Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Быстрое убывание целых функций по вещественной оси и единственность пары Фурье, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 302–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:46:55

Быстрое убывание целых функций по вещественной оси и единственность пары Фурье

А. М. Седлецкий

Изучаются интегральные классы целых функций, быстро убывающих по вещественной оси, т.е. классы целых функций, быстрое убывание которых по вещественной оси задается существованием определенных весовых интегралов. Установлена связь этих классов с известными ранее классами, в которых убывание функций по вещественной оси задается равномерными оценками. В качестве приложения получена конкретная реализация (опять же в интегральном смысле) известного тезиса Винера о том, что “пара f и $\hat{f}$ не может быть очень мала на бесконечности”.

Библиография: 12 названий.

1. Классы целых функций, быстро убывающих по вещественной оси.

Развитие теории обобщенных функций, новые постановки задач квазианалитичности, а также некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений в свое время стимулировали значительный интерес к различным классам целых функций, быстро убывающих по вещественной оси. Основное внимание при их изучении уделялось отысканию условий их нетривиальности и описанию классов соответствующих преобразований Фурье. В качестве характерных и содержательных источников по этой тематике отметим выпуски Гельфанда и Шилова [1], [2] и работу Бабенко [3].

Пусть теперь и всюду в дальнейшем $\alpha > 1$, $a_{\pm}, b_{\pm} > 0$, $z = x + iy$, а $l(t)$ – медленно меняющаяся функция, ограниченная на каждом отрезке вида $[0, A]$, $A > 0$. Под влиянием перечисленных работ, а также статьи Залика [4], автором [5] были рассмотрены следующие классы целых функций: $Z_{\alpha} = Z_{\alpha}(a_{\pm}, b_{\pm}, l(t))$ и $W_{\alpha} = W_{\alpha}(a_{\pm}, b_{\pm}, l(t))$.

По определению класс Z_{α} состоит из всех целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ выполняются оценки

$$f(x) = O(\exp((-a_{+(-)} + \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|))), \quad x > 0 \quad (x < 0), \quad (1)$$

$$f(z) = O(\exp((b_{+(-)} + \varepsilon)|y|^{\alpha}l(|y|))), \quad y > 0 \quad (y < 0). \quad (2)$$

Класс W_{α} состоит из всех целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$f(z) = O(\exp((-a_{\pm} + \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|) + (b_{\pm} + \varepsilon)|y|^{\alpha}l(|y|))), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-225-а).

где константа a_+ (a_-) отвечает значениям $x > 0$ ($x < 0$), а константа b_+ (b_-) – значениям $y > 0$ ($y < 0$); таким образом, условие (3) состоит из четырех неравенств, каждое из которых относится к определенной четверти комплексной плоскости.

В статье [5] были найдены условия нетривиальности классов Z_α , W_α и описаны классы соответствующих преобразований Фурье. Кроме того, в [5] были даны применения результатов о классах Z_α к (тематически идущей от теоремы Моргана [6]) конкретной реализации известного тезиса Винера о том, что “пара функций f и $\hat{f}$ не может быть очень малой на бесконечности”. (Здесь и далее $\hat{f}$ есть преобразование Фурье функции f .)

Имея в виду приложения в указанном направлении, в настоящей статье мы изучаем *интегральные классы* целых функций, быстро убывающих по вещественной оси, т.е. классы целых функций, быстрое убывание которых по вещественной оси задается существованием определенных весовых интегралов.

