Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев, Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 276–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:37:29

Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев

Для функций, определенных на стратифицированных множествах, выводится необходимое условие экстремума в терминах интегралов от нормальной производной по сферам. На этой основе получается доказательство сильного принципа максимума для дивергентного оператора на стратифицированном множестве.

Библиография: 9 названий.

Доказательство сильного принципа максимума для достаточно общих эллиптических операторов существенно упростилось с появлением леммы о производной по внутреннему направлению, доказанной независимо Олейник и Хопфом (см. их работы [1], [2], см. также [3]). В комбинации со стандартным необходимым условием экстремума, утверждающим, что в точке внутреннего экстремума производная по любому направлению равна нулю, это дает простое доказательство сильного принципа максимума. При этом достаточно воспользоваться частным случаем леммы Олейник–Хопфа – так называемой леммой о нормальной производной. Попытки перенести сильный принцип максимума на эллиптические уравнения на стратифицированном множестве на основе леммы о нормальной производной не принесли заметного прогресса. В общем случае аналог леммы о нормальной производной так и не получен. Это связано в конечном итоге со сложной геометрией стратифицированного множества. Однако недавно удалось получить продвижение в доказательстве сильного принципа максимума для аналога лапласиана на стратифицированном множестве. В основу доказательства (см. работу [4]) положено более слабое (и для вычислительных целей бесполезное) необходимое условие экстремума, утверждающее, что если X – точка нетривиального внутреннего максимума (точные определения см. ниже) гладкой функции u , то найдутся такие сферы сколь угодно малых радиусов с центром в X , что интегралы от нормальной производной u по этим сферам отрицательны. Если воспользоваться этим утверждением, то сильный принцип максимума, например, для классического оператора Лапласа немедленно

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (контракт 02.740.11.0613).

следует из того факта, что интеграл от нормальной производной гармонической функции равен нулю по любой гладкой замкнутой поверхности.

В этой статье мы получаем дальнейшее обобщение этой леммы, приводящее к доказательству сильного принципа максимума для широкого класса эллиптических операторов на стратифицированных множествах.

1. Стратифицированные множества. К сожалению, при описании эллиптического оператора на стратифицированном множестве не удается избежать некоторой громоздкости. Вдобавок, в известной литературе отсутствует достаточно подробное описание этого объекта. В связи с этим наше изложение содержит много технических деталей. Мы начнем с понятия стратифицированного множества.

Под *стратифицированным множеством* мы понимаем подмножество Ω пространства $\mathbb{R}^d$, представленное в виде объединения

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{d(\Omega)} \left(\bigcup_{j=1}^{n(k)} \sigma_{kj} \right) \quad (1.1)$$

конечного числа многообразий (стратов) σ_{kj} – подмногообразий пространства $\mathbb{R}^d$. Здесь $d(\Omega)$ – максимальная размерность входящих в Ω стратов, а $n(k)$ – количество стратов размерности k .

Всюду далее предполагается, что $\mathbb{R}^d$ наделено стандартной топологией, порожденной открытыми шарами в евклидовой метрике. Эта топология индуцирует топологию на Ω как на подмножестве $\mathbb{R}^d$, т.е. открытыми в Ω множествами объявляются пересечения Ω с открытыми множествами из $\mathbb{R}^d$.

В обозначении σ_{kj} первый индекс показывает размерность страта, а второй – его номер при автономной, как это видно из (1.1), нумерации стратов данной размерности k ; если первый или второй индекс являются арифметическими выражениями, мы будем использовать запятую для отдаления первого индекса от второго. Будем писать $\sigma_{kj} \succ \sigma_{li}$ и говорить, что σ_{kj} *примыкает* к σ_{li} , если $k > l$ и $\sigma_{li} \subset \partial\sigma_{kj}$. Здесь $\partial\sigma_{kj}$ означает границу страта σ_{kj} в упомянутой выше топологии; легко видеть, что она равна разности $\bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$. Черта над буквой, как всегда, означает замыкание. Замыкание в относительной топологии совпадает с замыканием в объемлющем пространстве. Всюду далее предполагаются выполненными следующие условия:

- замыкания двух произвольных стратов либо не пересекаются, либо их пересечение состоит из стратов, фигурирующих в объединении (1.1),
- граница страта σ_{kj} – множество $\partial\sigma_{kj}$ – является объединением стратов меньшей чем k размерности,
- для любой точки $X \in \sigma_{k-1,i} \subset \Omega$ найдется шар $B_r(X)$ в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^d$ и такой диффеоморфизм $\Phi: B_r(X) \rightarrow B_r(X)$, что образ “звезды”, состоящей из страта $\sigma_{k-1,i}$ и всех k -мерных стратов, примыкающих к нему, выглядит как часть $(k-1)$ -мерной плоскости (образа страта $\sigma_{k-1,i}$) с примыкающими к ней частями k -мерных полуплоскостей (образами k -мерных стратов, примыкающих к $\sigma_{k-1,i}$); разумеется, рассматривается только часть упомянутой звезды, попавшая внутрь шара.

Следует заметить, что стратифицированные множества были введены в связи с задачами, далекими от рассматриваемых в нашей работе. В связи с этим известные определения стратифицированных множеств отличаются от приведенного нами. Отличие состоит именно в последнем условии. Например, в работе [5], посвященной топологическому исследованию особенностей Ландау, вместо условия с) накладываются два условия регулярности, называемые условиями Уитни. Несмотря на существенное отличие нашего условия с) мы, тем не менее, позволим себе употреблять термин “стратифицированное множество” в отношении объекта, рассматриваемого нами.

Следующий рисунок иллюстрирует суть условия с).

Рис. 1. Локальное выпрямление звезды

Стандартное определение такого объекта как клеточный комплекс, предполагает его задание в виде тройки (Ω, Σ, ϕ) , где ϕ – отображение, описывающее “способ сборки” множества Ω из элементов множества всех стратов Σ (клеток). В нашем случае это не требуется, поскольку Ω , а также его страты рассматриваются как подмножества $\mathbb{R}^d$, а потому положение каждого σ_{kj} в Ω фиксировано вложением Ω в $\mathbb{R}^d$. В порядке обобщения можно было бы и не предполагать, что Ω вложено в $\mathbb{R}^d$. Однако, поскольку принципиально новых трудностей (с точки зрения теории дифференциальных уравнений) при этом не возникает, мы сделали выбор в пользу простоты описания основного объекта.

В дальнейшем также предполагается, что множество Ω является связным и разбито на два подмножества Ω_0 и $\partial\Omega_0$. В качестве Ω_0 можно взять любое открытое связное подмножество в Ω , составленное из стратов и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$. Граница последнего множества, обозначаемая через $\partial\Omega_0$ оказывается тогда разностью $\Omega \setminus \Omega_0$. Формально допустимым является и случай $\Omega = \Omega_0$, так как в индуцированной топологии множество Ω является открытым. Граница Ω_0 в этом случае пуста.

В условиях рис. 2 имеем 10 различных разбиений множества Ω на пары $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, включая случай $\partial\Omega_0 = \emptyset$. Поскольку задание одного элемента пары однозначно определяет второй ее элемент, то достаточно описать возможные $\partial\Omega_0$. Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае граница не может содержать двумерный страт и страт σ_{12} , поскольку в противном случае Ω_0 не совпадало бы с Ω . Нельзя в $\partial\Omega_0$ включить и страт σ_{04} , поскольку в противном случае соответствующее Ω_0 не

Рис. 2. К разбиению на пары $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$

было бы связным. Но тогда в силу замкнутости границы нельзя включить страты σ_{13} и σ_{14} , поскольку тогда σ_{04} автоматически был бы включен как входящий в замыкание этих стратов.

Тем самым, множество $\partial\Omega_0$ можно строить, только используя страты σ_{0i} , $i = 1, 2, 3$, и страт σ_{11} . Ввиду упомянутой выше замкнутости границы $\partial\Omega_0$ включение в нее страта σ_{11} влечет автоматическое включение и нульмерных стратов, примыкающих к нему. В данном примере, как теперь нетрудно убедиться, имеется 10 вариантов границы. Из них $\partial\Omega_0 = \sigma_{11} \cup (\bigcup_{i=1}^3 \sigma_{0i})$ является максимально возможной по включению границей.

2. Стратифицированная мера. Пусть μ_k означает k -мерную меру Лебега на страте σ_{kj} . Ради упрощения обозначений мы не указываем зависимость меры от номера страта. При желании можно также рассматривать μ_k как меру Лебега на несвязной k -мерной поверхности в $\mathbb{R}^d$, составленной из всех k -мерных стратов.

