Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кирушев, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, Вейвлетное разложение пространства дискретных периодических сплайнов, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 712–720

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:05:32

УДК 519.677

ВЕЙВЛЕТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

В. А. Кирушев, В. Н. Малоземов, А. Б. Певный

В пространстве $\mathcal{S}_r^m$ дискретных периодических сплайнов построен ортогональный базис. С его помощью при $m = 2^t$ получено вейвлетное разложение пространства $\mathcal{S}_r^m$. Выведены рекуррентные формулы для перехода от разложения по ортогональному базису к вейвлетному разложению и рекуррентные формулы для обратного перехода.

Библиография: 5 названий.

1. Пусть m, n, r – натуральные числа и $N = mn$. Положим

$$u(k) = \begin{cases} n^2 & \text{при } k = 0, \\ \left(\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \right)^2 & \text{при } k = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Функция целочисленного аргумента

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^r(k) \omega_N^{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, называется *дискретным периодическим B -сплайном порядка r* [1]. *Дискретный периодический сплайн порядка r* определяется как линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов B -сплайна

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn). \quad (2)$$

Множество дискретных периодических сплайнов порядка r обозначим через $\mathcal{S}_r^m$. Очевидно, что $\mathcal{S}_r^1$ есть пространство комплексных констант, а $\mathcal{S}_r^N = \mathbb{C}_N$, где $\mathbb{C}_N$ – пространство комплекснозначных N -периодических последовательностей (сигналов). Индекс m у $\mathcal{S}_r^m$ обозначает размерность этого линейного пространства.

В данной заметке в пространстве $\mathcal{S}_r^m$ построен ортогональный базис. С его помощью при $m = 2^t$ получено вейвлетное разложение пространства $\mathcal{S}_r^m$. Выведены рекуррентные формулы для перехода от разложения по ортогональному базису к вейвлетному разложению и рекуррентные формулы для обратного перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00269.

2. Положим

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn) \omega_m^{kp}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

ЛЕММА 1. *Справедлива формула*

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm + k) \omega_N^{j(lm+k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1)

$$\mu_k(j) = \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} u^r(s) \omega_N^{(j-pn)s} \right) \omega_m^{kp} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} u^r(s) \omega_N^{js} \left(\frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{p(k-s)} \right).$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{jp} = \delta_m(j), \quad (4)$$

где $\delta_m(j)$ – единичный m -периодичный импульс, равный единице при $j = 0$ и нулю при $j = 1, \dots, m-1$. Получим

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \delta_m(k-s) u^r(s) \omega_N^{js} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm + k) \omega_N^{j(lm+k)}.$$

Лемма доказана.

Согласно определению $u(k)$ имеем $u(m) = u(2m) = \dots = u((n-1)m) = 0$. Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\mu_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} u^r(lm) \omega_n^{jl} \equiv \frac{1}{N} n^{2r}.$$

Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}$$

и норму $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Сигналы $\{\mu_k(j)\}_{k=0}^{m-1}$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{S}_r^m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что все μ_k принадлежат $\mathcal{S}_r^m$. Проверим их ортогональность. При $k \neq s$ имеем в силу (3) и (4)

$$\langle \mu_k, \mu_s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{p,q=0}^{n-1} u^r(pt+k)u^r(qt+s)\delta_N(pt+k-qt-s).$$

Поскольку $k \neq s$ и $k, s = 0, 1, \dots, m-1$, последовательности индексов $\{pt+k\}$ и $\{qt+s\}$ не имеют общих точек и не выходят из множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Значит, правая часть в последней формуле равна нулю. Ортогональность системы $\{\mu_k\}_{k=0}^{m-1}$ установлена.

Остается учесть, что количество функций μ_k совпадает с размерностью пространства $\mathcal{S}_r^m$. Теорема доказана.

Отметим, что

$$\|\mu_k\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} u^{2r}(lm+k).$$

ЛЕММА 2. При $k = 1, \dots, m-1$ справедливо равенство

$$\mu_{m-k}(j) = \overline{\mu_k(j)}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения $u(k)$ имеем $u(N-k) = u(k)$ при $k = 1, \dots, N-1$. Отсюда следует, что B -сплайн $Q_r(j)$ принимает только вещественные значения.

