Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 1, 53–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:14:43

Усреднение монотонных операторов с условиями коэрцитивности и роста переменного порядка

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова

Получено усреднение краевой задачи Дирихле для эллиптического уравнения монотонного типа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Оператор задачи удовлетворяет условиям коэрцитивности и роста с переменным порядком $p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon)$, причем $p(y)$ периодичен, измерим и подчинен оценке $1 < \alpha \leq p(y) \leq \beta < \infty$, а параметр $\varepsilon > 0$ стремится к нулю. Здесь α, β – произвольные константы. В присутствии эффекта Лаврентьева рассматриваются решения двух типов: H - и W -решения. Для каждого типа решений существует своя процедура усреднения. Ее обоснование проводится с помощью подходящего варианта леммы о компенсированной компактности, который доказывается в работе.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

Изучим усреднение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) = \operatorname{div} g & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, & g \in L^\infty(\Omega)^d. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с липшицевой границей, $A(y, \xi): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – каратеодориева вектор-функция, т.е. $A(y, \xi)$ непрерывна по ξ для почти всех $y \in \mathbb{R}^d$ и измерима по y при любом ξ . Вектор-функция $A(y, \xi)$ периодична по y с периодом единица по каждому аргументу $y_1, y_2, \dots, y_d$, так что $\square = (0, 1]^d$ – ячейка периодичности.

Предполагается, что выполнены условия монотонности, коэрцитивности и ограниченности:

$$(A(y, \xi) - A(y, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad \text{для п.в. } y \in Y, \quad \xi \neq \eta, \quad (1.2)$$

$$A(y, \xi) \cdot \xi \geq c_0(|\xi|^{p(y)} - 1), \quad (1.3)$$

$$|A(y, \xi)|^{p'(y)} \leq c_1(|\xi|^{p(y)} + 1), \quad p'(y) = \frac{p(y)}{p(y) - 1}, \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00331, 09-01-12157).

где показатель p периодичен, измерим и подчинен неравенству

$$1 < \alpha \leq p(y) \leq \beta < \infty, \quad (1.5)$$

α, β – константы.

Решение задачи (1.1) будем искать в пространстве Соболева–Орлича, отвечающем показателю $p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon)$. На время опускаем индекс $\varepsilon > 0$, считая $p = p(x)$ измеримым в Ω и удовлетворяющим условию (1.5). Через $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим класс измеримых вектор-функций $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ таких, что

$$\int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Этот класс становится рефлексивным банаховым пространством, если норму определить равенством

$$\|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} \left| \frac{v}{\lambda} \right|^p dx \leq 1 \right\},$$

из которого непосредственно следуют оценки

$$\|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}^\alpha - 1 \leq \int_{\Omega} |v|^p dx \leq \|v\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}^\beta + 1. \quad (1.6)$$

Определим пространство Соболева–Орлича

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Справедливы очевидные вложения $W_0^{1,\beta}(\Omega) \subset W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, где $p_\varepsilon(x) = p(x/\varepsilon)$, есть решение задачи (1.1), если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi dx \quad (1.7)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$.

Важно, что в интегральном тождестве в качестве пробной функции можно взять само решение, что дает энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla u_\varepsilon dx. \quad (1.8)$$

Существование и единственность решения задачи (1.1) можно получить методом монотонных операторов. Однако, имеется одно важное обстоятельство: гладкие функции необязательно плотны в пространстве Соболева–Орлича, в отличие от того, что имеет место для классических пространств Соболева. С этим связано много нюансов. Например, в определении 1.1 выполнения интегрального тождества (1.7) только для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ недостаточно. В связи с этим определим пространство $H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ называется H -решением, если интегральное тождество (1.7) выполнено для любой пробной функции $\varphi \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$ (достаточно только для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$).

Видим, что и здесь в интегральном тождестве можно взять $\varphi = u_\varepsilon$ и получить энергетическое равенство (1.8). Существование H -решения также доказывается методом монотонных операторов.

Решение в смысле определения 1.1 будем называть W -решением. Следует отметить, что в этих вопросах терминология не вполне установилась. Например, W - и H -решение называют иногда решениями первого и второго типов.

Итак, мы используем следующие термины:

- W -решение или решение первого типа (определение 1.1);
- H -решение или решение второго типа (определение 1.2).

Обратим внимание на свойства потока $w = A(\varepsilon^{-1}x, \nabla u_\varepsilon) - g$. В обоих случаях вектор w соленоидален:

$$w \in L^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} w \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.9)$$

что непосредственно следует из интегрального тождества (1.7). Но для W -решений можно утверждать большее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Если u – решение задачи первого типа, то поток w принадлежит пространству $L_{\text{sol},2}^{p'(\cdot)}(\Omega)$ – замыканию в $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ множества $C_{\text{sol}}^\infty(\overline{\Omega})$ гладких соленоидальных векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_{\text{sol}}^\gamma(\Omega)$ – множество соленоидальных векторов из пространства $L^\gamma(\Omega)^d$, $\gamma > 1$. Тогда в смысле естественной двойственности между $L^\alpha(\Omega)^d$ и $L^{\alpha'}(\Omega)^d$

$$\{\nabla \varphi, \varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)\}^\perp = \{\nabla \varphi, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}^\perp = L_{\text{sol}}^{\alpha'}(\Omega) = \overline{C_{\text{sol}}^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Последнее равенство есть классический факт, для которого важна липшицевость границы $\partial\Omega$. Отсюда $(C_{\text{sol}}^\infty(\overline{\Omega}))^\perp = \{\nabla \varphi, \varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)\}$.