Пусть $0 < p, q \leq \infty$. Класс $Z_\alpha^{p,q} = Z_\alpha^{p,q}(a_\pm, b_\pm, l(t))$ определим как класс всех целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\exp((a_\pm - \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|))|f(x)| \in L^p(\mathbb{R}_\pm), \quad (4)$$

$$\exp(-(b_\pm + \varepsilon)|y|^\alpha l(|y|))|f(x + iy)| \in L^q(\mathbb{R}_\pm^2), \quad (5)$$

где $\mathbb{R}_\pm^2 = ((x, y) : y \gtrless 0)$. В силу принятых обозначений

$$Z_\alpha = Z_\alpha^\infty.$$

Класс $W_\alpha^p = W_\alpha^p(a_\pm, b_\pm, l(t))$ по определению состоит из всех целых функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(p((a_\pm - \varepsilon)|x|^\alpha l(|x|) - (b_\pm + \varepsilon)|y|^\alpha l(|y|)))|f(x + iy)|^p dx dy < +\infty, \quad (6)$$

где a_+ (a_-) отвечает части интеграла, соответствующей правой (левой) полуплоскости $x > 0$ ($x < 0$), а b_+ (b_-) – части интеграла, соответствующей верхней (нижней) полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$). Условие (6), подобно (3), состоит из четырех условий, относящихся к определенным четвертям плоскости.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. 1) При всех $\alpha > 1$ и $p, q \in (0, \infty]$

$$Z_\alpha^{p,q} = Z_\alpha.$$

2) При всех $\alpha > 1$ и $p \in (0, +\infty)$

$$W_\alpha^p = W_\alpha.$$

2. Доказательство теоремы 1. Утверждения теоремы 1 будут следствиями следующих трех предложений, в которых $0 < p, q \leq \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Условие (5) влечет условие (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $q < \infty$. Достаточно рассмотреть случай верхней полуплоскости $y > 0$.

Фиксируем $z_0 = x_0 + iy_0$. Обозначим $K_0 = (z : |z - z_0| < 1)$. В силу субгармоничности функции $|f(z)|^p$ имеем

$$|f(z)|^q \leq \frac{1}{\pi} \iint_{K_0} |f(x + iy)|^q dx dy. \quad (7)$$

На всем протяжении этого пункта пусть

$$\varphi(t) = t^\alpha l(t), \quad t > 0.$$

Нам понадобится следующая промежуточная оценка

$$\exp(-q(b_+ + \varepsilon)\varphi(y_0)) \leq M \exp\left(-q\left(b_\pm + \frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(|y|)\right), \quad y_0 > 0, \quad z \in K_0, \quad y \geq 0. \quad (8)$$

Докажем ее. Для медленно меняющейся функции $l(t)$ верно свойство

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty,$$

равномерное относительно $\lambda \in (\varepsilon, 1/\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. [7]). Поэтому если $H > 0$ достаточно велико, то при $y_0 \geq H$ будем иметь

$$\exp(-q(b_+ + \varepsilon)\varphi(y_0)) \leq \exp\left(-q\left(b_+ + \frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(y)\right), \quad z \in K_0. \quad (9)$$

Если же $0 < y_0 < H$, то ввиду ограниченности функции $l(t)$ на каждом отрезке вида $[0, A]$, $A > 0$, оценка (8) верна с подходящей константой M (мы учли, что при $0 < y < 1$ часть круга K_0 находится в нижней полуплоскости). Сравнивая это с (9), видим, что оценка (8) верна для всех $y_0 > 0$.

Теперь умножим подынтегральную функцию в (7) на экспоненту из правой части (8). С использованием оценки (8) получим, что при любом z_0 таком, что $y_0 > 0$, выполнено

$$\begin{aligned} & \exp(-q(b_+ + \varepsilon)\varphi(y_0)) |f(z)|^q \\ & \leq \frac{M}{\pi} \iint_{K_0} \exp\left(-q\left(b_\pm + \frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(|y|)\right) |f(z)|^q dx dy < \frac{M}{\pi} \iint_{y > -1} < \infty \end{aligned}$$

