрами, параллельными координатным осям, такой, что его образ $W = \nabla\varphi(I)$ имеет положительную меру. Множество W ограничено.

Фиксируем $c > 0$ так, что

$$\omega(I, \nabla\varphi, \delta) \leq c\omega(\delta), \quad \delta \geq 0.$$

При всяком $\lambda > 0$ выберем $\delta_\lambda > 0$ так, что

$$\chi(m^{1/2}2\delta_\lambda) = \frac{1}{2c\lambda}. \quad (6)$$

При $\varepsilon > 0$ пусть Δ_ε обозначает “треугольную” функцию, сосредоточенную на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функцию на $\mathbb{R}$, заданную следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(t) = \max\left(1 - \frac{|t|}{\varepsilon}, 0\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

и для произвольного интервала $J \subseteq \mathbb{R}$ пусть Δ_J – треугольная функция, сосредоточенная на J , т.е. $\Delta_J(t) = \Delta_{|J|/2}(t - c_J)$, где c_J – центр интервала J (и $|J|$ – его длина). Пусть далее J – куб в $\mathbb{R}^m$ с ребрами, параллельными координатным осям, $J = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_m$. Определим треугольную функцию Δ_J , сосредоточенную на J , полагая

$$\Delta_J(t) = \Delta_{J_1}(t_1)\Delta_{J_2}(t_2)\dots\Delta_{J_m}(t_m), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda > 0$ достаточно велико. Пусть F_λ – произвольная функция на $\mathbb{R}^m$, совпадающая с $e^{i\lambda\varphi}$ на V . Тогда для любого $u \in \lambda W$ существует куб $I_{\lambda,u} \subseteq I$ с ребрами длиной $2\delta_\lambda$, параллельными координатным осям, такой, что

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}} F_\lambda)^\wedge(u)| \geq c_m \delta_\lambda^m,$$

где $c_m > 0$ зависит лишь от размерности m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через a длину ребра куба I . Будем считать, что $\lambda > 0$ столь велико, что

$$2\delta_\lambda < a. \quad (7)$$

Возьмем произвольное $u \in \lambda W$. Мы можем найти точку $t_{\lambda,u} \in I$ такую, что $\nabla\varphi(t_{\lambda,u}) = \lambda^{-1}u$. Пусть $I_{\lambda,u} \subseteq I$ – куб (при необходимости замкнутый) с ребрами длиной $2\delta_\lambda$, параллельными координатным осям, содержащий точку $t_{\lambda,u}$ (см. (7)). Рассмотрим следующую линейную функцию:

$$\varphi_{\lambda,u}(t) = \varphi(t_{\lambda,u}) + (\lambda^{-1}u, t - t_{\lambda,u}), \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Если $t \in I_{\lambda,u}$, то для некоторой точки $\theta \in I_{\lambda,u}$ мы будем иметь

$$\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,u}) = (\nabla\varphi(\theta), t - t_{\lambda,u})$$

(θ лежит на отрезке, соединяющем t и $t_{\lambda,u}$), и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_{\lambda,u}(t)| &= |\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,u}) - (\nabla\varphi(t_{\lambda,u}), t - t_{\lambda,u})| \\ &= |(\nabla\varphi(\theta) - \nabla\varphi(t_{\lambda,u}), t - t_{\lambda,u})| \leq |\nabla\varphi(\theta) - \nabla\varphi(t_{\lambda,u})| |t - t_{\lambda,u}| \\ &\leq \omega(I, \nabla\varphi, m^{1/2}2\delta_\lambda) m^{1/2}2\delta_\lambda \leq c\chi(m^{1/2}2\delta_\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (6), видим, что

$$|e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)}| \leq |\lambda\varphi(t) - \lambda\varphi_{\lambda,u}(t)| \leq \lambda c\chi(m^{1/2}2\delta_\lambda) = \frac{1}{2}, \quad t \in I_{\lambda,u}.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$\begin{aligned} |(\Delta_{I_{\lambda,u}} F_\lambda)^\wedge(u) - (\Delta_{I_{\lambda,u}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}})^\wedge(u)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{I_{\lambda,u}} \Delta_{I_{\lambda,u}}(t) |e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)}| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \Delta_{I_{\lambda,u}}(t) dt = \frac{1}{2} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0). \end{aligned}$$

Вместе с тем

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}})^\wedge(u)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \Delta_{I_{\lambda,u}}(t) e^{i(\lambda\varphi_{\lambda,u}(t) - (u,t))} dt \right| = \widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0).$$

Таким образом,

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}} F_\lambda)^\wedge(u)| \geq \frac{1}{2} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0) = c_m \delta_\lambda^m.$$

Лемма доказана.

