Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Зелениук, Разбиения групп на абсолютно плотные подмножества, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 706–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:44:42

УДК 512.546

РАЗБИЕНИЯ ГРУПП НА АБСОЛЮТНО ПЛОТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Е. Г. Зеленюк

Доказано, что каждую бесконечную абелеву группу с конечным числом элементов порядка 2 можно разбить на два подмножества, плотные в любой неметризуемой групповой топологии и, следовательно, не содержащие смежных классов по бесконечным подгруппам.

Библиография: 8 названий.

Топологическая группа называется *разложимой*, если ее можно разбить на два плотные подмножества. Группа называется *абсолютно разложимой*, если ее можно разбить на два подмножества, плотные в любой неметризуемой групповой топологии. Все топологии предполагаются хаусдорфовыми. *Булевой частью* группы G называется подмножество $B(G)$ всех элементов порядка ≤ 2 . В работе [1] было доказано, что каждая неметризуемая топологическая абелева группа с конечной булевой частью разложима. Этот результат получил дальнейшее развитие в различных направлениях (см. обзор [2]), в том числе и в направлении решения проблемы описания абсолютно разложимых групп, поставленной в [1]. В частности, было доказано, что каждая счетная абелева группа с конечной булевой частью абсолютно разложима [3]. Абелева группа с бесконечной булевой частью не является абсолютно разложимой [4]. Среди групп, вопрос об абсолютной разложимости которых не поддавался решению, особое внимание привлекли к себе несчетные абелевы группы конечной экспоненты, естественно, с конечной булевой частью [5, вопрос 13.46]. Этот интерес в значительной мере связан со следующим обстоятельством. Если оба подмножества, разбивающие бесконечную абелеву группу на две части, абсолютно плотны, то они не содержат смежных классов по бесконечным подгруппам. Для бесконечной абелевой группы конечной экспоненты справедливо и обратное. По теореме Грэхема–Либа–Росчайльда для любого разбиения такой группы на конечное число подмножеств по крайней мере одно из подмножеств разбиения содержит сколь-угодно большие смежные классы по конечным подгруппам [6].

Результаты, полученные в данной статье, таковы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G = \prod \{G_\alpha : \alpha \in \mathfrak{S}\}$ – прямое произведение бесконечного семейства конечных неединичных групп, $G \neq B(G)$. Тогда множество $G \setminus B(G)$ можно разбить на два подмножества G^+ , G^- так, что

$$1) (G^+)^{-1} = G^-;$$

- 2) подмножества G^+ , G^- плотны в любой недискретной топологии на G с непрерывными сдвигами и обращением, в которой $B(G)$ не является окрестностью единицы.

СЛЕДСТВИЕ. Для бесконечной подгруппы G прямого произведения конечных групп следующие условия эквивалентны:

- 1) G не содержит бесконечной булевой подгруппы;
- 2) G абсолютно разложима;
- 3) G можно разбить на два подмножества, не содержащие смежных классов по бесконечным подгруппам.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – бесконечная абелева группа, $G \neq B(G)$. Тогда множество $G \setminus B(G)$ можно разбить на два подмножества G^+ , G^- так, что

- 1) $-G^+ = G^-$;
- 2) подмножества G^+ , G^- плотны в любой недискретной топологии на G с непрерывными сдвигами и обращением, в которой $B(G)$ не является окрестностью нуля.

СЛЕДСТВИЕ. Для бесконечной абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) $B(G)$ конечна;
- 2) G абсолютно разложима;
- 3) G можно разбить на два подмножества, не содержащие смежных классов по бесконечным подгруппам.

Для доказательства сформулированных результатов нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и факты, связанные с ультрафильтрами, в частности, слегка усиленный вариант теоремы Хиндмена о конечных произведениях (предложение 1). Изложим эти сведения вкратце (более подробно см. [7], [8]).

Пусть G – бесконечная группа, βG – чех-стоунова компактификация G как дискретного пространства. Элементами βG являются всевозможные ультрафильтры на G , подмножество главных ультрафильтров отождествляется с G , а базу топологии образуют множества вида $\overline{A} = \{p \in \beta G: A \in p\}$, где $A \subseteq G$. Операция умножения на G естественно продолжается до операции умножения на βG с непрерывными левыми сдвигами на элементы из G и непрерывными правыми сдвигами. Для произвольных ультрафильтров $p, q \in \beta G$ базу ультрафильтра $p \cdot q$ образуют множества вида $\bigcup \{a \cdot B_a: a \in A\}$, где $A \in p$, $B_a \in q$. Продолженная операция остается ассоциативной, превращая таким образом βG в компактную правотопологическую полугруппу с плотным топологическим центром – подмножеством элементов, левые сдвиги на которые непрерывны. Правотопологичность означает непрерывность всех правых сдвигов. Каждая компактная правотопологическая полугруппа содержит идемпотент (теорема Эллиса).