Мера μ на Ω конструируется из отдельных мер μ_k так, что $\mu(\omega)$ для произвольного множества $\omega \subset \Omega$ определяется как сумма

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}). \quad (2.1)$$

В дальнейшем символ под знаком суммирования означает, что суммирование ведется по всем возможным значениям этого символа. В рассматриваемом случае суммирование производится по всем стратам из Ω .

Чтобы формула (2.1) имела смысл, нужно, чтобы имели смысл отдельные слагаемые, входящие в нее. В силу этого мы вынуждены потребовать, чтобы при каждом k пересечения ω со всеми стратами σ_{kj} были μ_k -измеримы. Такие множества ω мы будем называть μ -измеримыми. Нетрудно проверить, что μ -измеримые множества составляют σ -алгебру, а функция μ , определенная на этой σ -алгебре обладает всеми свойствами меры.

Имеется еще один смысловой вопрос, связанный с формулой (2.1). Если интерпретировать меру μ_k как k -мерный объем, то слагаемые этой формулы имеют различную размерность. С математической точки зрения здесь нет проблемы, поскольку мера – это числовая функция с определенными свойствами и не более того. Если

же формула обсуждается в контексте некоторой физической задачи, то в ней складываются некоторые физические величины, а они имеют размерность. Однако, физический контекст задачи может, как раз, подсказать разумную интерпретацию формулы.

Например, пусть требуется вычислить массу, распределенную по стратифицированному множеству так, что соответствующая плотность ρ постоянна на каждом страте и имеет физическую размерность kg/m^k , где k – геометрическая размерность страта. Очевидно, что искомая масса равна сумме

$$\mu(\Omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \rho_{kj} \mu_{kj}(\sigma_{kj}),$$

в которой все слагаемые имеют размерность массы.

Интеграл Лебега μ -измеримой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ по мере μ оказывается равным сумме интегралов Лебега по отдельным стратам, т.е. имеет место формула

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj}} \int_{\sigma_{kj}} f d\mu_k.$$

В физических приложениях интегрируются функции, размерность которых меняется от страта к страту так, что получается физически осмысленный результат.

В дальнейшем нам понадобится определение аналога гладкой поверхности $S \subset \Omega$ и понятие интегрирования по поверхности. Пусть $\hat{S}$ – некоторая замкнутая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^d$, ограничивающая связную область $\hat{V}$. Если $\hat{S}$ не пересекается с $\partial\Omega_0$ и трансверсально пересекает страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$, а пересечение $V = \hat{V} \cap \Omega_0$ связно, то V будет называться *стратифицированной областью* в Ω_0 , а ее граница $S = \hat{S} \cap \Omega_0$ – *гладкой стратифицированной поверхностью* в Ω_0 .

Поверхность S можно рассматривать как стратифицированное множество (не обязательно связное), стратами которого объявляются пересечения со стратами исходного стратифицированного множества Ω_0 , которые будем обозначать $\sigma_{k-1,j}^S = \sigma_{kj} \cap S$. Мера на S вводится так же, как и выше, и будет обозначаться через μ_S . При интегрировании по стратифицированной поверхности будет предполагаться, что интегрирование ведется по этой мере.

Особый интерес представляет случай стратифицированной сферы. Такие r , при которых пересечение сферы в $\mathbb{R}^d$ с Ω_0 является стратифицированной поверхностью $S_r(X)$, будем называть *допустимыми*. Мера будет обозначаться через μ_r без явного указания сферы в обозначении.

3. Оператор дивергенции на стратифицированном множестве. Здесь приводится основное для данной работы понятие. Начнем с определения касательного векторного поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторное поле $\vec{F}$ назовем *касательным* к Ω_0 , если для каждого $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и каждой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному (в обычном смысле) пространству $T_X \sigma_{kj}$ к страту σ_{kj} в точке X .