Фиксируем p , $1 \leq p < 2$. Всюду далее мы считаем, что частоты λ таковы, что $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, V)$. Мы можем считать, что множество таких λ неограничено, иначе доказывать нечего. Мы также можем считать, что эти частоты λ положительны (комплексное сопряжение не меняет норму функции в A_p). При каждом таком λ пусть F_λ – продолжение функции $e^{i\lambda\varphi}$ с V на $\mathbb{R}^m$ такое, что

$$\|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \leq 2\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)}. \quad (8)$$

Пусть $I_{\lambda,u}$ – соответствующие кубы, существование которых (при достаточно больших λ) установлено в лемме 1.

Определим функции g_λ , полагая

$$g_\lambda = (|(F_\lambda)^\wedge|)^\vee,$$

где $^\vee$ обозначает обратное преобразование Фурье. Имеем $g_\lambda \in A_p(\mathbb{R}^m)$.

Хорошо известно, что функция $\widehat{\Delta_\varepsilon}$ принадлежит $A(\mathbb{R})$ и имеет неотрицательное преобразование Фурье. Отсюда $\widehat{\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m}} \geq 0$ и, поскольку для произвольного куба $J \subseteq \mathbb{R}^m$ с ребрами длиной 2ε , параллельными координатным осям, функция Δ_J получена из $\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m}$ сдвигом, имеем $|\widehat{\Delta_J}| = \widehat{\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m}}$. Следовательно ($*$ означает свертку),

$$\begin{aligned} |(\Delta_{I_{\lambda, u}} F_\lambda)^\wedge(u)| &= |(\Delta_{I_{\lambda, u}})^\wedge * (F_\lambda)^\wedge(u)| \leq |(\Delta_{I_{\lambda, u}})^\wedge| * |(F_\lambda)^\wedge|(u) \\ &= (\Delta_{(-\delta_\lambda, \delta_\lambda)^m})^\wedge * \widehat{g_\lambda}(u) = (\Delta_{(-\delta_\lambda, \delta_\lambda)^m} g_\lambda)^\wedge(u) \end{aligned}$$

для почти всех $u \in \mathbb{R}^m$. (Мы воспользовались стандартными фактами о свертке функций из L^1 с функциями из L^p , см., например, [11; гл. I, § 2].)

Таким образом, в соответствии с леммой 1 видим, что если $\lambda > 0$ достаточно велико, то для почти всех $u \in \lambda W$ имеем

$$c_m \delta_\lambda^m \leq (\Delta_{(-\delta_\lambda, \delta_\lambda)^m} g_\lambda)^\wedge(u). \quad (9)$$

Так как $\|\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m}\|_{A(\mathbb{R}^m)} = \Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m}(0) = 1$, для любой функции $f \in A_p(\mathbb{R}^m)$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|\Delta_{(-\varepsilon, \varepsilon)^m} f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Поэтому, возводя в степень p неравенство (9) и интегрируя по $u \in \lambda W$, видим, что

$$\begin{aligned} (c_m^p \delta_\lambda^{mp} |\lambda W|)^{1/p} &\leq \left(\int_{\lambda W} |(\Delta_{(-\delta_\lambda, \delta_\lambda)^m} g_\lambda)^\wedge(u)|^p du \right)^{1/p} \\ &\leq \|\Delta_{(-\delta_\lambda, \delta_\lambda)^m} g_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|g_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \end{aligned}$$

при всех достаточно больших λ .