в силу предполагаемого условия (5). Это означает, что оценка (2) верна. Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Условия (2) и (4) влекут условие (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $p < \infty$. В условиях (1)–(6) присутствует произвольное $\varepsilon > 0$, поэтому данные условия не изменятся, если функцию $l(t)$ заменить на функцию, эквивалентную ей при $t \rightarrow +\infty$. И так как для медленно меняющейся функции $l(t)$ найдется эквивалентная ей медленно меняющаяся функция $l_1(t)$ со свойством $tl'_1(t) = o(l_1(t))$, $t \rightarrow +\infty$ (см. [7]), то мы с самого начала можем считать, что

$$tl'_1(t) = o(l(t)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из свойства $\log l(t) = o(\log t)$, $t \rightarrow +\infty$, медленно меняющейся функции следует, что функция $\alpha(r)$, заданная соотношением

$$r^{\alpha(r)} = r^{\alpha} l(r), \quad r > r_0,$$

является *уточненным порядком*, т.е. (см. [8])

$$\alpha(r) \rightarrow \alpha, \quad r\alpha'(r) \log r \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Оценка (2) показывает, что тип

$$\sigma_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \max(|f(z)| : |z| = r)}{r^{\alpha} l(r)}$$

целой функции $f(z)$ по отношению к уточненному порядку $\alpha(r)$ (в терминологии Левина [8]) или, что то же, к точному порядку $r^{\alpha} l(r)$ (в терминологии Евграфова [9]) конечен, т.е. $0 \leq \sigma_f < \infty$. Пусть $h_f(\theta)$ – *обобщенный индикатор* функции $f(z)$, т.е.

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^{\alpha} l(r)}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Оценка (1) будет гарантирована, если мы покажем, что

$$h_f(0) \leq -a_+, \quad h_f(\pi) \leq -a_-. \quad (10)$$

Достаточно доказать первое из этих неравенств.

Предположим противное:

$$h_f(0) = -a_+ + \gamma, \quad \gamma > 0 \quad (11)$$

и применим следующую теорему Бернштейна [8].

Если тип σ_f целой функции $f(z)$ по отношению к уточненному порядку $\alpha(r)$ конечен, то для любых $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\omega \in (0, 1)$ найдется последовательность интервалов $I_n = (r_n, (1 + \delta)r_n)$, $r_n \rightarrow +\infty$, таких, что неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \geq \exp((h_f(\theta) - \varepsilon)r^{\alpha(r)}) = \exp((h_f(\theta) - \varepsilon)r^{\alpha} l(r)) \quad (12)$$

верно на каждом из этих интервалов, кроме, быть может, множеств $G_n \subset I_n$, таких, что $\text{mes } G_n \leq \omega \delta r_n$. (Стоит отметить, что в [8] эта теорема формулируется для целых функций уточненного порядка (т.е. когда $\sigma_f > 0$), но анализ доказательства показывает, что оно верно и для случая $\sigma_f = 0$, что равносильно $h_f(\theta) \equiv 0$.)

Положим $\theta = 0$, $\varepsilon = \gamma/2$ и обозначим $D_n = I_n \subset G_n$. Тогда

$$\text{mes } D_n \geq \delta(1 - \omega)r_n.$$

Из (11) и (12) получаем, что

$$|f(x)| \geq \exp\left(\left(-a_+ + \frac{\gamma}{2}\right)x^{\alpha} l(x)\right), \quad x \in \bigcup D_n. \quad (13)$$

Можно считать, что интервалы I_n не пересекаются. Тогда из (13) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(p\left(a_+ - \frac{\gamma}{2}\right)x^{\alpha} l(x)\right) |f(x)|^p dx > \int_{\bigcup D_n} > \sum \text{mes } D_n = +\infty.$$

А это противоречит свойству (4). Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Условия (1) и (2) влекут условие (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова мы считаем, что $q < \infty$. При выполнении условий (1), (2) достаточно проверить конечность той части интеграла в (5), которая отвечает верхней полуплоскости (случай нижней полуплоскости рассматривается аналогично).