Пусть $\vec{F}$ – касательное векторное поле на Ω_0 , непрерывное на каждом страте. В целом на Ω_0 непрерывность поля не предполагается, а в физических задачах,

приводящих к уравнениям на стратифицированных множествах, обсуждать ее просто бессмысленно, поскольку на разных стратах поле имеет различную физическую размерность. Иными словами, касательное векторное поле – это набор полей на отдельных стратах, никак не связанных между собой. Пусть, далее, $X \in \Omega_0$, а S – гладкая поверхность, охватывающая X . Поток векторного поля через поверхность S во внешнюю сторону определяется с помощью интеграла

$$\Phi_{\vec{F}}(S) = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\mu_S, \quad (3.1)$$

где $\vec{\nu}$ в произвольной точке $Y \in \sigma_{k-1,j}^S \subset S$ – единичная внешняя нормаль к $\sigma_{k-1,j}^S$ в этой точке, лежащая в касательном пространстве к σ_{kj} . Напомним, что $\sigma_{k-1,j}^S = \sigma_{kj} \cap S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дивергенцией поля $\vec{F}$ в точке $X \in \sigma_{kj}$ называется предел

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \lim_{S \rightarrow X} \frac{\Phi_{\vec{F}}(S)}{\mu(\sigma_{kj} \cap V)}, \quad (3.2)$$

где V – часть стратифицированного множества, попавшая внутрь S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Через $\vec{C}^1(\Omega_0)$ обозначим множество касательных векторных полей, обладающих следующими свойствами:

- сужения поля $\vec{F}$ на каждый страт непрерывны;
- интеграл (3.1) существует для всех $X \in \Omega_0$ и охватывающих X поверхностей;
- предел (3.2) существует в каждой точке $X \in \Omega_0$.

При дополнительных требованиях на гладкость поля можно дать выражение для дивергенции в более привычных терминах. А именно, предположим, что поле $\vec{F}$ имеет дифференцируемые сужения на страты из Ω_0 . Пусть, кроме того, его сужение на каждый страт σ_{kj} допускает продолжение по непрерывности на любой страт $\sigma_{k-1,i} \prec \sigma_{kj}$. Обозначим значение этого продолжения в точке $X \in \sigma_{k-1,i}$ через $\vec{F}(X + 0 \cdot \nu_j)$; оно никак не связано со значением $\vec{F}(X)$ поля $\vec{F}$ в этой же точке. В обозначении $\vec{F}(X + 0 \cdot \nu_j)$ вектор ν_j – единичный вектор в точке X , направленный в σ_{kj} . Здесь он нужен лишь для того, чтобы указать с какого страта берется продолжение.

Обозначим через $\vec{F}_{\nu_i}$ проекцию вектора $\vec{F}(X + 0 \cdot \nu_j)$ на направление $\vec{\nu}_j$ (теперь ν_i используется по существу). Тогда при сделанных предположениях относительного векторного поля приходим к следующему выражению для дивергенции:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}_{\nu_i}(X). \quad (3.3)$$

Здесь ∇_k служит для обозначения классического оператора дивергенции на k -мерном страте. Такое обозначение применяется во избежание путаницы, поскольку обычным значком ∇ мы обозначаем дивергенцию на стратифицированном множестве. Для простоты вторую сумму мы будем также обозначать $\{\vec{F}\}_{\nu}$. Так что дивергенция может быть записана также в виде

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \{\vec{F}\}_{\nu}(X).$$

Рис. 3. К вычислению дивергенции

Если страт σ_{kj} не примыкает к стратам на единицу большей размерности, – так будет, например, в стратах старшей размерности – то определенная нами дивергенция совпадает с классической. В нульмерных стратах, напротив, отсутствует классическая часть, поскольку нульмерная дивергенция равна нулю; здесь оператор ∇ формально не содержит дифференцирований.

Приведем вывод выражения (3.3) в простом случае, когда страты являются “плоскими”, а поверхность является сферой, как это показано на рис. 3. Ради наглядности мы рассматриваем случай, когда X является точкой одномерного страта σ_{1j} , как показано на этом рисунке.