Далее,

$$\overline{\mu_{m-k}(j)} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn) \omega_m^{-(m-k)p} = \mu_k(j).$$

Это равенство равносильно (5). Лемма доказана.

Сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ называется *четным*, если $x(N-j) = \overline{x(j)}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

При фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ продолжим $\mu_k(j)$ по индексу k периодически с периодом m . Согласно лемме 2 последовательность $\{\mu_k(j)\}$ будет четной по k .

ЛЕММА 3. При всех целых k, l справедливо равенство

$$\mu_k(j-ln) = \omega_m^{-kl} \mu_k(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\mu_k(j-ln) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-(l+p)n) \omega_m^{k(l+p)-kl} = \omega_m^{-kl} \mu_k(j).$$

ЛЕММА 4. Пусть $k \in \{1, \dots, m-1\}$ и s — натуральное число. Если произведение ks не делится на m , то

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^s = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на том, что согласно (6) и (4)

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^s = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q + ln)]^s = \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{lks} \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q)]^s = m \delta_m(ks) \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q)]^s.$$

В частности, при $k = 1, \dots, m-1, k \neq m/2$, справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^2 = 0.$$

Отметим, что при четном m

$$\mu_{m/2}(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p Q_r(j - pn).$$

3. В дальнейшем считаем, что $m = 2^t$. Положим $m_\nu = m/2^\nu$, $n_\nu = 2^\nu n$. В этом случае $m_\nu n_\nu = N$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, t$.

Обозначим через μ_k^ν ортогональные сплайны, соответствующие параметрам m_ν, n_ν . В частности, $\mu_k^0 = \mu_k$. Следующая лемма играет фундаментальную роль в вопросах декомпозиции пространства $\mathcal{S}_r^m$.

ЛЕММА 5. При $\nu = 0, 1, \dots, t-1$ справедлива рекуррентная формула

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c^\nu(k) \mu_k^\nu(j) + c^\nu(k + m_{\nu+1}) \mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j), \quad (7)$$

где $c^\nu(k) = (2 \cos \pi k / m_\nu)^{2r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ формула (7) принимает вид $\mu_0^{\nu+1}(j) = 2^{2r} \mu_0^\nu(j)$. Она верна, поскольку $\mu_0^\nu(j) \equiv n_\nu^{2r} / N$.

Пусть $k = 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_k^{\nu+1}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n_{\nu+1}-1} u^r(lm_{\nu+1} + k) \omega_N^{j(lm_{\nu+1} + k)} \\ &= \frac{1}{N} \left(\sin \frac{\pi k}{m_{\nu+1}} \right)^{2r} \sum_{l=0}^{2n_\nu-1} \left(\sin \frac{\pi(lm_{\nu+1} + k)}{N} \right)^{-2r} \omega_N^{j(lm_{\nu+1} + k)}. \end{aligned}$$

Последнюю сумму разобьем на две суммы: по четным индексам $l = 2s$ и по нечетным $l = 2s + 1, s = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$. Получим

$$\begin{aligned} \mu_k^{\nu+1}(j) &= \frac{1}{N} \left(\sin \frac{2\pi k}{m_\nu} \right)^{2r} \sum_{s=0}^{n_\nu-1} \left(\sin \frac{\pi(sm_\nu + k)}{N} \right)^{-2r} \omega_N^{j(sm_\nu + k)} \\ &\quad + \frac{1}{N} \left(\sin \frac{2\pi k}{m_\nu} \right)^{2r} \sum_{s=0}^{n_\nu-1} \left(\sin \frac{\pi(sm_\nu + k + m_{\nu+1})}{N} \right)^{-2r} \omega_N^{j(sm_\nu + k + m_{\nu+1})}. \end{aligned}$$

Так как $\sin(2\pi k / m_\nu) = 2 \cos(\pi k / m_\nu) \sin(\pi k / m_\nu)$ и

$$\sin \frac{2\pi k}{m_\nu} = -\sin \frac{2\pi(k + m_{\nu+1})}{m_\nu} = -2 \cos \frac{\pi(k + m_{\nu+1})}{m_\nu} \sin \frac{\pi(k + m_{\nu+1})}{m_\nu},$$

то $\mu_k^{\nu+1}(j) = c^\nu(k) \mu_k^\nu(j) + c^\nu(k + m_{\nu+1}) \mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j)$. Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, следует, что $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}} \subset \mathcal{S}_r^{m_\nu}$ при $\nu = 0, 1, \dots, t-1$.