Как уже отмечалось в доказательстве предложения 2, следствием оценки (2) является конечность типа функции $f(z)$ при обобщенном порядке $\alpha(r)$. А условие (1) показывает, что для обобщенного индикатора $h_f(\theta)$ функции $f(z)$ имеют место условия (10). Так как $a_{\pm} > 0$, то отсюда в силу непрерывности обобщенного индикатора следует существование $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ и $\Delta_1 > 0$ таких, что в углах $|\theta| \leq \theta_0$ и $|\pi - \theta| \leq \theta_0$ верно неравенство

$$h_f(\theta) \leq -\Delta_1.$$

Значит, в этих углах справедлива оценка

$$f(z) = O(\exp(-\Delta r^{\alpha}l(r))), \quad \Delta > 0. \quad (14)$$

Теперь, записывая

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^q dx = \int_{|x| < ky} |f(x + iy)|^q dx + \int_{|x| > ky} |f(x + iy)|^q dx, \quad y > 0,$$

где $k = \operatorname{ctg} \theta_0$, и применяя для оценки слагаемых в правой части оценки (2) и (14) соответственно, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^q dx &= O(|y| \exp(q(b_+ + \varepsilon)y^{\alpha}l(y))) + O(1) \\ &= O(\exp(q(b_+ + 2\varepsilon)y^{\alpha}l(y))), \quad y > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \exp(-q(b_+ + 3\varepsilon)\varphi(y)) |f(x + iy)|^q dx dy \leq C_3 \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-q\varepsilon\varphi(y)) dy < +\infty,$$

и условие (5) имеет место. Предложение 3 верно.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Пусть $f \in Z_{\alpha}^{pq}$. Это означает, что выполнены условия (4) и (5). По предложению 1 выполняется условие (2). Теперь по предложению 2 выполняется условие (1). Значит, $f \in Z_{\alpha}$, и мы получили, что $Z_{\alpha}^{pq} \subset Z_{\alpha}$.

Пусть теперь $f \in Z_{\alpha}$. Из условия (1) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ сразу следует условие (4). Условие (5) выполняется по предложению (3). Значит, $f \in Z_{\alpha}^{pq}$, т.е. верно и обратное вложение $Z_{\alpha} \subset Z_{\alpha}^{pq}$. Утверждение 1) доказано.

2) Сначала убедимся, что $W_{\alpha}^p \subset W_{\alpha}$. Пусть $f \in W_{\alpha}^p$, т.е. выполнено условие (6). Достаточно доказать оценку (3) для четверти плоскости ($z = x + iy : x, y > 0$).

Мы уже имеем оценку (8). Совершенно аналогично доказывается оценка

$$\exp(p(a_+ - \varepsilon)\varphi(x_0)) \leq M \exp\left(p\left(a_{\pm} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(|x|)\right), \quad x \geq 0, \quad z \in K_0. \quad (15)$$

(Мы снова должны помнить, что при $0 < x_0 < 1$ часть круга K_0 лежит в левой полуплоскости.)

Умножим подынтегральную функцию в (7) последовательно на экспоненты, находящиеся в правых частях (8) и (15). После чего применим оценки (8) и (15). В обозначении

$$g(x, y, \varepsilon) := \exp(p((a_{\pm} - \varepsilon)\varphi(x) - (b_{\pm} + \varepsilon)\varphi(y)))$$

для $x, y > 0$ будем иметь

$$g(x_0, y_0; \varepsilon)|f(z_0)|^p \leq M_1 \iint_{K_0} g\left(|x|, |y|; \frac{\varepsilon}{2}\right) |f(x_0 + iy_0)|^p dx dy < M_1 \iint_{x, y > -1} < \infty$$

в силу условия (6). Это дает условие (3), и мы доказали вложение $W_{\alpha}^p \subset W_{\alpha}$.

Обратное вложение $W_{\alpha} \subset W_{\alpha}^p$ очевидно, так как из условия (3), в котором следует заменить ε на $\varepsilon/2$, сразу вытекает условие (6) принадлежности классу W_{α}^p . Утверждение 2) верно. Теорема 1 доказана.