Вычислим поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность $S_r(X)$ наружу. Этот поток складывается из потока через точки A и B – 0-мерные страты сферы, полученные пересечением σ_{1j} со сферой, через дуги γ_i – 1-мерные страты, полученные пересечением стратов $\sigma_{2i} \succ \sigma_{1j}$ с этой же сферой, и через три двумерных страта, заключенных между дугами γ_i . Заметим, что потоки через двумерные страты сферы пропорциональны их площадям, а потоки через дуги пропорциональны их длинам. Оказывается, что суммарный поток через точки A и B также пропорционален длине, а именно длине отрезка AB . Поэтому вклад в поток от двумерных участков пренебрежимо мал по сравнению со вкладом остальных участков; при стремлении радиуса сферы к нулю он убывает как квадрат длины, в то время как остальные убывают как длина. Мы, следовательно, можем сосредоточиться на вычислении потоков через точки A и B и дуги γ_i , $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим сначала поток через γ_i . Поле $\vec{F}$ в силу сделанных предположений может быть продолжено по непрерывности со страта σ_{2i} в точки страта σ_{1j} , содержащего отрезок $[A, B]$. Продолженное так поле в соответствии со сказанным выше обозначается через $\vec{F}(Y + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$. Тогда из стандартной теоремы о дивергенции, выражающей поток векторного поля через дивергенцию, получаем

$$\int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{\nu} dl - \int_{[A,B]} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_i dl = \int_{\sigma_{2i} \cap \hat{S}_r(X)} \nabla_2 \cdot \vec{F}(Y + 0 \cdot \vec{\nu}_i) ds,$$

где ∇_2 – обычный двумерный оператор дивергенции, а $\vec{\nu}$ – нормаль к дуге γ_i , лежащая в плоскости страта σ_{2i} и направленная наружу. Это соотношение показывает, что при достаточно малом r поток через γ_i можно заменить на $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i \Delta l$ с точностью до величины порядка $o(\Delta l)$. Множитель при Δl , т.е. $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ обозначим через $\vec{F}_{\nu_i}(X)$.

Так как сужение поля $\vec{F}$ на σ_{1j} гладко, то суммарный поток через точки A и B можно с помощью одномерной теоремы о дивергенции (т.е. формулы Ньютона–Лейбница) записать в виде интеграла от производной $\vec{F}' = \nabla_1 \cdot \vec{F}$ – одномерной дивергенции по отрезку $[A, B]$. Этот интеграл приближенно заменим величиной $\nabla_1 \cdot \vec{F}(X) \Delta l$.

Окончательно получаем, что суммарный поток через сферу $S_r(X)$ с точностью до бесконечно малой $o(\Delta l)$ равен

$$\left(\nabla_1 \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{2i} \succ \sigma_{1j}} \vec{F}_{\nu_i}(X) \right) \Delta l.$$

Заметив теперь, что $\Delta l = \mu(\sigma_{1j} \cap B_r(X))$, мы видим, что (3.2) влечет (3.3) по крайней мере в ситуации, изображенной на рисунке. В общем случае доказательство чуть более громоздко.

4. Эллиптический оператор на стратифицированном множестве. Мы будем рассматривать дифференциальный оператор вида $\nabla \cdot (p \nabla u) - qu$. Выше говорилось, что непрерывность касательного векторного поля на стратифицированном множестве – физически бессмысленное понятие. То же относится к коэффициентам рассматриваемых далее уравнений, а также к правым частям. Однако непрерывность решения – естественное условие во многих физических задачах. В связи с этим в рассмотрение вводятся следующие классы скалярных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество функций, имеющих непрерывные сужения на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$, обозначается через $C_\sigma(\Omega_0)$. Значок σ означает, что требование непрерывности действует только в пределах каждого страта.

Этому классу будут принадлежать коэффициенты p и q .

Следующий класс функций определяется для решений эллиптических уравнений и неравенств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $p \in C_\sigma(\Omega_0)$. Через $C_p^2(\Omega_0)$ обозначим множество непрерывных на Ω_0 функций, сужения которых дифференцируемы на каждом страте из Ω_0 и таких, что $p \nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. При $p \equiv 1$ будем использовать обозначение $C^2(\Omega_0)$.

Для функций из $C_p^2(\Omega_0)$ имеет смысл следующий оператор:

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (p \nabla u),$$

который естественно назвать *эллиптическим* хотя бы из-за его вида; естественного понятия символа оператора на стратифицированном множестве нет, а потому нет и стандартного определения эллиптичности. При $p \equiv 1$ мы приходим к точному аналогу оператора Лапласа на стратифицированном множестве, обозначаемому

через Δ . Как обычно, p предполагается строго положительным на Ω_0 в том смысле, что $p \geq \epsilon > 0$.