Так как $p(x) \geq \alpha$, то $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ и

$$(C_{\text{sol}}^\infty(\overline{\Omega}))^\perp = \{\nabla \varphi, \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\}$$

в смысле двойственности между $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ и $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Отсюда по определению пространства $L_{\text{sol},2}^{p'(\cdot)}(\Omega)$ получаем свойство

$$L_{\text{sol},2}^{p'(\cdot)}(\Omega) = \{\nabla \varphi, \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\}^\perp, \quad (1.10)$$

которое и доказывает наше утверждение.

В качестве резюме по вопросам существования сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. *Для задачи Дирихле (1.1) W -решение (H -решение) существует и единственно. При этом справедлива оценка*

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}(x)} dx \leq c, \quad (1.11)$$

где постоянная зависит только от констант c_0, c_1 из условий (1.3), (1.4) и величины $\|g\|_{L^{\alpha'}(\Omega)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти в работе [1].

Важно знать, когда W -решение является также H -решением. Очевидно, что это сводится к вопросу о равенстве $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. В этом случае показатель (и соответствующую задачу Дирихле) называют *регулярным*. Для регулярности требуются довольно тонкие свойства показателя; например, одной непрерывности недостаточно.

Однако, если показатель обладает логарифмическим модулем непрерывности, т.е.

$$|p(x') - p(x)| \leq \frac{k}{\ln(1/|x' - x|)}, \quad x', x \in \Omega, \quad |x' - x| \leq \frac{1}{2},$$

то $H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, см. [2], [3].

Решения первого и второго типа известны давно в вариационной постановке и изучались в контексте усреднения. Рассмотрим частный случай нашего символа A , а именно

$$A(y, \xi) = |\xi|^{p(y)-2} \xi,$$

которому отвечает вариационная задача

$$E^{\varepsilon} = \min_{u \in V} \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla u|^{p_{\varepsilon}}}{p_{\varepsilon}} - gu \right) dx.$$

В качестве множества V “допустимых функций” берем пространство $H_0^{1,p_{\varepsilon}(\cdot)}(\Omega)$ или $W_0^{1,p_{\varepsilon}(\cdot)}(\Omega)$, т.е. имеем при каждом $\varepsilon > 0$, вообще говоря, две энергии E_1^{ε} и E_2^{ε} . Надежда на то, что в процессе усреднения различие между типами решений стирается и энергии имеют общий предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, не оправдывается. Оказывается, что для решений первого типа получается один усредненный функционал, для решений второго типа – другой. Более точно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_i^{\varepsilon} = \min_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \int_{\Omega} [f_i^{\text{hom}}(\nabla u) - g \cdot \nabla u] dx, \quad i = 1, 2,$$

при этом усредненные функционалы определяются формулами

$$f_1(\xi) = f_1^{\text{hom}}(\xi) = \min_{u \in W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)} \int_{\square} \frac{|\xi + \nabla u|^{p(y)}}{p(y)} dy, \quad (1.12)$$

$$f_2(\xi) = f_2^{\text{hom}}(\xi) = \min_{u \in H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)} \int_{\square} \frac{|\xi + \nabla u|^{p(y)}}{p(y)} dy. \quad (1.13)$$

Здесь задействованы пространства Соболева–Орлича периодических функций,

$$W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square) = \left\{ u \in W_{\text{per}}^{1,1}(\square), \int_{\square} u \, dy = 0, \int_{\square} |\nabla u|^p \, dy < \infty \right\},$$

$$H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square) - \text{замыкание множества } C_{\text{per}}^{\infty}(\square) \text{ в } W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square).$$

Норма на $W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)$ задается равенством

$$\|u\|_{W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\square)}.$$

Непосредственно из (1.12), (1.13) видно, что $f_1 \leq f_2$, и известны примеры, когда это неравенство является строгим [4]. Отметим, что f_1, f_2 – выпуклые на $\mathbb{R}^d$, четные и подчинены двусторонней степенной оценке

$$c_1 |\xi|^\alpha - 1 \leq f_1(\xi) \leq f_2(\xi) \leq c_2 |\xi|^\beta + 1, \quad c_1 > 0. \quad (1.14)$$

2. Две усредненные задачи

2.1. Мы не предполагаем регулярности показателей $p(x/\varepsilon)$ и имеем дело с решениями u_ε двух типов. В обоих случаях выполнена оценка (1.11), и можно считать, что наблюдается слабая сходимость решений и потоков

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad (2.1)$$

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \rightharpoonup z \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega)^d. \quad (2.2)$$

Из (1.7) непосредственно следует, что

$$\int_{\Omega} z \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (2.3)$$

для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Необходимо найти связь между предельными элементами u и z . Согласно канонам теории усреднения [5] эта связь должна иметь вид

$$z = a(\nabla u), \quad (2.4)$$

где символ $a(\xi)$ уже не зависит от пространственной переменной. В этом случае соотношение (2.3) дает усредненное уравнение

$$\text{div}(a(\nabla u)) = \text{div } g.$$

Предельные элементы в (2.1) и (2.2), вообще говоря, зависят от выбора типа решения, так что имеем два усредненных символа $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$. Усредненные символы $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$ определяются равенством

$$a_i(\xi) = \int_{\square} A(y, \xi + \nabla N_i) \, dy, \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

где N_1 и N_2 – решения задач на ячейке периодичности,

$$\begin{aligned} N_1 &\in W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square), & \int_{\square} A(y, \xi + \nabla N_1) \cdot \nabla \varphi \, dy &= 0 \quad \forall \varphi \in W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square), \\ N_2 &\in H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square), & \int_{\square} A(y, \xi + \nabla N_2) \cdot \nabla \varphi \, dy &= 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\square). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что задача (2.6)₁ – первого типа, а задача (2.6)₂ – второго типа.

Однозначная разрешимость этих задач устанавливается методом монотонных операторов.