3. Единственность пары Фурье. Пусть положительная функция $\varphi(t)$, $t > 0$, растет быстрее любой линейной функции. Тогда через $\varphi^*(x)$, $x > 0$, обозначаем функцию, двойственную с φ по Юнгу, т.е.

$$\varphi^*(x) = \sup(xt - \varphi(t) : t > 0).$$

Из определения следует, что если

$$\varphi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\alpha},$$

то

$$\varphi^*(x) = \frac{x^{\beta}}{\beta}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

А из теории правильно меняющихся функций [7] следует, что для любой медленно меняющейся функции $l(t)$ найдется асимптотически единственная медленно меняющаяся функция $l_{\beta}(x)$ такая, что

$$\varphi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\alpha} l(t),$$

откуда

$$\varphi^*(x) \sim \frac{x^{\beta}}{\beta} l_{\beta}(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

В дальнейшем обозначение $l_{\beta}(x)$ будем понимать именно в таком качестве. Число β понимается в только что введенном смысле.

Пусть всюду в дальнейшем

$$s_{\beta} = \begin{cases} \left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right|^{-1}, & 1 < \beta \leq 2, \\ \left(\sin \frac{\pi}{2(\beta-1)} \right)^{1-\beta}, & \beta \geq 2. \end{cases}$$

В статье [5] с помощью полученных там результатов о классах Z_{α} доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Для того, чтобы для любой функции f , удовлетворяющей условию

$$f(x) = O(\exp((-a_{\pm} + \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0), \quad \varepsilon > 0, \quad (17)$$

$$\widehat{f}(x) = O(\exp((-A_{\pm} + \varepsilon)|x|^{\beta}l_{\beta}(|x|))), \quad x > 0 \ (x < 0), \quad \varepsilon > 0, \quad (18)$$

где $\alpha > 1$, $a_{\pm}, A_{\pm} > 0$, выполнялось свойство $f = \widehat{f} \equiv 0$, необходимо, а в случаях

$$1 < \alpha \leq 2, \quad a_{+} = a_{-}, \quad \alpha \geq 2, \quad A_{+} = A_{-} \quad (19)$$

и достаточно, чтобы

$$\max(a_{+}, a_{-})^{\beta-1} \max(A_{+}, A_{-}) > \frac{1}{\beta \alpha^{\beta-1} s_{\beta}}. \quad (20)$$

Теорема А является расширением и обращением известной теоремы Моргана [6], утверждение которой есть достаточная часть теоремы А при $l(t) = l_{\beta}(t) \equiv 1$, $a_{+} = a_{-}$, $A_{+} = A_{-}$, $\alpha > 2$.

С помощью теоремы 1 и результатов статьи [5] мы сейчас получим интегральную версию теоремы А.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 1$, $a_{\pm}, A_{\pm} > 0$, а $0 < p, q \leq \infty$, причем хотя бы одно из чисел p, q не меньше единицы. Тогда для того, чтобы для любой функции f , удовлетворяющей условиям

$$\exp((a_{\pm} - \varepsilon)|x|^{\alpha}l(|x|))f(x) \in L^p(\mathbb{R}_{\pm}), \quad \varepsilon > 0, \quad (21)$$

$$\exp((A_{\pm} - \varepsilon)|x|^{\beta}l_{\beta}(|x|))\widehat{f}(x) \in L^q(\mathbb{R}_{\pm}), \quad \varepsilon > 0, \quad (22)$$

выполнялось свойство $f = \widehat{f} \equiv 0$, необходимо, а в случаях (19) и достаточно, чтобы выполнялось условие (20).