4. Введем дискретные сплайны

$$w_k^{\nu+1}(j) = d^\nu(k) \mu_k^\nu(j) + d^\nu(k + m_{\nu+1}) \mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j), \quad (8)$$

где $d^\nu(k) = \omega_{m_\nu}^k c^\nu(k + m_{\nu+1}) \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2$. Очевидно, что $w_k^{\nu+1} \in \mathcal{S}_r^{m_\nu}$.

ЛЕММА 6. Сплайны $\{w_k^{\nu+1}\}_{k=0}^{m_{\nu+1}-1}$ образуют ортогональную систему. При этом $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_s^{\nu+1} \rangle = 0$ при всех $k, s = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$ и

$$\|w_k^{\nu+1}\| = \|\mu_k^\nu\| \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\| \|\mu_k^{\nu+1}\|. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства $\langle w_k^{\nu+1}, w_s^{\nu+1} \rangle = 0$ и $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_s^{\nu+1} \rangle = 0$ при $k \neq s$, $k, s = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$, следуют из (7), (8) и ортогональности системы $\{\mu_k^\nu\}_{k=0}^{m_\nu-1}$. Остается проверить, что $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1} \rangle = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1} \rangle &= d^\nu(k) c^\nu(k) \|\mu_k^\nu\|^2 + d^\nu(k + m_{\nu+1}) c^\nu(k + m_{\nu+1}) \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 \\ &= c^\nu(k) c^\nu(k + m_{\nu+1}) \|\mu_k^\nu\|^2 \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 (\omega_{m_\nu}^k + \omega_{m_\nu}^{k+m_{\nu+1}}) = 0. \end{aligned}$$

Вычисление $\|w_k^{\nu+1}\|^2$ проводится непосредственно:

$$\begin{aligned} \|w_k^{\nu+1}\|^2 &= |d^\nu(k)|^2 \|\mu_k^\nu\|^2 + |d^\nu(k + m_{\nu+1})|^2 \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 \\ &= \|\mu_k^\nu\|^2 \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 ([c^\nu(k + m_{\nu+1})]^2 \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 + [c^\nu(k)]^2 \|\mu_k^\nu\|^2) \\ &= \|\mu_k^\nu\|^2 \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2 \|\mu_k^{\nu+1}\|^2. \end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно (9). Лемма доказана.

Отметим, что $d^\nu(0) = 0$ и $d^\nu(m_\nu - k) = \overline{d^\nu(k)}$. Таким образом, m_ν -периодическая последовательность $\{d^\nu(k)\}$ является четной. Нетрудно также проверить, что при фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ $m_{\nu+1}$ -периодическая по k последовательность $\{w_k^{\nu+1}(j)\}$ будет четной. При этом $w_0^{\nu+1}(j) = -2^{2r} \|\mu_0^\nu\|^2 \mu_{m_{\nu+1}}^\nu(j)$.

Нам потребуется еще одно свойство, легко следующее из (6) и (8):

$$w_k^{\nu+1}(j - l n_{\nu+1}) = d^\nu(k) \mu_k^\nu(j - 2l n_\nu) + d^\nu(k + m_{\nu+1}) \mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu(j - 2l n_\nu) = \omega_{m_{\nu+1}}^{-kl} w_k^{\nu+1}(j). \quad (10)$$

5. Обозначим через $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ линейную оболочку, натянутую на сплайны $w_k^{\nu+1}$, $k = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$. Согласно лемме 6 пространство $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$ можно рассматривать как ортогональную сумму подпространств $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}}$ и $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$: $\mathcal{S}_r^{m_\nu} = \mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}} \oplus \mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.