Пусть τ – недискретная топология на G с непрерывными левыми сдвигами. Тогда подмножество τ^* всех неглавных ультрафильтров на G , сходящихся в топологии τ к еди-

нице, является замкнутой подполугруппой в $G^* = \beta G \setminus G$. Она называется *полугруппой ультрафильтров левотопологической группы* (G, τ) . Для произвольного открытого подмножества V в (G, τ) такого, что $e \in \text{cl } V$, подмножество $\tau_V^* = \{p \in \tau^*: V \in p\}$ является замкнутым левым идеалом в τ^* . Пусть τ_0 – предкомпактная групповая топология на G . Тогда τ_0^* содержит все идемпотенты из G^* . Поэтому $\tau_0^* \cap \tau^* \neq \emptyset$, а значит, $U \cap V \neq \emptyset$ для любых окрестностей U, V единицы в топологиях τ_0, τ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – бесконечная группа, p – идемпотент в G^* , $A \in p$, $\{A(a): a \in A\} \subset p$. Для любого разбиения A на конечное число подмножеств найдется бесконечная последовательность $\{a_n: n < \omega\}$ такая, что

- 1) $a_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^n A(a_i)$;
- 2) $\text{FP}\{a_n: n < \omega\} = \{a_{n_0} \cdots a_{n_k}: n_0 < \cdots < n_k, k < \omega\}$ содержится в одном из подмножеств разбиения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – подмножество разбиения A , принадлежащее ультрафильтру p . Выберем $A_0 \in p$ такое, что $\overline{A_0} \cdot p \subset \overline{B}$. А затем выберем $a_0 \in A_0 \cap B$. Предположим, что уже построена последовательность $\{a_i: i \leq n\}$ такая, что

- 1) $a_{i+1} \in \bigcap_{j=0}^i A(a_j)$;
- 2) $H_n = \text{FP}\{a_i: i \leq n\} \subset B$;
- 3) $H_n \cdot p \subset \overline{B}$.

Выберем $B_{n+1} \in p$ такое, что $H_n \cdot \overline{B_{n+1}} \subset \overline{B}$. Затем выберем $A_{n+1} \in p$ такое, что $\overline{A_{n+1}} \cdot p \subset \overline{B_{n+1}}$. А затем выберем $a_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^n A(a_i) \cap B \cap B_{n+1} \cap A_{n+1}$. Тогда условия 1)–3) будут выполняться также и с заменой n на $n+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Каждый элемент $g \in G$ определяет в множестве индексов $\mathfrak{S}$ конечные подмножества

$$\text{Supp}(g) = \{\alpha \in \mathfrak{S}: g(\alpha) \neq e_\alpha\}, \quad \text{supp}(g) = \{\alpha \in \mathfrak{S}: g(\alpha) \notin B(G_\alpha)\}.$$

Пусть $<$ – линейный порядок на $\mathfrak{S}$, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – функция такая, что $f(x) \leq x$. Если $g \in G \setminus B(G)$, $\text{supp}(g) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ и $f(k) = l$, то положим $\pi(g) = g(\alpha_l)$, $\pi'(g) = \alpha_l$. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{S}$ разобьем множество $G_\alpha \setminus B(G_\alpha)$ на подмножества G_α^+, G_α^- так, что $(G_\alpha^+)^{-1} = G_\alpha^-$. Положим

$$G^+ = \{g \in G: \pi(g) \in G_{\pi'(g)}^+\}, \quad G^- = \{g \in G: \pi(g) \in G_{\pi'(g)}^-\}.$$

Очевидно, $\{G^+, G^-\}$ – разбиение $G \setminus B(G)$ и $(G^+)^{-1} = G^-$.

Определим теперь функцию f более конкретно.

ЛЕММА. Пусть $1 = z_1 < z_2 < \cdots$ и $z_{n+1} \geq (2n)^2 z_n$. Тогда существует функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что