Введем величину

$$K(\beta, t) = \frac{1}{\beta}(\alpha t)^{1-\beta}, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \quad t > 0. \quad (23)$$

Для доказательства теоремы 2 понадобится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $a > 0$, $p' \in [1, +\infty]$. Тогда

$$\|E\|_{p'} := \|\exp(yt - (a - \varepsilon)t^{\alpha}l(t))\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_{+})} = O(\exp((K(\beta, a) + \gamma)|y|^{\beta}l_{\beta}(|y|))), \quad y > 0, \quad (24)$$

где

$$\gamma \rightarrow +0, \quad \text{если} \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad \gamma = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p' = \infty$. Тогда

$$\|E\|_{\infty} = \sup_{t>0} \exp(yt - (a - \varepsilon)t^{\alpha}l(t)) = \exp(\varphi_{\varepsilon}^{*}(|y|)), \quad (25)$$

где

$$\varphi_{\varepsilon}(t) = (a - \varepsilon)t^{\alpha}l(t), \quad t > 0. \quad (26)$$

Используя сначала вытекающее из определения свойство

$$(\lambda\varphi)^*(x) = \lambda\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

а затем соотношение (16), получаем, что

$$\varphi(t) = \lambda t^\alpha l(t),$$

откуда

$$\varphi^*(x) \sim \frac{1}{\beta}(\alpha\lambda)^{1-\beta} x^\beta l_\beta(x) = K(\beta, \lambda) x^\beta l_\beta(x). \quad (27)$$

Так как $\beta > 1$, то формула (23) показывает, что

$$K(\beta, a - \varepsilon) \leq K(\beta, a) + \gamma, \quad \gamma = \gamma(\varepsilon) \rightarrow +0, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (28)$$

причем в случае $\varepsilon = 0$ здесь имеет место знак равенства с $\gamma = 0$. Применим свойство (27) и неравенство (28) к функции φ_ε . Получим, что больших y

$$\varphi_\varepsilon^*(y) \leq (K(\beta, a) + \gamma) y^\beta l_\beta(y), \quad (29)$$

где

$$\gamma \rightarrow +0, \quad \text{если} \quad \varepsilon = \gamma(\varepsilon) \rightarrow +0, \quad \gamma = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0.$$

Подставляя это в (24), видим, что в случае $p' = \infty$ оценка (24) верна при достаточно больших y .

Если же $p' < \infty$, то

$$\begin{aligned} \|E\|_{p'}^{p'} &= \int_{\mathbb{R}_+} \exp((p'yt - (a - \varepsilon)t^\alpha l(t))) dt \\ &\leq C_\varepsilon \sup_{t>0} \exp(p'(yt - (a - 2\varepsilon)t^\alpha l(t))) = C_\varepsilon \exp(p'\varphi_{2\varepsilon}^*(y)), \quad y > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу (29) это означает, что оценка (24) верна и для $1 \leq p' < \infty$, если $y > y_0 > 0$.

Очевидно, что в обоих случаях $p' = \infty$ и $p' < \infty$ рассматриваемая норма ограничена при $0 < y \leq y_0$. В итоге мы полностью получаем оценку (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть для определенности $p \in [1, \infty]$. Оценим преобразование Фурье

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

функции f . Часть интеграла, отвечающая полупрямой $\mathbb{R}_\pm$, ограничена в полуплоскости $y \leq 0$. Поэтому, применяя условие (21) и полагая $1/p + 1/p' = 1$, по неравенству Гёльдера имеем

$$|\widehat{f}(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{|y||t|} |f(t)| dt \leq C \|f\|_p \cdot \|\exp(|y|t - (a_\pm - \varepsilon)t^\alpha l(t))\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+)}, \quad y \geq 0.$$

Значит, по предложению 4

$$\widehat{f}(z) = O(\exp(K(\beta, a_\pm) + \varepsilon)|y|^\beta l_\beta(|y|))), \quad y \geq 0, \quad \text{при любом} \quad \varepsilon > 0.$$