Разложим $\mathcal{S}_r^m = \mathcal{S}_r^{m_0}$ по схеме

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}_r^{m_0} & \rightarrow & \mathcal{S}_r^{m_1} & \rightarrow & \mathcal{S}_r^{m_2} & \rightarrow & \dots \rightarrow \mathcal{S}_r^{m_t} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & \mathcal{W}_r^{m_1} & & \mathcal{W}_r^{m_2} & & \dots & \mathcal{W}_r^{m_t} \end{array}.$$

Придем к формуле

$$\mathcal{S}_r^m = \mathcal{S}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_r^{m_1}. \quad (11)$$

Здесь $\mathcal{S}_r^{m_t} = \mathcal{S}_r^1$ — одномерное комплексное пространство с образующей функцией $\mu_0^t(j) \equiv N^{2r-1}$.

6. Введем в $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ вейвлетный базис. Для этого положим

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \frac{w_k^{\nu+1}(j)}{\|w_k^{\nu+1}\|}. \quad (12)$$

Очевидно, что $\theta_r^{\nu+1} \in \mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.

ЛЕММА 7. Сдвиги $\theta_r^{\nu+1}(j - ln_{\nu+1})$, $l = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$, образуют вещественный ортонормированный базис в $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (10)

$$\theta_r^{\nu+1}(j - ln_{\nu+1}) = \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \frac{\omega_{m_{\nu+1}}^{-kl}}{\|w_k^{\nu+1}\|} w_k^{\nu+1}(j).$$

Далее,

$$\langle \theta_r^{\nu+1}(\cdot - ln_{\nu+1}), \theta_r^{\nu+1}(\cdot - sn_{\nu+1}) \rangle = \frac{1}{m_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \omega_{m_{\nu+1}}^{k(s-l)} = \delta_{m_{\nu+1}}(s-l).$$

Тем самым установлено, что сплайны $\theta_r^{\nu+1}(j - ln_{\nu+1})$, $l = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$, принадлежат подпространству $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ и образуют в нем ортонормированный базис.

Покажем, что функция $\theta_r^{\nu+1}(j)$ принимает только вещественные значения. Для этого перепишем формулу (12) с учетом (8) в виде

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \frac{d^{\nu}(k)}{\|w_k^{\nu+1}\|} \mu_k^{\nu}(j). \quad (13)$$

Обозначим $\sigma^{\nu}(k) = d^{\nu}(k)/(\sqrt{m_{\nu+1}} \|w_k^{\nu+1}\|)$. Отметим, что последовательность $\{\sigma^{\nu}(k)\}$ является четной. По определению

$$\mu_k^{\nu}(j) = \frac{1}{m_{\nu}} \sum_{p=0}^{m_{\nu}-1} Q_r^{\nu}(j - pn_{\nu}) \omega_{m_{\nu}}^{kp}, \quad (14)$$

где Q_r^{ν} – B -сплайн, соответствующий параметрам m_{ν} , n_{ν} . Подставив (14) в (13), получим

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=0}^{m_{\nu}-1} b^{\nu}(p) Q_r^{\nu}(j - pn_{\nu}).$$

Здесь $b^{\nu}(p) = m_{\nu}^{-1} \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \sigma^{\nu}(k) \omega_{m_{\nu}}^{kp}$. Поскольку $\{\sigma^{\nu}(k)\}$ – четная последовательность, то коэффициенты $b^{\nu}(p)$ вещественны. B -сплайн Q_r^{ν} также принимает только вещественные значения. Значит, и вейвлет $\theta_r^{\nu+1}(j)$ принимает только вещественные значения. Лемма доказана.

Напомним, что $d^{\nu}(0) = 0$, поэтому формулу (13) можно записать так:

$$\theta_r^{\nu+1}(j) = \sum_{k=1}^{m_{\nu}-1} \sigma^{\nu}(k) \mu_k^{\nu}(j).$$

Отсюда, в частности, следует, что $\sum_{j=0}^{N-1} \theta_r^{\nu+1}(j) = 0$.