Усредненные символы наследуют свойства коэрцитивности и ограниченности (см. (1.3), (1.4)), но происходит это в своеобразной форме – через усредненные функционалы f_1, f_2 . Эти функционалы могут существенно отличаться от степенных функций вида $|\xi|^\alpha$, поэтому усредненная задача решается не в пространствах Соболева, а в связанных с f_1, f_2 пространствах Соболева–Орлича.

Перечислим основные свойства вектор-функции $a(\xi)$:

- (i) непрерывность на $\mathbb{R}^d$;
- (ii) строгая монотонность:

$$(a(\xi_1) - a(\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) > 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 \neq \xi_2; \quad (2.7)$$

- (iii) коэрцитивность:

$$a(\xi) \cdot \xi \geq c_0(f(\xi) - 1), \quad c_0 > 0; \quad (2.8)$$

- (iv) “ограниченность сверху”:

$$f^*(a(\xi)) \leq c(f(\xi) + 1), \quad (2.9)$$

где $f^*(\eta)$ – сопряженная по Юнгу–Фенхелю функция,

$$f^*(\eta) = \sup_{\xi} [\eta \cdot \xi - f(\xi)].$$

Вывод свойств (i) и (iv) приведен в п. 5, другие свойства доказываются стандартно.

В теории монотонных операторов оценки коэрцитивности и роста вида (2.8), (2.9) являются новыми. Впервые они отмечены и доказаны в работе [6] для усредненного оператора в задаче Навье–Стокса для электроореологической жидкости, уравнение состояния которой записывается с помощью степенной функции с осциллирующим показателем вида $p(x/\varepsilon)$, таким же, как в (1.1)–(1.5).

2.2. Укажем некоторые свойства усредненных символов f и f^* , а также вытекающие из них следствия.

Справедлива двусторонняя оценка

$$f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)(\lambda^\alpha - 1) \leq f(\xi) \leq f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)(\lambda^\beta + 1), \quad \lambda > 0. \quad (2.10)$$

Оценка снизу доказывается так:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \left\langle \frac{|\xi + \nabla w|^p}{p} \right\rangle = \left\langle \frac{|\xi/\lambda + \nabla w/\lambda|^p}{p} \lambda^p \right\rangle \\ &\geq (\lambda^\alpha - 1) \left\langle \frac{|\xi/\lambda + \nabla w/\lambda|^p}{p} \right\rangle \geq (\lambda^\alpha - 1) f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

где

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\square} \cdot dy \quad \text{— среднее по ячейке периодичности.}$$

Оценка сверху устанавливается аналогично:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) &= \left\langle \frac{|\xi/\lambda + \nabla w/\lambda|^p}{p} \right\rangle, \\ f(\xi) &\leq \left\langle \frac{|\xi + \nabla w|^p}{p} \right\rangle = \left\langle \frac{|\xi/\lambda + \nabla w/\lambda|^p}{p} \lambda^p \right\rangle \leq (\lambda^\beta + 1) f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Функционалы f и f^* удовлетворяют Δ_2 -условию:*

$$f(2\xi) \leq cf(\xi) \tag{2.11}$$

и аналогичное неравенство выполнено для f^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.11) непосредственно следует из верхней оценки (2.10), так как

$$f(2\xi) \leq f(\xi)(2^\beta + 1).$$

Далее, из нижней оценки (2.10) имеем

$$f\left(\frac{\xi}{2}\right) \geq f\left(\frac{\xi}{2\lambda}\right)(\lambda^\alpha - 1).$$

Положив $c = 2\lambda = \lambda^\alpha - 1$, получим

$$f\left(\frac{\xi}{2}\right) \geq cf(c^{-1}\xi).$$

Переход в этом неравенстве к f^* дает

$$f^*(2\xi) \leq cf^*(x, \xi),$$

что и требуется.

Следующий результат из работы [4] проясняет роль усредненных функционалов f и f^* для нашей задачи.

ЛЕММА 2.2. *Если u, z — предельные элементы из (2.1), (2.2), то*

$$f(\nabla u), f^*(z) \in L^1(\Omega), \tag{2.12}$$

причем $f = f_1$ для W -решений и $f = f_2$ для H -решений.

Обратим внимание на то, что согласно (2.12) предельный градиент ∇u суммируем лучше в случае H -решений, поскольку $f_2 \geq f_1$. В случае W -решения улучшаются свойства суммируемости вектора z , поскольку $f_2^* \leq f_1^*$.

С функционалом f свяжем векторное пространство Орлича

$$L^f = L^f(\Omega) = \{v \in L^1(\Omega)^d, f(v) \in L^1(\Omega)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{L^f(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} f\left(\frac{v}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Из оценки (2.10) и определения нормы в $L^f(\Omega)$ получим

$$\|v\|_{L^f}^{\alpha} - 1 \leq \int_{\Omega} f(v) dx \leq \|v\|_{L^f}^{\beta} + 1. \quad (2.13)$$

Это аналог оценки (1.6). Очевидно, что $L^{\beta}(\Omega)^d \subset L^f(\Omega) \subset L^{\alpha}(\Omega)^d$, см. (1.14).