А эта оценка вместе с условием (22) показывает, что если функция f удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$\widehat{f} \in Z_\beta^{q\infty}(A_\pm, K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)).$$

Но по теореме 1

$$Z_\beta^{q\infty}(A_\pm, K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)) = Z_\beta(A_\pm, K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)),$$

и, значит, если мы обозначим через M класс преобразований Фурье всех функций f , удовлетворяющих условиям теоремы 2, то

$$M \subset Z_\beta(A_\pm, K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)). \quad (31)$$

Пусть $\widehat{Z}_\alpha$ обозначает класс преобразований Фурье всех функций класса Z_α . В [5] доказано, что

$$\widehat{Z}_\alpha(a_\pm, b_\pm, l(t)) = Z_\beta(K(\beta, b_\mp), K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)).$$

Значит, если мы положим

$$A_\pm = K(\beta, b_\mp)$$

(из (23) следует, что это соотношение разрешимо относительно $b_\pm$), то окажется, что любая функция класса

$$Z_\beta(A_\pm, K(\beta, a_\pm), l_\beta(t)) \quad (32)$$

будет преобразованием Фурье некоторой функции f класса

$$Z_\alpha(a_\pm, b_\pm, l(t)),$$

совпадающего по теореме 1 с классом

$$Z_\alpha^{p\infty}(a_\pm, b_\pm, l(t)). \quad (33)$$

По определению этого класса для f выполнено условие (21). Условие (22) выполнено по определению класса (32). Вместе с (31) это показывает, что класс (32) есть класс преобразований Фурье всех функций f , удовлетворяющих условиям теоремы 2. Следовательно, условие $f = \widehat{f} \equiv 0$ равносильно тривиальности класса (32).

В [5] доказан следующий результат. Для нетривиальности класса (33) достаточно, а если $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ или $\alpha \geq 2$, $b_+ = b_-$, то и необходимо выполнение условия

$$\min b_\pm \geq s_\alpha \max a_\pm.$$

Значит, для тривиальности класса (32) необходимо, а при $1 < \beta \leq 2$, $A_+ = A_-$ или $\beta \geq 2$, $a_+ = a_-$ (т.е. при $1 < \alpha \leq 2$, $a_+ = a_-$ или $\alpha \geq 2$, $A_+ = A_-$) и достаточно, чтобы

$$\min K(\beta, a_\pm) < s_\beta \max A_\pm.$$

А это в силу формулы (23) и есть условие (20). Теорема 2 доказана.

В связи с теоремой А процитируем следующий результат Бёрлинга [10] (см. также [11] и [12]).

ТЕОРЕМА В. Пусть φ, φ^* – двойственные по Юнгу, выпуклые функции на прямой. Предположим, что выполнены условия

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| \exp(\varphi(t)) dt < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)| \exp(\varphi^*(x)) dx < \infty.$$

Тогда $f \equiv 0$.

Функция φ^* , двойственная по Юнгу с функцией $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определяется так:

$$\varphi^*(\pm x) = \varphi_{\pm}^*(\pm x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $\varphi_{\pm}$ – сужения функции φ соответственно на $\mathbb{R}_{\pm}$, а для них функция, двойственная по Юнгу, определена в начале п. 3.

Пусть функция $l_{\beta}^*(x)$, $x > 0$, такова, что

$$\varphi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\alpha} l(t), \quad t > 0,$$

откуда

$$\varphi^*(x) = \frac{x^{\beta}}{\beta} l_{\beta}^*(x), \quad x > 0.$$

Из (16) следует, что $l_{\beta}^*(t)$ – медленно меняющаяся функция, эквивалентная функции $l_{\beta}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть

$$\varphi(t) = a_{\pm} |t|^{\alpha} l(|t|), \quad t \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (34)$$

В обозначениях (26)

$$\varphi_{\pm}(t) = \varphi_0(\pm t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Далее, если в (27) заменить $l_{\beta}(x)$ на $l_{\beta}^*(x)$, то в (29) будет иметь место знак равенства с той же заменой и с $\varepsilon = \gamma = 0$. Значит,

$$\varphi^*(x) = K(\beta, a_{\pm}) |x|^{\beta} l_{\beta}^*(|x|), \quad x \in \mathbb{R}_{\pm},$$

Соответствующий функции (34) частный случай теоремы В заслуживает того, чтобы быть отмеченным.