Если на p наложить дополнительные условия, как это делалось выше для получения выражения (3.3), то для $\Delta_p u$ можно дать следующее, более детальное выражение при $X \in \sigma_{kj}$:

$$\Delta_p u(X) = \nabla_k \cdot (p \nabla u)(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} (p \nabla u)_{\nu_i}(X) = \nabla_k \cdot (p \nabla u)(X) + \{p \nabla u\}_\nu. \quad (4.1)$$

5. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть g – непрерывная на $[0; a]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0; a]$ функция, $g(0) = 0$, $a < 1$. Если при всех $r \in [0; a]$ выполняется неравенство

$$\int_0^R r g'(r) dr \geq 0, \quad (5.1)$$

то при любых $R \in (0; a]$

$$g(R) \geq \int_0^R r g'(r) dr.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя в (5.1) по частям получаем после очевидных преобразований

$$\int_0^R r g'(r) dr = R g(R) - \int_0^R g(r) dr \geq 0 \quad (5.2)$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{R} \int_0^R g(r) dr \leq g(R).$$

Если предположить, что g может принимать отрицательные значения, то в точке ее минимума – обозначим ее R_0 – будет выполняться, как нетрудно заметить, неравенство

$$\frac{1}{R_0} \int_0^{R_0} g(r) dr > g(R_0),$$

противоречащее предыдущему. Следовательно, g обязана быть неотрицательной.

Возвращаясь к (5.2), получаем с учетом неотрицательности g

$$R g(R) = \int_0^R r g'(r) dr + \int_0^R g(r) dr \geq \int_0^R r g'(r) dr,$$

а так как $R \leq a < 1$, то

$$g(R) \geq R g(R) \geq \int_0^R r g'(r) dr.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f_0, \dots, f_n$ – непрерывные на $[0; a]$ и непрерывно дифференцируемые на $(0; a]$, $a < 1$, функции такие, что $f_i(0) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Тогда из неположительности функций f_i и неравенства

$$\int_0^R (r^n f_n'(r) + r^{n-1} f_{n-1}'(r) + \dots + f_0'(r)) dr \geq 0 \quad (5.3)$$

– при условии, что оно выполняется при любом $R \in [0, a]$ – следует $f_i(R) \equiv 0$ при всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводя очевидные преобразования, получим

$$\int_0^R r(r^{n-1}f'_n(r) + r^{n-2}f'_{n-1}(r) + \dots + f'_1(r)) dr \geq - \int_0^R f'_0(r) dr = -f_0(R) \geq 0. \quad (5.4)$$

Если через g обозначить

$$g(R) = \int_0^R (r^{n-1}f'_n(r) + r^{n-2}f'_{n-1}(r) + \dots + f'_1(r)) dr,$$

то по лемме 1

$$\int_0^R (r^{n-1}f'_n(r) + r^{n-2}f'_{n-1}(r) + \dots + f'_1(r)) dr \geq -f_0(R) \geq 0$$

или, эквивалентно,

$$\int_0^R r(r^{n-2}f'_n(r) + r^{n-3}f'_{n-1}(r) + \dots + f'_2(r)) dr \geq -f_0(R) - f_1(R) \geq 0. \quad (5.5)$$

Как видно, неравенство (5.5) аналогично (5.4) за тем лишь исключением, что в левой части последнего неравенства на одно слагаемое меньше. Продолжая таким образом процесс, за конечное число шагов получим

$$0 \geq -f_n(R) - \dots - f_0(R),$$

при любом $R \in [0, a]$, откуда следует, что $f_i(R) \equiv 0$.

6. Необходимое условие экстремума гладкой функции на стратифицированном множестве. В этом пункте мы предполагаем, что все страты “плоские” кроме, возможно, граничных стратов. Более точно мы предполагаем, что любой страт $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ является областью некоторого k -мерного линейного многообразия в $\mathbb{R}^d$. Доказательство строгого принципа максимума для произвольного стратифицированного множества может быть сведено к этому частному случаю.

Пусть $p \in C_\sigma(\Omega_0)$, причем $p > p_0 > 0$ на Ω_0 (такую функцию будем называть *строго положительной*). Наложим еще одно дополнительное условие на p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что функция p *регулярна в точке X* , если найдется функция $\hat{p}$, зависящая только от расстояния до X , определенная и положительная в некоторой ее окрестности и такая, что $\hat{p}p$ в этой окрестности убывает по любому направлению, выходящему из X .

Обсуждение простых достаточных условий, обеспечивающих регулярность, мы проведем позже, чтобы не прерывать доказательства строгого принципа максимума.

