Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Рамазанов, Одно замечание о полиномиальных аппроксимациях с интерполяцией непрерывных функций, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 316–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:24:41

Одно замечание о полиномиальных аппроксимациях с интерполяцией непрерывных функций

А. К. Рамазанов

Как обычно, через $C[a; b]$ будем обозначать пространство непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций f с нормой

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a; b]\}.$$

Зависимость скорости полиномиального приближения непрерывной функции от положения точки на данном отрезке первым исследовал Никольский [1]. Дальнейшему изучению этого вопроса посвящен ряд работ (см., например, [2]–[14]).

Теляковский [6] доказал, что если функция $f(x)$ непрерывна на данном отрезке $[a; b]$, то для любого натурального n найдется алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C\omega\left(f; \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{n}\right), \quad x \in [a; b], \quad (1)$$

где C не зависит от f , x и n , но зависит от отрезка $[a; b]$. Здесь, как обычно, при $\delta \geq 0$

$$\omega(f; \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta; x, y \in [a; b]\}.$$

Заметим, что полином $P_n(x)$ из неравенства (1) интерполирует приближаемую функцию $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$.

Возникает естественный вопрос: справедливо ли неравенство типа Теляковского

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C\omega\left(f; \frac{(x-a)^\gamma(b-x)^\gamma}{n}\right), \quad x \in [a; b],$$

при значении $\gamma \in (1/2; 1]$ (для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f)?

Ниже мы показываем, что ответ на этот вопрос в случае $1/2 < \gamma \leq 1$ (как и в очевидном случае $\gamma > 1$) отрицательный. Для построения соответствующего примера вместо отрезка $[a; b]$ будем рассматривать отрезок $[0; 1]$.

Точнее, при каждом значении $\gamma \in (1/2; 1]$ существует такая непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция $f(x)$, что при всех достаточно больших натуральных n найдутся точки $x \in [0; 1]$, в которых неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C\omega\left(f; \frac{x^\gamma(1-x)^\gamma}{n}\right) \quad (2)$$

не может выполняться для алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени не выше n (C не зависит от f , x и n).

В самом деле, для значения $\gamma = 1$ возьмем действительное число $k > 2$, а для значения $1/2 < \gamma < 1$ – действительное число k , удовлетворяющее неравенству $2 < k < 1/(1-\gamma)$, и рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ ($x \in [0; 1]$) с показателем $\alpha \in (0; (k-2)/k)$.

Допустим, что неравенство (2) справедливо для этой функции. Тогда из неравенства (2) следует, что

$$\|P_n\| - \|f\| \leq C \cdot 2\|f\|, \quad \|P_n\| \leq (2C+1)\|f\| = 2C+1.$$

Значит, с учетом неравенства А. А. Маркова получим

$$\|P'_n\| \leq 2n^2 \cdot \|P_n\| \leq (4C+2)n^2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00648а).

Из неравенства (2) имеем также

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C\omega\left(f; \frac{x^\gamma}{n}\right), \quad x \in [0; 1].$$

Так как $f(0) = P(0) = 0$, применив теорему Лагранжа о среднем, из последнего неравенства получаем

$$f(x) \leq |P'_n(\zeta)| \cdot x + C\omega\left(f; \frac{x^\gamma}{n}\right), \quad x \in [0; 1]. \quad (3)$$

При $0 < \alpha < 1$ для функции $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0; 1]$, имеем $\omega(f, \delta) = f(\delta) = \delta^\alpha$. Поэтому из неравенства (3) следует

$$f(x) \leq (4C + 2)n^2 \cdot x + Cf\left(\frac{x^\gamma}{n}\right), \quad x \in [0; 1].$$

В частности, при $x = 1/n^k$ и выбранном выше k отсюда получим

$$\frac{1}{n^{k\alpha}} \leq \frac{4C + 2}{n^{k-2}} + \frac{C}{n^{\alpha + k\alpha\gamma}}. \quad (4)$$

Это неравенство приводит к противоречию при всех достаточно больших n , так как параметры k и α по их выбору удовлетворяют одновременно неравенствам

$$k\alpha < k - 2 \quad \text{и} \quad k\alpha < \alpha + k\alpha\gamma,$$

а C не зависит от n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Никольский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:4 (1946), 295–322. [2] А. Ф. Тиман, *Докл. АН СССР*, **78**:1 (1951), 17–20. [3] В. К. Дзядык, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:3 (1958), 337–354. [4] G. Freud, *Math. Ann.*, **137**:1 (1959), 17–25. [5] Ю. А. Брудный, *Докл. АН СССР*, **148**:6 (1963), 1237–1240. [6] С. А. Теляковский, *Матем. сб.*, **70**:2 (1966), 252–265. [7] И. Е. Гопенгауз, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 163–172. [8] R. A. DeVore, *Теория приближения функций* (Калуга, 1975), Наука, М., 1977. [9] R. Dahlhaus, *J. Approx. Theory*, **57**:3 (1989), 274–277. [10] I. E. Gopengauz, *J. Approx. Theory*, **77**:1 (1994), 31–41. [11] K. Kopotun, *Constr. Approx.*, **12**:1 (1996), 67–94. [12] Yu. Brudnyi, *New Results in Operator Theory and its Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **98**, Birkhäuser, Basel, 1997, 92–101. [13] Р. М. Тригуб, *Докл. РАН*, **386**:5 (2002), 599–601. [14] А. К. Рамазанов, А.-Р. К. Рамазанов, *Anal. Math.*, **35**:3 (2009), 213–232.

А. К. Рамазанов

Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

E-mail: akramazanov@mail.ru

Поступило

20.05.2010

Исправленный вариант

24.03.2011