СЛЕДСТВИЕ С. Пусть функция $t^{\alpha} l(t)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$. Предположим, что выполнены условия

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} |f(t)| \exp(a_{\pm} |t|^{\alpha} l(|t|)) dt < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}_{\pm}} |\widehat{f}(x)| \exp(A_{\pm} |x|^{\beta} l_{\beta}^*(|x|)) dx < \infty, \quad (35)$$

где $\alpha > 1$, $a_{\pm}, A_{\pm} > 0$. Тогда если

$$A_{\pm} \geq K(\beta, a_{\pm}), \quad (36)$$

то $f \equiv 0$.

Закончим несколькими комментариями в плане сравнения следствия С с теоремой 2.

Условия (35) диктуют несколько более сильное убывание f и $\widehat{f}$ по сравнению с условиями (21) и (22), что в конечном счете и привело к нестрогому неравенству (36), в отличие от строгого неравенства (20), которое может быть записано в виде

$$\max A_{\pm} > \frac{1}{s_{\beta}} \min K(\beta, a_{\pm}). \quad (37)$$

Стоит отметить, что ввиду присутствия в условии (22) произвольного $\varepsilon > 0$, в этом условии функции $l_{\beta}(t)$, $l_{\beta}^*(t)$ взаимозаменяемы; чего не скажешь о втором условии (35). Действительно, так как $l_{\beta}^*(t) = l_{\beta}(t)(1 + o(1))$, $t \rightarrow \infty$, то возможность указанной замены зависит от скорости стремления к нулю величины $o(1)$.

Если в условии (36) $A_{\pm}$ зависит от $a_{\pm}$, то в условии (37) участвуют только наибольшие числа из $A_{\pm}$ и $a_{\pm}$. Это означает, что условие (37) имеет дело лишь с теми коэффициентами $a_{\pm}$, $A_{\pm}$, которые соответствуют полупрямым наибольшего убывания функции и ее преобразования Фурье.

Заметим еще, что, как следует из формулы для s_{β} , правые части в (36) и в (37) совпадают только для $\alpha = 2$, а в остальных случаях правая часть в (37) меньше правой части в (36), и значит, тогда условия (37), (21), (22) шире, чем условия (35), (36), даже при $a_+ = a_-$, $A_+ = A_-$.

Автор благодарит К. С. Рютина, указавшего на статью [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Обобщенные функции, **2**, ГИФМЛ, М., 1958.
- [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, **3**, ГИФМЛ, М., 1958.
- [3] К. И. Бабенко, “Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций”, Тр. ММО, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 523–542.
- [4] R. A. Zalik, “Remarks on a paper of Gel’fand and Šilov on Fourier transforms”, *J. Math. Anal. Appl.*, **102**:1 (1984), 102–112.
- [5] А. М. Седлецкий, “Классы целых функций, быстро убывающих на вещественной оси: теория и применения”, *Матем. сб.*, **199**:1 (2008), 133–160.
- [6] G. W. Morgan, “A note on Fourier transforms”, *J. London Math. Soc.*, **9** (1934), 187–192.
- [7] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [8] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [9] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, Наука, М., 1979.
- [10] A. Beurling, *The Collected Works of Arne Beurling. V. 2. Harmonic Analysis*, Contemp. Mathematicians, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989.
- [11] L. Hörmander, “A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs”, *Ark. Mat.*, **29**:1–2 (1991), 237–240.
- [12] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

А. М. Седлецкий

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sedlet@mail.ru

Поступило

01.09.2010