Отсюда с учетом (8) получаем

$$c_m \delta_\lambda^m \lambda^{m/p} |W|^{1/p} \leq 2 \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)}.$$

Остается лишь заметить, что условие (6) влечет $\delta_\lambda \geq c\chi^{-1}(1/\lambda)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим ее характеристическую функцию 1_D , т.е. функцию, принимающую значение $1_D(t) = 1$ при $t \in D$ и значение $1_D(t) = 0$ при $t \notin D$. Можно показать, что если граница ∂D области D является C^2 -гладкой, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. Вместе с тем, в более общем случае областей с C^1 -гладкой границей преобразование Фурье характеристической функции может вести себя существенно иначе. Автором построена область $D \subset \mathbb{R}^2$ с C^1 -гладкой границей такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$. Основную роль в изучении вопроса о том, для каких областей $D \subset \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей мы имеем включение $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$, играет теорема 1". Результаты будут изложены в другой публикации.

2. Медленный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$. В работе [3] для каждого заданного класса $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) нами построена нетривиальная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ с медленным ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$. А именно, положим (как и выше χ^{-1} – функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$)

$$\Theta_1(y) = \frac{y}{\log y} \chi^{-1} \left(\frac{(\log y)^2}{y} \right)$$

и при $1 < p < 2$ положим

$$\Theta_p(y) = \left(\int_1^y \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \right)^{1/p}.$$

Пусть ω удовлетворяет условию $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Тогда существует вещественная нигде не линейная, т.е. не являющаяся линейной ни на каком интервале, функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такая, что при всех p , $1 \leq p < 2$, имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(\Theta_p(|\lambda|))$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Этот результат о медленном росте легко переносится на случай тора произвольной размерности. Скажем, что градиент функции φ нигде не вырожден, если он не вырожден ни на каком открытом множестве, т.е., если для любого открытого множества $V \subseteq \mathbb{R}^m$ имеем $|\nabla\varphi(V)| > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что при всех p , $1 \leq p < 2$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O((\Theta_p(|\lambda|))^m), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Многомерный вариант вытекает из одномерного. Действительно, если $\varphi_0 \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ – вещественная нигде не линейная функция, то, полагая

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_1) + \varphi_0(t_2) + \cdots + \varphi_0(t_m), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m,$$

имеем функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом, и остается лишь заметить, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = (\|e^{i\lambda\varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})})^m$.

Таким же образом (или непосредственно из теоремы 2 с учетом следствия 1), получаем многомерные аналоги следствий 2, 3 работы [3], а именно.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что

- (i) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m\alpha/(1+\alpha)} (\log |\lambda|)^{m(1-\alpha)/(1+\alpha)}),$
- (ii) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m(1/p-1/(1+\alpha))}$ при $1 < p < 1 + \alpha;$
 $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq 1$ при $1 + \alpha < p < 2;$
 $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O((\log |\lambda|)^{m/p})$ при $p = 1 + \alpha.$

В частности видим, что оценка следствия 1 настоящей работы при $1 < p < 1 + \alpha$ является окончательной.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(\gamma(|\lambda|)(\log |\lambda|)^m).$$

3. Оценки сверху. Пусть $1 \leq p < 2$. Как отмечено во введении, если φ – вещественная функция на окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем 1, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{1/p-1/2})$, и в силу оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (2) имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/2}$ для любой нелинейной вещественной функции $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ (в действительности это верно даже в предположении $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T})$, см. следствие 2 при $m = 1$). Здесь мы получим аналогичные результаты в случае тора произвольной размерности.

Напомним известное условие гладкости, обеспечивающее принадлежность функций классам $A_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < 2$, а именно: если $f \in C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ и $\nu + \alpha > m(1/p - 1/2)$, то $f \in A_p(\mathbb{T}^m)$. Известно, что это условие неулучшаемо в том смысле, что при $\nu + \alpha = m(1/p - 1/2)$ включение $C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m) \subseteq A_p(\mathbb{T}^m)$ неверно⁷.

Покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < 2$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть $\varphi \in C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция. Предположим, что $\nu + \alpha \geq 1$, $\nu + \alpha > m(1/p - 1/2)$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m(1/p-1/2)}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

При условии $\nu + \alpha \geq 2$ имеем $C^{\nu,\alpha} \subseteq C^{1,1}$, поэтому, пользуясь следствием 2 и теоремой 3, видим, что верна следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p < 2$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть $\varphi \in C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ – вещественная функция с невырожденным градиентом. Предположим, что $\nu + \alpha \geq 2$, $\nu + \alpha > m(1/p - 1/2)$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m(1/p-1/2)}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В частности, если $\nu + \alpha \geq 2$, $\nu + \alpha > m/2$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Обычным образом мы определяем норму в пространстве $L^2(\mathbb{T}^m)$ и норму в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$ непрерывных функций на $\mathbb{T}^m$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^m)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|g\|_{C(\mathbb{T}^m)} = \sup_{t \in \mathbb{T}^m} |g(t)|.$$

Определим норму в $C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$, полагая

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)} = & \max_{0 \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m \leq \nu} \|D_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m} f\|_{C(\mathbb{T}^m)} \\ & + \max_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m = \nu} \sup_{\delta > 0} \frac{1}{\delta^\alpha} \omega(D_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m} f, \delta), \end{aligned}$$

где

$$D_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m} f(t) = \frac{\partial^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m} f}{\partial t_1^{\gamma_1} \partial t_2^{\gamma_2} \dots \partial t_m^{\gamma_m}}, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m).$$

⁷В одномерном случае при $p = 1$ соответствующие результаты принадлежат Бернштейну (см. [12; гл. VI, теорема 3.1]), обобщение на случай $1 < p < 2$ получил Сас (см. [12; гл. VI, теорема 3.10]), в многомерном случае достаточность указанного условия получили Сас и Минакши-сундарам [13] (см. также замечание Бохнера [14]). Неулучшаемость указанного условия гладкости в многомерном случае установил Вейнгер [15].

Легко увидеть, что при $\nu = 0, 1, 2, \dots$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем

$$\|fg\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)} \leq c\|f\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)}\|g\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)},$$

где $c = c(m, \nu, \alpha) > 0$ не зависит от f и g .

Пользуясь этим соотношением, легко проверить, что если $\nu + \alpha \geq 1$, то для всякой вещественной функции $\varphi \in C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)} \leq c|\lambda|^{\nu+\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 1,$$

с константой $c = c(\nu, \alpha, \varphi)$, не зависящей от λ . При $\nu = 1, 2, \dots$ это проверяется индукцией по ν при фиксированном α . Если же $\nu = 0$, то из условия $\nu + \alpha \geq 1$ имеем $\alpha = 1$, и указанная оценка также верна.

Таким образом, ясно, что утверждение теоремы немедленно вытекает из следующей простой леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ и $\nu + \alpha > m(1/p - 1/2)$, $1 \leq p < 2$. Тогда

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \leq c\|f\|_{C^{\nu,\alpha}(\mathbb{T}^m)}^{\tau}\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^m)}^{1-\tau},$$

где

$$\tau = \frac{m(1/p - 1/2)}{\nu + \alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0. Пусть $\delta > 0$ и $\xi \in S^{m-1}$. При каждом $j = 1, 2, \dots, m$ рассмотрим функцию

$$\frac{\partial^\nu f}{\partial t_j^\nu}(t + \delta\xi) - \frac{\partial^\nu f}{\partial t_j^\nu}(t - \delta\xi), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m.$$

Записывая для этой функции равенство Парсеваля, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \left| \frac{\partial^\nu f}{\partial t_j^\nu}(t + \delta\xi) - \frac{\partial^\nu f}{\partial t_j^\nu}(t - \delta\xi) \right|^2 dt = \sum_{k=(k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m} k_j^{2\nu} |\widehat{f}(k)|^2 4 \sin^2(\delta k, \xi).$$

Таким образом,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} k_j^{2\nu} |\widehat{f}(k)|^2 \sin^2(\delta k, \xi) \leq \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^2 \delta^{2\alpha}.$$

Складывая по $j = 1, 2, \dots, m$, имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |k|^{2\nu} |\widehat{f}(k)|^2 \sin^2(\delta k, \xi) \leq c\|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^2 \delta^{2\alpha},$$

где $c = c(\nu, m) > 0$.