- 1) если $x \in [z_{n+1}, z_{n+2})$, то $f(x) \in [z_n, z_{n+1})$;
- 2) если $x \in [z_n, z_{n+1})$, $y \geq z_{n+2}$, $i, j \in [-n, n]$, то $f(x + y + i) \neq f(x) + f(y) + j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию f определим индуктивно. Пусть $z \in [z_{n+2}, z_{n+3})$ и для каждого $x < z$ $f(x)$ уже определено. Определим $f(z)$. Рассмотрим множество Z всех троек вида (x, y, j) , где $x \in [z_k, z_{k+1})$, $y \geq z_{k+2}$, $j \in [-k, k]$, $k \in [1, n]$ и $x + y + i = z$ для некоторого $i \in [-k, k]$. Число всех троек вида (x, y, i) , где $x \in [z_k, z_{k+1})$, $y \geq z_{k+2}$, $i \in [-k, k]$, $k \in [1, n]$ и $x + y + i = z$, не превышает числа всех пар вида (x, i) , где $x \in [z_k, z_{k+1})$, $i \in [-k, k]$, $k \in [1, n]$, которое в свою очередь не превышает $(2n + 1)z_{n+1}$. Следовательно, $|Z| \leq (2n + 1)^2 z_{n+1}$. Поскольку

$$z_{n+2} - z_{n+1} \geq ((2n + 2)^2 - 1)z_{n+1} > (2n + 1)^2 z_{n+1},$$

в целочисленном отрезке $[z_{n+1}, z_{n+2})$ можно выбрать число $f(z)$, отличное от чисел вида $f(x) + f(y) + j$, где $(x, y, j) \in Z$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Пусть f – функция, предоставляемая леммой, τ – произвольная недискретная топология на G с непрерывными сдвигами и обращением, в которой $B(G)$ не является окрестностью e , $g \in G$, U – открытая симметричная окрестность e , $V = U \setminus B(G)$. Подмножество V открыто в (G, τ) и $e \in \text{cl } V$. Нам достаточно найти элемент $h \in V$ такой, что $\text{Supp}(g) \cap \text{Supp}(h) = \emptyset$ и $\pi'(g \cdot h) \in \text{supp}(h)$. Тогда элементы $g \cdot h, g \cdot h^{-1} \in g \cdot U$ будут принадлежать различным подмножествам разбиения $\{G^+, G^-\}$ и, следовательно, плотность этих подмножеств в топологии τ будет доказана. Предположим, что такого элемента h не существует. Пусть p – идемпотент в полугруппе τ_V^* , τ_0 – обычная топология прямого произведения на G . Поскольку топология τ_0 предкомпактна, то $p \in \tau_0^*$, а значит,

$$A = \{a \in V : \text{Supp}(a) \cap \text{Supp}(g) = \emptyset\} \in p, \\ A(a) = \{b \in A : \text{Supp}(b) \cap \text{Supp}(a) = \emptyset\} \in p, \quad a \in A.$$

В силу нашего предположения $g \in G \setminus B(G)$ и подмножества $A_i = \{a \in A : \pi'(g \cdot a) = \alpha_i\}$, $i = 1, \dots, k$, где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} = \text{supp}(g)$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$, образуют разбиение A . Следовательно, одно из этих подмножеств, скажем A_j , принадлежит ультрафильтру p . Используя предложение 1, выберем последовательность $\{a_n : n < \omega\}$ такую, что $\text{Supp}(a_n) \cap \text{Supp}(a_m) = \emptyset$, если $n \neq m$, и $H = \text{FP}\{a_n : n < \omega\} \subseteq A_j$. Затем выберем в H элемент u такой, что $x = |\text{supp}(g \cdot u)| \geq z_k$. Пусть $x \in [z_n, z_{n+1})$. А затем выберем в H элемент v такой, что $\text{Supp}(v) \cap \text{Supp}(u) = \emptyset$ и $y = |\text{Supp}(g \cdot v)| \geq z_{n+2}$. Тогда $|\text{Supp}(g \cdot u \cdot v)| = x + y - k$ и $\pi'(guv) = \pi'(gu) = \pi'(gv) = \alpha_j$. Посчитаем, каким по порядку будет индекс α_j в множестве $\text{Supp}(guv)$, и получим $f(x + y - k) = f(x) + f(y) - j$; противоречие.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с учетом следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – бесконечная абелева группа, снабженная наибольшей предкомпактной групповой топологией, $\gamma = |G|$, $\bigoplus_\gamma \mathbb{Z}(4)$ – прямая сумма γ

копий циклической группы 4-го порядка, снабженная обычной топологией прямой суммы. Тогда существует непрерывная инъекция $\varphi: G \rightarrow \bigoplus_{\gamma} Z(4)$ такая, что

- 1) $\varphi(-g) = -\varphi(g)$ для любого $g \in G$;
- 2) $\varphi(g+h) = \varphi(g) + \varphi(h)$, если $\overline{\text{Supp}(\varphi(g))} \cap \overline{\text{Supp}(\varphi(h))} = \emptyset$, $g, h \in G$, где $\overline{\text{Supp}(\varphi(g))} = \{\alpha + 1: \alpha \in \text{Supp}(\varphi(g))\} \cup \text{Supp}(\varphi(g))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай

$$G = \bigoplus_{\alpha < \gamma} G_{\alpha}, \quad |G_{\alpha}| = |B(G_{\alpha})| = |G_{\alpha}: B(G_{\alpha})| = \omega.$$