Объединяя формулу (11) и лемму 7, приходим к основному результату – вейвлетному разложению пространства $\mathcal{S}_r^m$.

ТЕОРЕМА 2. При $m = 2^t$ любой сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ допускает представление

$$S(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^t \sum_{l=0}^{m_\nu-1} \beta^\nu(l) \theta_r^\nu(j - l n_\nu). \quad (15)$$

7. По-прежнему считаем, что $m = 2^t$. Возьмем дискретный периодический сплайн $S(j)$ вида (2) и положим

$$\xi^0(k) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \omega_m^{-kp}.$$

Получим

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^0(k) \mu_k^0(j). \quad (16)$$

Вместе с тем, сплайн S допускает представление

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \xi^1(k) \mu_k^1(j) + \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l) \theta_r^1(j - l n_1). \quad (17)$$

Выведем формулы перехода от разложения (16) к разложению (17). Имеем

$$\begin{aligned} \xi^1(s) \|\mu_s^1\|^2 &= \langle S, \mu_s^1 \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^0(k) \mu_k^0, c^0(s) \mu_s^0 + c^0(s + m_1) \mu_{s+m_1}^0 \right\rangle \\ &= \xi^0(s) c^0(s) \|\mu_s^0\|^2 + \xi^0(s + m_1) c^0(s + m_1) \|\mu_{s+m_1}^0\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\xi^1(k) = c^0(k) \frac{\|\mu_k^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2} \xi^0(k) + c^0(k + m_1) \frac{\|\mu_{k+m_1}^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2} \xi^0(k + m_1).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \beta^1(s) &= \langle S, \theta_r^1(\cdot - s n_1) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^0(k) \mu_k^0, \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{d^0(k) \omega_{m_1}^{-ks}}{\sqrt{m_1} \|w_k^1\|} \mu_k^0 \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\overline{d^0(k)} \|\mu_k^0\|^2}{\sqrt{m_1} \|w_k^1\|} \xi^0(k) \omega_{m_1}^{ks}. \end{aligned}$$

Положим $\eta^1 = \mathcal{F}_{m_1}(\beta^1)$, где $\mathcal{F}_{m_1}$ – дискретное преобразование Фурье порядка m_1 . Компоненты сигнала η^1 вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \eta^1(l) &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\overline{d^0(k)} \|\mu_k^0\|^2}{\sqrt{m_1} \|w_k^1\|} \xi^0(k) \sum_{s=0}^{m_1-1} \omega_{m_1}^{s(k-l)} \\ &= \sqrt{m_1} \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\overline{d^0(k)} \|\mu_k^0\|^2}{\|w_k^1\|} \xi^0(k) \delta_{m_1}(k - l) \\ &= \sqrt{m_1} \frac{\|\mu_l^0\| \|\mu_{l+m_1}^0\|}{\|\mu_l^1\|} [c^0(l + m_1) \xi^0(l) - c^0(l) \xi^0(l + m_1)] \omega_{m_0}^{-l}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались определением $d^0(k)$ и формулой (9). Вектор коэффициентов β^1 восстанавливается теперь по формуле обращения $\beta^1 = \mathcal{F}_{m_1}^{-1}(\eta^1)$.

В общем случае для разложения сплайна $S \in \mathcal{S}_r^m$ по вейвлетному базису можно использовать следующую рекуррентную схему:

$$\begin{aligned}\xi^{\nu+1}(k) &= c^\nu(k) \frac{\|\mu_k^\nu\|^2}{\|\mu_k^{\nu+1}\|^2} \xi^\nu(k) + c^\nu(k + m_{\nu+1}) \frac{\|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|^2}{\|\mu_k^{\nu+1}\|^2} \xi^\nu(k + m_{\nu+1}), \\ \eta^{\nu+1}(k) &= \sqrt{m_{\nu+1}} \frac{\|\mu_k^\nu\| \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|}{\|\mu_k^{\nu+1}\|} [c^\nu(k + m_{\nu+1}) \xi^\nu(k) - c^\nu(k) \xi^\nu(k + m_{\nu+1})] \omega_{m_\nu}^{-k}.\end{aligned}$$