Поскольку f удовлетворяет Δ_2 -условию, L^f является банаховым пространством. Рефлексивность L^f обеспечена тем, что сопряженная функция f^* также удовлетворяет Δ_2 -условию. Справедливо “неравенство Гёльдера”

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot v dx \right| \leq 2 \|u\|_{L^f} \|v\|_{L^{f^*}}. \quad (2.14)$$

Введем также пространство Соболева–Орлича

$$W_0^f = W_0^f(\Omega) = \{u \in W_0^{1,1}(\Omega), f(\nabla u) \in L^1(\Omega)\}, \quad \|u\|_{W_0^f(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^f}.$$

Поскольку f не зависит от пространственного переменного, проблем с плотностью гладких функций в $W_0^f(\Omega)$ нет. Напомним в связи с этим классический факт (см. [7]):

$$\begin{aligned} \forall u \in W_0^f(\Omega) \quad \exists \varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega), \\ \varphi_{\varepsilon} \rightarrow u \quad \text{в } W_0^{1,1}(\Omega), \quad f(\nabla \varphi_{\varepsilon}) \rightarrow f(\nabla u) \quad \text{в } L^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если $u \in W_0^f(\Omega)$, $w \in L^{f^*}(\Omega)$ и $\operatorname{div} w = 0$, то

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla u dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если φ_{ε} – аппроксимация из (2.15), то из четности f и неравенства Юнга

$$w \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon} \leq f^*(w) + f(\nabla \varphi_{\varepsilon})$$

видно, что последовательность $w \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon}$ равномерно интегрируема и по теореме Лебега

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} w \cdot \nabla u dx,$$

что и требуется.

2.3. Теперь можно уточнить формулировку усредненной задачи.

Усредненная задача: найти $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ такую, что $f(\nabla u), f^*(a(\nabla u)) \in L^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} a(\nabla u) = \operatorname{div} g$ (в смысле распределений на Ω).

Проверим, что решение этой задачи единственно. Если $\hat{u}$ – еще одно решение, то в силу предложения 2.3 можно записать

$$\int_{\Omega} (a(\nabla u) - a(\nabla \hat{u})) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) dx = 0,$$

и из строгой монотонности вектор-функции $a(\xi)$ (см. (2.7)) следует равенство $\nabla u = \nabla \hat{u}$, т.е. $u = \hat{u}$.

Существование решения усредненной задачи будет получено по ходу усреднения. Имеет смысл рассмотреть этот вопрос отдельно, опираясь только на свойства усредненного символа $a(\xi)$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Для любого $g \in L^{f*}(\Omega)$ найдется единственный элемент $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ такой, что*

$$f(\nabla u) \in L^1(\Omega), \quad f^*(a(\nabla u)) \in L^1(\Omega), \quad \operatorname{div} a(\nabla u) = \operatorname{div} g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С монотонным символом a свяжем оператор

$$\mathcal{A}: W_0^f \rightarrow (W_0^f)^*,$$

определив для $u \in W_0^f$ функционал $\mathcal{A}(u)$ равенством

$$\langle \mathcal{A}(u), \varphi \rangle = \int_{\Omega} a(\nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in W_0^f. \quad (2.16)$$

Из оценок (2.9), (2.13)₂, четности f по неравенству Юнга выводим

$$\begin{aligned} |a(\nabla u) \cdot \nabla \varphi| &\leq f^*(a(\nabla u)) + f(\nabla \varphi) \leq cf(\nabla u) + f(\nabla \varphi) + c, \\ \int_{\Omega} a(\nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx &\leq c \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx + c|\Omega| + \int_{\Omega} f(\nabla \varphi) \, dx \\ &\leq c\|\nabla u\|_{L^f}^\beta + c|\Omega| + \|\nabla \varphi\|_{L^f}^\beta + c + 1, \end{aligned}$$

что дает ограниченность функционала (2.16) по $\varphi \in W_0^f$.

Кроме того, из оценок (2.8) и (2.13)₁ получим

$$\int_{\Omega} a(\nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq c_0 \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx - c_0|\Omega| \geq c_0\|\nabla u\|_{L^f}^\alpha - c_0 - c_0|\Omega|,$$

что дает коэрцитивность оператора $\mathcal{A}$.

В силу Δ_2 -условия для f и f^* W_0^f есть рефлексивное банахово пространство, поэтому задача $\mathcal{A}u = h$ имеет единственное решение при любом $h \in (W_0^f)^*$, в частности, для h , заданного равенством

$$\langle h, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad g \in L^{f*}(\Omega).$$

Непрерывность функционала обеспечена неравенством Гёльдера (2.14). Тем самым теорема существования и единственности доказана.

3. Теорема усреднения

3.1. Сформулируем теорему усреднения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (1.2)–(1.5) и u_ε есть решение (первого или второго типа) исходной задачи (1.1). Тогда имеет место слабая сходимость (2.1), где u – решение (соответствующее типу) усредненной задачи. При этом потоки $A(x/\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ также слабо сходятся к усредненному потоку, т.е.

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \rightharpoonup a(\nabla u) \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega)^d.$$

Кроме того, в смысле слабой сходимости мер в Ω

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup a(\nabla u) \cdot \nabla u dx. \quad (3.1)$$

Напомним, что если μ_ε, μ – меры Радона на Ω , то слабая сходимость $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$ означает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi d\mu_\varepsilon = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

где $C_0(\Omega)$ – пространство непрерывных на Ω функций с компактным носителем.

Основным инструментом для доказательства теоремы 3.1 будет следующая “лемма о компенсированной компактности”.

ЛЕММА 3.2. Пусть семейства $u_\varepsilon, w_\varepsilon$ таковы, что

- a) $u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), w_\varepsilon \in L_{\text{sol}}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega);$
- b) $\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} dx, \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p'_\varepsilon} dx \leq c < \infty;$
- c) $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{L^\alpha} \nabla u, w_\varepsilon \xrightarrow{L^{\beta'}} w;$
- d) семейство u_ε компактно в $L^\beta(\Omega)$.

Тогда в смысле слабой сходимости мер в Ω

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx. \quad (3.2)$$

Сходимость (3.2) остается в силе, если условие a) заменить на

$$a') \quad u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), w_\varepsilon \in L_{\text{sol},2}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega).$$

В том случае, когда показатель p постоянный, лемма 3.2 переходит в широко известный результат Тартара–Мюра [8].

Доказательство леммы 3.2 будет дано в п. 4.

Приступим к доказательству теоремы усреднения.