Каждую группу G_{α} снабдим предкомпактной групповой топологией. В любой окрестности нуля G_{α} имеются как элементы порядка 2, так и элементы порядка > 2 . Это позволяет построить аналогично доказательству теоремы 1 из [3] непрерывную биекцию $\varphi_{\alpha}: G_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\omega} Z(4)$, удовлетворяющую условиям 1), 2) нашего предложения. Положим

$$\varphi = \bigoplus_{\alpha < \gamma} \varphi_{\alpha}: G = \bigoplus_{\alpha < \gamma} G_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha < \gamma} \left(\bigoplus_{[\alpha, \alpha + \omega)} Z(4) \right) = \bigoplus_{\gamma} z(4).$$

Доказательства следствий из теорем 1, 2 аналогичны, только второе проще. Поэтому ограничимся доказательством первого следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ 1. 1) $\implies$ 2). Пусть τ – произвольная неметризуемая групповая топология на G (или даже неметризуемая топология с непрерывными сдвигами и обращением). По теореме 1 достаточно убедиться, что $B(G)$ не является окрестностью единицы (G, τ) . Допустим противное. Пусть τ_0 – топология на G , индуцированная топологией прямого произведения. Поскольку $\tau_0^* \cap \tau^* \neq \emptyset$, то в $B(G) \setminus \{e\}$ можно выбрать последовательность $\{b_n: n < \omega\}$ такую, что $\text{Supp}(b_n) \cap \text{Supp}(b_m) = \emptyset$, если $n \neq m$. Но тогда $\langle b_n: n < \omega \rangle$ – бесконечная булева подгруппа в G ; противоречие.

2) $\implies$ 3). Рассмотрим произвольное разбиение G на два абсолютно плотные подмножества. Убедимся, что они не содержат смежных классов по бесконечным подгруппам. Допустим противное – одно из них содержит смежный класс S по бесконечной подгруппе H . Выберем в $H \setminus \{e\}$ последовательность $\{a_n: n < \omega\}$ такую, что $\text{Supp}(a_n) \cap \text{Supp}(a_m) = \emptyset$, если $n \neq m$. Тогда подгруппы $\langle a_n: n \geq m \rangle$, $m < \omega$, образуют базу окрестностей единицы групповой топологии на G . В этой топологии подмножество разбиения, не содержащее S , не плотно; противоречие.

3) $\implies$ 1). Эта импликация следует из булевого варианта теоремы Хиндмена. Для любого разбиения бесконечной булевой группы на конечное число подмножеств по крайней мере одно из подмножеств разбиения содержит смежные классы по бесконечным подгруппам.

Завершим статью несколькими вопросами.

Вопрос 1. Группа называется *абсолютно ω -разложимой*, если ее можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной групповой топологии. Счетная абелева группа с конечной булевой частью абсолютно ω -разложима. Верно ли, что каждая бесконечная абелева группа с конечной булевой частью абсолютно ω -разложима?

Вопрос 2. Бесконечную булеву подгруппу B группы G назовем *почти центральной*, если в B существует базис A со следующим свойством: для любого элемента $g \in G$ найдется конечное подмножество $K \subset A$ такое, что подмножество $A \setminus K$ содержится в централизаторе элемента g . Группа, содержащая бесконечную почти центральную булеву подгруппу, не является абсолютно разложимой. Верно ли, что каждая бесконечная группа, не содержащая бесконечной почти центральной булевой подгруппы, абсолютно разложима?

Вопрос 3. Верно ли, что каждую бесконечную группу, не содержащую бесконечной булевой подгруппы, можно разбить на два подмножества, не содержащие смежных классов по бесконечным подгруппам?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Comfort W. W., van Mill J. Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. № 3. P. 687–696.
- [2] Протасов И. В. Разложимость групп // Математичні студії. 1998. Т. 9. С. 130–148.
- [3] Зеленюк Е. Г. Разложимость топологических групп // Укр. матем. ж. 1999. Т. 51. № 1. С. 41–47.
- [4] Протасов И. В. Абсолютно разложимые группы // Укр. матем. ж. 1996. Т. 48. № 3. С. 383–392.
- [5] Нерешенные вопросы теории групп // Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики, 1995.
- [6] Грэхем Р. Начало теории Рамсея. М.: Мир, 1984.
- [7] Hindman N., Strauss D. Algebra in the Stone–Čech compactification—theory and applications. Berlin: de Gruyter, 1998.
- [8] Протасов И. В. Ультрафильтры и топологии на группах // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 5. С. 163–180.

Институт прикладных проблем механики и математики
НАН Украины им. Я. С. Пидстригача, г. Львов

Поступило
19.04.1999