Здесь $k = 0, 1, \dots, m_{\nu+1} - 1$, $\nu = 0, 1, \dots, t - 1$. В результате придем к представлению (15), в котором $\alpha = \xi^t(0) \mu_0^t(j) = \xi^t(0) N^{2r-1}$ и $\beta^\nu = \mathcal{F}_{m_\nu}^{-1}(\eta^\nu)$ при $\nu = 1, \dots, t$.

8. Рассмотрим обратную задачу перехода от представления (15) с $\alpha = \xi^t(0) N^{2r-1}$ к представлению (16). Сделаем последний шаг преобразования. С учетом (7) и (13) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m_1-1} \xi^1(k) \mu_k^1(j) &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi^1(k) c^0(k) \mu_k^0(j), \\ \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l) \theta_r^1(j - l n_1) &= \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l) \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{d^0(k) \omega_{m_1}^{-kl}}{\sqrt{m_1} \|w_k^1\|} \mu_k^0(j) \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{d^0(k)}{\sqrt{m_1} \|w_k^1\|} \mu_k^0(j) \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta^1(l) \omega_{m_1}^{-kl} \\ &= \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\omega_{m_0}^k c^0(k + m_1) \|\mu_{k+m_1}^0\|}{\sqrt{m_1} \|\mu_k^0\| \|\mu_k^1\|} \eta^1(k) \mu_k^0(j),\end{aligned}$$

где $\eta^1 = \mathcal{F}_{m_1}(\beta^1)$. Следовательно,

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \left[c^0(k) \xi^1(k) + \frac{\omega_{m_0}^k c^0(k + m_1) \|\mu_{k+m_1}^0\|}{\sqrt{m_1} \|\mu_k^0\| \|\mu_k^1\|} \eta^1(k) \right] \mu_k^0(j).$$

В общем случае преобразование коэффициентов выполняется по формуле

$$\xi^\nu(k) = c^\nu(k) \xi^{\nu+1}(k) + \frac{\omega_{m_\nu}^k c^\nu(k + m_{\nu+1}) \|\mu_{k+m_{\nu+1}}^\nu\|}{\sqrt{m_{\nu+1}} \|\mu_k^\nu\| \|\mu_k^{\nu+1}\|} \eta^{\nu+1}(k).$$

Здесь $k = 0, 1, \dots, m_\nu - 1$, $\nu = t - 1, t - 2, \dots, 0$. Считаем, что последовательности с индексом $\nu + 1$ продолжены периодически с периодом $m_{\nu+1}$.

9. На рис. 1 представлены графики вейвлетов $\theta_2^5(j), \theta_2^4(j), \dots, \theta_2^1(j)$ при $m = 32 = 2^5$ и $n = 3$.

10. В непрерывном случае аналогичные вопросы рассматривались в работах [2]–[4]. Теория кратно-масштабного анализа пространства $\mathbb{C}_N$ построена в [5].

Рис. 1

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Behr M. G., Malozemov V. N., Pevnyi A. B. A discrete version of spline-operational calculus. // International Conference on Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts. St. Petersburg, 1995. P. 35.
- [2] Kamada M., Toraichi K., Mori R. Periodic spline orthogonal bases // J. Approx. Theory. 1988. V. 55. № 1. P. 27–34.
- [3] Желудев В. А. О вейвлетах на базе периодических сплайнов // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 9–13.
- [4] Narcowich F. J., Ward J. D. Wavelets associated with periodic basis functions // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. V. 3. № 1. P. 40–56.
- [5] Петухов А. П. Периодические дискретные всплески // Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 3. С. 151–183.

Сыктывкарский государственный университет
 (В. А. Кирушев, А. Б. Певный)
 Санкт-Петербургский государственный университет
 (В. Н. Малоземов)

Поступило
 11.10.1996
 Исправленный вариант
 01.01.1997