3.2. Покажем, что в (2.2) имеет место сходимость потоков $z_\varepsilon = A(x/\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ к усредненному потоку $a(\nabla u)$, т.е. выполнено равенство $z = a(\nabla u)$.

В силу монотонности символа A справедливо неравенство

$$\int_\Omega \varphi \left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) - A\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon\right) \right] \cdot [\nabla u_\varepsilon - v_\varepsilon] dx \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0, \quad (3.3)$$

где $v_\varepsilon(x) = \xi + \nabla N(x/\varepsilon)$, N – решение задачи на ячейке периодичности (см. (2.5) или (2.6)), определяющей усредненный символ $a(\xi)$.

Далее будет установлена справедливость четырех соотношений:

- (i) $A(x/\varepsilon, v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon \rightharpoonup a(\xi) \cdot \xi$ в $L^1(\Omega)$,
- (ii) $z_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \rightharpoonup z \cdot \xi$ в $L^1(\Omega)$,
- (iii) $A(x/\varepsilon, v_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup a(\xi) \cdot \nabla u$ в $L^1(\Omega)$,
- (iv) $z_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup z \cdot \nabla u dx$ в смысле слабой сходимости мер в области Ω .

Покажем, как из этих соотношений получается требуемое равенство $z = a(\nabla u)$.

Сначала перейдем к пределу в каждом из четырех слагаемых левой части (3.3), используя соотношения (i)–(iv). Тогда

$$\int_{\Omega} \varphi(z - a(\xi)) \cdot (\nabla u - \xi) dx \geq 0$$

и в силу произвольности φ

$$(z - a(\xi)) \cdot (\nabla u - \xi) \geq 0$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $x \in \Omega$. Прием Минти дает соотношение $z = a(\nabla u)$. Действительно, считая x точкой Лебега для ∇u и z , положим в последнем неравенстве $\xi = \nabla u(x) - t\eta$ ($t > 0$, $\eta \in \mathbb{R}^d$) и перейдем к пределу при $t \rightarrow 0$. Тогда

$$(z(x) - a(\nabla u(x) + t\eta)) \cdot \eta \geq 0 \implies z(x) = a(\nabla u(x))$$

в силу непрерывности $a(\cdot)$ и произвольности $\eta \in \mathbb{R}^d$.

Ключевое равенство (2.4) установлено, этим доказаны все утверждения теоремы 3.1.

Остается обосновать сходимости (i)–(iv).

3.3. Сходимость (i) извлекаем из свойства среднего значения:

$$\text{если } b \in L_{\text{per}}^\gamma(\square), \quad \gamma \geq 1, \quad \text{то } b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \langle b \rangle \text{ в } L^\gamma(\Omega).$$

Поскольку $(\xi + \nabla_y N) \in L^{p(\cdot)}(\square)$, а $A(y, \xi + \nabla_y N) \in L^{p'(\cdot)}(\square)$, то произведение $(\xi + \nabla_y N) \cdot A(y, \xi + \nabla_y N)$ принадлежит $L^1(\square)$ и по свойству среднего значения

$$\begin{aligned} & A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \left(\xi + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\ & \xrightarrow{L^1(\Omega)} \langle A(y, \xi + \nabla_y N) \cdot (\xi + \nabla_y N) \rangle = \langle A(y, \xi + \nabla_y N) \rangle \cdot \xi = a(\xi) \cdot \xi, \end{aligned}$$

где равенства записаны в силу определений усредненного символа и решения задачи на ячейке.

В трех оставшихся случаях (ii)–(iv) идентификация пределов не столь проста. При этом случаи (ii), (iii) выделяются тем обстоятельством, что задействованные в них последовательности слабо компактны в $L^1(\Omega)$. Свойство слабой компактности в $L^1(\Omega)$ будет сейчас проверено. Мы используем известный

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ [7]. Эквивалентны утверждения

- 1) семейство v_ε слабо компактно в $L^1(\Omega)$;
- 2) семейство $v_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ равномерно интегрируемо (т.е. $\forall \tau > 0 \exists \delta = \delta(\tau)$: $\int_K |v_\varepsilon| dx < \tau$ для любого измеримого множества $K \subset \Omega$ с лебеговой мерой $|K| \leq \delta$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Последовательности*

$$|v_\varepsilon|^{p(x/\varepsilon)}, \quad \left| A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \right|^{p'(x/\varepsilon)}$$

равностепенно интегрируемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству среднего значения имеем слабую сходимость в $L^1(\Omega)$ последовательности $|A(x/\varepsilon, \xi + \nabla_y N(x/\varepsilon))|^{p'(x/\varepsilon)}$ к $\langle |A(y, \xi + \nabla_y N)|^{p'(y)} \rangle$, и требуемое свойство обеспечено критерием слабой сходимости в $L^1(\Omega)$. Те же рассуждения годятся для последовательности $|v_\varepsilon|^{p(x/\varepsilon)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Последовательности*

$$A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \nabla u_\varepsilon, \quad z_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$$

равностепенно интегрируемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По неравенству Юнга

$$\begin{aligned} & \int_K A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \nabla u_\varepsilon dx \\ & \leq \delta \int_K |\nabla u_\varepsilon|^{p(x/\varepsilon)} dx + c(\delta) \int_K \left| A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\right) \right|^{p'(x/\varepsilon)} dx \\ & \leq c_1 \delta + c(\delta) \int_K \left| A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi + \nabla_y N\right) \right|^{p'(x/\varepsilon)} dx \end{aligned}$$

для любого измеримого $K \subset \Omega$ с учетом оценки (1.13). При фиксированном δ второе слагаемое можно сделать меньшим δ , выбирая множество K с достаточно малой мерой $|K|$, что возможно, так как $|A(x/\varepsilon, \xi + \nabla_y N(x/\varepsilon))|^{p'(x/\varepsilon)}$ равностепенно интегрируема (см. предложение 3.3). Те же рассуждения применимы к последовательности $z_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$.