Пусть $|k| \leq 1/\delta$. Тогда $|(\delta k, \xi)| \leq 1$, откуда $|\sin(\delta k, \xi)| \geq |(\delta k, \xi)|/2$, и мы видим, что

$$\sum_{|k| \leq 1/\delta} |k|^{2\nu} |\widehat{f}(k)|^2 (\delta k, \xi)^2 \leq c\|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^2 \delta^{2\alpha}.$$

Интегрируя это неравенство по $\xi \in S^{m-1}$ (при $m = 1$ просто полагая $\xi = 1$) и учитывая, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^m$

$$\int_{S^{m-1}} (v, \xi)^2 d\xi = c_m |v|^2,$$

получаем

$$\sum_{|k| \leq 1/\delta} |k|^{2\nu} |\widehat{f}(k)|^2 \delta^2 |k|^2 \leq c \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^2 \delta^{2\alpha}.$$

Полагая $\delta = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, видим, что

$$\sum_{2^{n-1} \leq |k| < 2^n} |\widehat{f}(k)|^2 \leq c \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^2 2^{-2n(\nu+\alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от n и f .

Пользуясь неравенством Гёльдера с $p^* = 2/p$, $1/p^* + 1/q^* = 1$, из соотношения (10) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{2^{n-1} \leq |k| < 2^n} |\widehat{f}(k)|^p &\leq \left(\sum_{2^{n-1} \leq |k| < 2^n} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{2^{n-1} \leq |k| < 2^n} 1 \right)^{1/q^*} \\ &\leq c \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^p 2^{-pn(\nu+\alpha)} (2^{nm})^{1-p/2} = c \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^p 2^{-np(\nu+\alpha)(1-\tau)}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что для произвольного $B \geq 1$ имеем

$$\sum_{|k| \geq B} |\widehat{f}(k)|^p \leq c \|f\|_{C^{\nu,\alpha}}^p B^{-p(\nu+\alpha)(1-\tau)}. \quad (11)$$

Вместе с тем, очевидно, что при $B \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{|k| < B} |\widehat{f}(k)|^p &\leq \left(\sum_{|k| < B} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{|k| < B} 1 \right)^{1/q^*} \\ &\leq \|f\|_{L^2}^p c B^{m(1-p/2)} = c \|f\|_{L^2}^p B^{p(\nu+\alpha)\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Остается сложить соотношения (11), (12), положив в них

$$B = \left(\frac{\|f\|_{C^{\nu,\alpha}}}{\|f\|_{L^2}} \right)^{1/(\nu+\alpha)}.$$

Лемма доказана. Теорема 3, а с ней и теорема 4 доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Beurling, H. Nelson, "Fourier–Stieltjes transforms with bounded powers", *Math. Scand.*, **1** (1953), 120–126.
- [2] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
- [3] В. В. Лебедев, "Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона", *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 103–130.
- [4] З. Л. Лейбензон, "О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье", *УМН*, **9**:3 (1954), 157–162.
- [5] J.-P. Kahane, "Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes", *J. Math. Pures Appl.* (9), **35**:3 (1956), 249–259.
- [6] L. Alpár, "Sur une classe particulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes", *Studia Sci. Math. Hungar.*, **3** (1968), 279–286.
- [7] В. В. Лебедев, "Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона", *Функции, анализ и его прил.*, **36**:1 (2002), 30–35.

- [8] G. W. Hedstrom, “Norms of powers of absolutely convergent Fourier series in several variables”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 493–495.
- [9] М. В. Коробков, “Свойства C^1 -гладких функций, множество значений градиента которых топологически одномерно”, *Докл. РАН*, **430**:1 (2010), 18–20.
- [10] M. Plancherel, G. Pólya, “Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. II”, *Comment. Math. Helv.*, **10**:1 (1937), 110–163.
- [11] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [12] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [13] S. Minakshisundaram, O. Szász, “On absolute convergence of multiple Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**:1 (1947), 36–53.
- [14] S. Bochner, “Reviews of “On absolute convergence of multiple Fourier series” by Szasz and Minakshisundaram”, *Math. Rev.*, **8**:7 (1947), 376.
- [15] S. Weinger, *Special Trigonometric Series in k -Dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., **59**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.

В. В. Лебедев

Московский государственный институт электроники
и математики (технический университет)
E-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило

06.09.2010

Исправленный вариант

04.12.2010