3.4. Для отыскания пределов в случаях (ii)–(iv) используется лемма 3.2. Однако, непосредственно к векторам, участвующим в (ii)–(iv), эта лемма не применима из-за того, что предполагаемое в ней условие d) компактности потенциала в $L^\beta(\Omega)$ ничем не гарантировано в данной ситуации. Необходимое свойство компактности позволяет заработать срезка в потенциальных множителях. Поэтому мы действуем по схеме: сначала получаем соотношения типа (ii)–(iv) со “срезанным” потенциальным множителем, затем объясняем, почему срезку всюду можно убрать. На этом пути важны свойства срезки

$$u_\varepsilon^{(k)} = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{если } |u_\varepsilon(x)| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u_\varepsilon(x)| > k, \end{cases}$$

следующего вида.

ЛЕММА 3.5. *Справедливы соотношения*

$$0 \leq A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot \nabla u_\varepsilon^{(k)} \leq A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot \nabla u_\varepsilon, \quad (3.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) \cdot (\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^{(k)}) dx = 0 \quad \text{равномерно по } \varepsilon. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $T_k^\varepsilon = \{x \in \Omega : |u_\varepsilon(x)| > k\}$, имеем

$$|T_k^\varepsilon| \leq k^{-1} \|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq ck^{-1}. \quad (3.6)$$

Возьмем в тождестве (1.7) $\varphi = u_\varepsilon$ и $\varphi = u_\varepsilon^{(k)}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^{(k)}) dx \\ &= \int_{T_k^\varepsilon} g \cdot \nabla u_\varepsilon dx \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{T_k^\varepsilon} |g|^{\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'} \leq c_1 \left(\int_{T_k^\varepsilon} |g|^{\alpha'} dx \right)^{1/\alpha'} \end{aligned}$$

и достаточно ссылки на свойство абсолютной интегрируемости суммируемой функции $|g|^{\alpha'}$. Лемма доказана.

Для вывода (iv) достаточно показать, что

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx, \quad (3.7)$$

где $w_\varepsilon = z_\varepsilon - g$ и $w = z - g$. Используя срезки $u_\varepsilon^{(k)}$ и $u^{(k)}$, записываем

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - w \cdot \nabla u = (w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^{(k)} - w \cdot \nabla u^{(k)}) + w \cdot (\nabla u^{(k)} - \nabla u) + r_\varepsilon^k. \quad (3.8)$$

Здесь $r_\varepsilon^k = w_\varepsilon \cdot (\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^{(k)})$ и в силу (3.4), (3.5)

$$\|r_\varepsilon^k\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta \quad \text{для любого } k > k_1(\delta) \text{ равномерно по } \varepsilon.$$

Полагая $T_k = \{x \in \Omega : |u| > k\}$, по неравенству Юнга и в силу четности f выводим

$$\|w \cdot (\nabla u^{(k)} - \nabla u)\|_{L^1(\Omega)} = \|w \cdot \nabla u\|_{L^1(T_k)} \leq \int_{T_k} f^*(w) dx + \int_{T_k} f(\nabla u) dx \leq \delta$$

для любых $k > k_2(\delta)$, поскольку $|T_k| \leq ck^{-1}$ и $f^*(w), f(\nabla u) \in L^1(\Omega)$, см. лемму 2.2.

Отсюда для фиксированного $k > \max(k_1, k_2)$ и любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^{(k)} dx - \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u^{(k)} dx \right| + 2\delta, \quad (3.9)$$

и разность в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ по лемме 3.2. Условия а)–с) этой леммы для семейств w_ε и $\nabla u_\varepsilon^{(k)}$ выполнены очевидным образом. Требуется проверки лишь условие d). По свойствам срезки, используя условие с) и теорему вложения, выводим

$$u_\varepsilon^{(k)} \rightharpoonup u^{(k)} \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega) \implies u_\varepsilon^{(k)} \rightarrow u^{(k)} \quad \text{в } L^s(\Omega) \quad \forall s,$$

и s можно считать любым в силу ограниченности $u_\varepsilon^{(k)}$, в частности, равным β .

Ввиду произвольной малости δ из неравенства (3.9) следует сходимость (3.7).

3.5. Для доказательства соотношения (iii) снова используем срезку $u_\varepsilon^{(k)}$. Заметим, что $q_\varepsilon = A(x/\varepsilon, \xi + \nabla_y N(x/\varepsilon))$ – соленоидальный вектор в смысле распределений на Ω и $q_\varepsilon \rightharpoonup a(\xi)$ в $L^{\beta'}(\Omega)^d$ по свойству среднего значения. Тогда по лемме 3.2 $q_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon^{(k)} \rightharpoonup a(\xi) \cdot \nabla u^{(k)}$ в $L^1(\Omega)$, и срезку можно снять благодаря равностепенной интегрируемости семейства $q_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ (см. предложение 3.4). В самом деле,

$$\|q_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon^{(k)} - u_\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} = \|q_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon\|_{L^1(T_k^\varepsilon)} \leq \delta$$

равномерно по ε , если k выбрано таким, что мера $|T_k^\varepsilon|$ достаточно мала, см. (3.6). Другие детали вывода нетрудно восстановить по аналогии с (3.8), (3.9).

В случае (ii) строим срезку

$$\bar{v}_\varepsilon(x) = \xi + \nabla \bar{N}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \text{где} \quad \bar{N}(y) = \begin{cases} N(y), & \text{если } |N(y)| \leq \varepsilon^{-1}, \\ \pm \varepsilon^{-1}, & \text{если } |N(y)| > \varepsilon^{-1}. \end{cases}$$

Имеем $\bar{v}_\varepsilon \rightharpoonup \xi$ в $L^\alpha(\Omega)^d$ и, если $T_\varepsilon = \{x \in \Omega : |N(x/\varepsilon)| > \varepsilon^{-1}\}$, то $|T_\varepsilon| < c\varepsilon$. По лемме 3.2 $z_\varepsilon \cdot \bar{v}_\varepsilon \rightharpoonup z \cdot \xi$ в $L^1(\Omega)$, и срезка снимается благодаря равностепенной интегрируемости семейства $z_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ (см. предложение 3.4), поскольку $\|z_\varepsilon \cdot (v_\varepsilon - \bar{v}_\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} = \|z_\varepsilon \cdot v_\varepsilon\|_{L^1(T_\varepsilon)}$.

Таким образом, все сходимости (i)–(iv) установлены, в результате чего верно равенство (2.4) и, следовательно, сходимость (iv) дает предельное соотношение (3.1).

Теорема 3.1 доказана.

4. Доказательство леммы о компенсированной компактности

4.1. Каждое из условий а) и а') гарантирует свойство ортогональности

$$\int_\Omega w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx = 0. \quad (4.1)$$

При условии а) это равенство получаем непосредственно из определения соленоидального вектора (см. (1.9)) по соображениям замыкания, поскольку $u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$. При условии а') равенство (4.1) было доказано при выводе предложения 1.3 (см. (1.10)).

Вывод леммы 3.2 существенно опирается на результат из работы [4].

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие свойства слабой полунепрерывности снизу:*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \in W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \quad \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{L^\alpha} \nabla u \implies \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \, dx \geq \int_\Omega f_1(\nabla u) \, dx, \\ u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \quad \nabla u_\varepsilon &\xrightarrow{L^\alpha} \nabla u \implies \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \, dx \geq \int_\Omega f_2(\nabla u) \, dx, \\ w_\varepsilon \in L_{\text{sol},1}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \quad w_\varepsilon &\xrightarrow{L^{\beta'}} w \implies \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p'_\varepsilon} \, dx \geq \int_\Omega (f_2)^*(w) \, dx, \\ w_\varepsilon \in L_{\text{sol},2}^{p'_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \quad w_\varepsilon &\xrightarrow{L^{\beta'}} w \implies \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |w_\varepsilon|^{p'_\varepsilon} \, dx \geq \int_\Omega (f_1)^*(w) \, dx. \end{aligned}$$

Лемма 2.2 есть частный случай этого утверждения.

Кроме того, мы будем использовать свойство локальности множества $V \cap L^\beta(\Omega)$, где в качестве V можно взять любое из пространств $W_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, $H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega)$, $W_0^f(\Omega)$. Это свойство означает

$$u \in V \cap L^\beta(\Omega), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \implies \varphi u \in V.$$

Доказательство несложное. Например, пусть $V = W_0^f(\Omega)$, $\nabla(\varphi u) = \varphi \nabla u + \nabla \varphi u$. Из оценки (1.14) следует, что $\nabla \varphi u \in L^f(\Omega)$. Тогда $\nabla(\varphi u) \in L^f(\Omega)$ в силу Δ_2 -условия для f .

Заметим, что в наших предположениях для самого V свойство локальности: $u \in V$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \varphi u \in V$, вообще говоря, не выполнено. Но оно автоматически выполнено для V , если показатели α, β из (1.5) удовлетворяют условию $\beta \leq \alpha^*$, где α^* – сопряженный по Соболеву показатель.

4.2. Предполагаем выполнение условий а)–д). Из условия б) по неравенству Юнга вытекает ограниченность семейства $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ в $L^1(\Omega)$. Поэтому сходимость (3.2) следует из соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.2)$$

Преобразуем интегралы в равенстве (4.2), используя свойства соленоидальных векторов w_ε и w . Во-первых, в наших предположениях

$$\int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega). \quad (4.3)$$

Во-вторых, $w \in L^{f_2^*}(\Omega)$ по лемме 4.1 и согласно предложению 2.3

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in W_0^{f_2}(\Omega). \quad (4.4)$$

Кроме того, $u \in W_0^{f_2}(\Omega)$ по лемме 4.1, и в силу отмеченного выше свойства локальности

$$\varphi u_\varepsilon \in H_0^{1,p_\varepsilon(\cdot)}(\Omega), \quad \varphi u \in W_0^{f_2}(\Omega).$$

Теперь, полагая $\psi = \varphi u_\varepsilon$ в (4.3) и $\psi = \varphi u$ в (4.4), получаем

$$\int_{\Omega} \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = - \int_{\Omega} w_\varepsilon \cdot u_\varepsilon \nabla \varphi dx, \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} \varphi w \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} w \cdot u \nabla \varphi dx. \quad (4.6)$$

Так как $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ в $L^{\beta'}(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ сильно в $L^\beta(\Omega)$, правая часть в (4.5) сходится к правой части в (4.6). Тогда имеет место сходимость левых частей, что и означает требуемое равенство (4.2).

В условиях б)–д) и а') применяются аналогичные рассуждения. Лемма доказана.

В работах [9], [10] установлены другие варианты леммы о компенсированной компактности и даны их приложения для уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста.

5. О некоторых свойствах усредненного символа

5.1. Докажем непрерывность усредненного символа $a(\xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}^d$. Это свойство обеспечивает

ЛЕММА 5.1. Пусть $N_\xi(y) = N(y)$ – решение периодической задачи (2.6). Тогда поток $A(y, \xi + \nabla N_\xi)$ слабо непрерывен по ξ в $L^{p'(\cdot)}(\square)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим задачу (2.6)₂.

Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$ и $N_n = N_{\xi_n}$, $z_n = A(y, \xi_n + \nabla N_{\xi_n})$. Из интегрального тождества для N_n легко вывести ограниченность ∇N_n и z_n в $L^{p(\cdot)}(\square)$ и $L^{p'(\cdot)}(\square)$ соответственно. Тогда можно считать, что

$$N_n \xrightarrow{H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)} \psi, \quad z_n \xrightarrow{L^{p'(\cdot)}(\square)} z, \quad \langle z \cdot \nabla \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square). \quad (5.1)$$

Докажем равенство

$$z = A(y, \xi + \nabla \psi), \quad (5.2)$$

которое превращает тождество (5.1)₃ в периодическую задачу (2.6)₂ с параметром ξ , откуда ввиду единственности ее решения последовательно получаем

$$\psi = N_\xi, \quad z = A(y, \xi + \nabla N_\xi). \quad (5.3)$$

Тогда сходимость (5.1)₂ демонстрирует доказываемое свойство потока.

Наряду с (5.1)₁ и (5.1)₂ справедливы соотношения

$$\langle z_n \cdot \nabla N_n \rangle = 0, \quad \langle z \cdot \nabla N \rangle = 0, \quad A(y, \xi_n + h) \xrightarrow{L^{p'(\cdot)}(\square)} A(y, \xi + h)$$

для любой $h \in L^{p(\cdot)}(\square)$ (по теореме Лебега о мажорированной сходимости в силу свойств символа $A(y, \xi)$), так что законен переход к пределу в неравенстве, записанном по монотонности:

$$\langle (z_n - A(y, \xi_n + h)) \cdot (\nabla N_n - h) \rangle \geq 0 \implies \langle (z - A(y, \xi + h)) \cdot (\nabla \psi - h) \rangle \geq 0. \quad (5.4)$$

Из (5.4)₂ по соображениям Минти следует искомое равенство (5.2) и утверждение леммы 5.1 доказано. Между прочим, одновременно доказана слабая непрерывность $N_\xi(y)$ по ξ в $H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)$, см. (5.1)₁ и (5.3)₁.

5.2. Займемся “оценкой сверху”:

$$f_i^*(a_i(\xi)) \leq c(f_i(\xi) + 1), \quad i = 1, 2. \quad (5.5)$$

Введем в $L^{p'(\cdot)}(\square)$ два подпространства периодических соленоидальных векторов

$$L_{\text{sol},1}^{p'(\cdot)}(\square) = \{\nabla \varphi : \varphi \in H_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)\}^\perp, \quad L_{\text{sol},2}^{p'(\cdot)}(\square) = \{\nabla \varphi : \varphi \in W_{\text{per}}^{1,p(\cdot)}(\square)\}^\perp.$$

По теории двойственности верно представление [4]

$$f_2^*(\eta) = \min_{z \in L_{\text{sol},1}^{p'(\cdot)}(\square), \langle z \rangle = \eta} \left\langle \frac{|z|^{p'}}{p'} \right\rangle, \quad f_1^*(\eta) = \min_{z \in L_{\text{sol},2}^{p'(\cdot)}(\square), \langle z \rangle = \eta} \left\langle \frac{|z|^{p'}}{p'} \right\rangle. \quad (5.6)$$

Вывод неравенства $f_2^*(a_2(\xi)) \leq cf_2(\xi) + 1$ основан на формуле (5.6)₁. Поскольку в этом случае

$$\eta = a_2(\xi) = \langle z \rangle, \quad \text{где} \quad z = A(y, \xi + \nabla N) \in L_{\text{sol},1}^{p'(\cdot)}(\square), \quad N - \text{решение (2.6)}_2,$$

можно записать

$$\begin{aligned} f_2^*(\eta) &\leq \langle |A(y, \xi + \nabla N)|^{p'} \rangle \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} c_1 \langle |\xi + \nabla N|^p \rangle + c_1 \stackrel{(1.3),(2.6)}{\leq} c_1 \left\langle \frac{1}{c_0} A(y, \xi + \nabla N) \cdot \xi + 1 \right\rangle + c_1 \\ &\stackrel{(2.5)}{=} \frac{c_1}{c_0} a_2(\xi) \cdot \xi + 2c_1 = \frac{c_1}{c_0} \eta \cdot \xi + 2c_1. \end{aligned}$$

Здесь использованы оценки коэрцитивности и роста (1.3) и (1.4), а также определения решения N и усредненного символа $a_2(\xi)$. Отсюда по обобщенному неравенству Юнга $\eta \cdot \xi \leq \delta f^*(\eta) + c_\delta f(\xi)$ (которое выводится из обычного неравенства Юнга в силу Δ_2 -условия для f) нетрудно получить требуемое неравенство $f_2^*(\eta) \leq cf_2(\xi) + 1$.

Вывод второго неравенства из (5.5) проводится аналогично на основе формулы (5.6)₂.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Жиков, “Разрешимость трехмерной задачи о термисторе”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 101–114.
- [2] В. В. Жиков, “Об эффекте Лаврентьева”, *Докл. РАН*, **345**:1 (1995), 10–14.
- [3] V. V. Zhikov, “On Lavrentiev’s phenomenon”, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 249–269.
- [4] В. В. Жиков, “Эффект Лаврентьева и усреднение нелинейных вариационных задач”, *Дифференц. уравнения*, **27**:1 (1991), 42–50.
- [5] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [6] V. V. Zhikov, “Homogenization of a Navier–Stokes type system for electrorheological fluid”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2011 (в печати).
- [7] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [8] F. Murat, “Compacité par compensation”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **5**:3 (1978), 489–507.
- [9] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О принципе компенсированной компактности”, *Докл. РАН*, **433**:5 (2010), 590–595.
- [10] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 110–137.

В. В. Жиков

Владимирский государственный гуманитарный университет

E-mail: zhikov@vladgggu.ru

Поступило

26.07.2010

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

E-mail: pas-se@yandex.ru