Пусть $u \in C_p^2(\Omega_0)$. Напомним, что принадлежность функции u этому классу предполагает, помимо прочего, существование интегралов (потоков) вида

$$\int_{S_R(X)} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu_R.$$

Итак, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \in \Omega_0$ – точка нетривиального локального максимума функции $u \in C_p^2(\Omega_0)$. Пусть, далее, $p \in C_\sigma(\Omega_0)$ регулярна в X и строго положительна. Тогда найдутся такие сколь угодно малые допустимые $R > 0$, что

$$\int_{S_R(X)} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu_R < 0,$$

где $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к стратифицированной сфере $S_R(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что точка X является началом сферической системы координат (r, ϕ) объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Будем также считать, что $u(X) = 0$, что, очевидно, не ограничивает общности. Для краткости мы не будем в обозначении сфер указывать центр; всюду это будет точка X .

Доказательство будем вести от противного. Пусть, вопреки утверждаемому, существует такое $\epsilon > 0$, что

$$\int_{S_R} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu_R \geq 0 \quad (6.1)$$

при всех $R \leq \epsilon$; при необходимости уменьшая ϵ можно считать, что все такие R являются допустимыми.

Обозначим через S_R^k объединение всех k -мерных стратов сферы S_R , $S_R^k = \bigcup_j \sigma_{kj}^S$, где $S = S_R$. Если теперь интеграл (6.1) переписать в виде суммы интегралов по отдельным участкам $S_R^k \subset S_R$, то неравенство может быть переписано в следующем виде:

$$\int_{S_R^0} p \frac{\partial u}{\partial \nu} ds_r^0 + \cdots + \int_{S_R^{n-1}} p \frac{\partial u}{\partial \nu} ds_r^{n-1} = \int_{\omega_0} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi + \cdots + r^m \int_{\omega_m} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi \geq 0, \quad (6.2)$$

где $m = d(\Omega) - 1$. Здесь мы воспользовались тем, что на k -мерном участке элемент “площади” ds_r^k выражается в сферических координатах формулой $ds_r^k = r^k d\phi$, где $d\phi$ – элемент площади единичной сферы, а ω_k – область изменения углов на рассматриваемом k -мерном участке.

В силу регулярности p найдется функция $\hat{p}$, в сферических координатах зависящая только от r и такая, что $\hat{p}r$ убывает по r . Умножая на $\hat{p}$ последнее неравенство и интегрируя по r от 0 до R , $R < \epsilon$, получаем следующее неравенство:

$$\int_0^R \hat{p} \int_{\omega_0} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi dr + \cdots + \int_0^R r^m \hat{p} \int_{\omega_m} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi dr \geq 0. \quad (6.3)$$

Здесь мы считаем, что функция $\hat{p}$ положительна, по крайней мере, в шаре радиуса ϵ . Если это не так, то ϵ следует уменьшить.

Так как функция $\hat{p}$ не зависит от ϕ , внесем ее под знак каждого из интегралов и обозначим произведение $p\hat{p}$ через $\tilde{p}$. В результате получаем неравенство

$$\int_0^R \int_{\omega_0} \tilde{p} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi dr + \cdots + \int_0^R r^m \int_{\omega_m} \tilde{p} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\phi dr \geq 0, \quad (6.4)$$

которое можно переписать в виде

$$\int_0^R (r^m f'_m(r) + r^{m-1} f'_{m-1}(r) + \dots + f'_0(r)) dr \geq 0, \quad (6.5)$$

если положить

$$f_i(R) = \int_0^R \int_{\omega_i} \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} d\phi dr.$$

Очевидно, что $f_i(0) = 0$ при $i = 1, \dots, m$, а из теоремы Бонне – см., например, [6], где она называется второй теоремой о среднем – выводится, что $f_i(R) \leq 0$ при всех $R \in [0, \epsilon]$. В самом деле, меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^R \int_{\omega_i} \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} d\phi dr = \int_{\omega_i} \int_0^R \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} dr d\phi.$$

Внутренний интеграл оценивается в силу теоремы Бонне

$$\int_0^R \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} dr = \tilde{p}(0, \phi) \int_0^{R'} \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} dr = \tilde{p}(0, \phi) u(R', \phi) \leq 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u(0, \phi) = 0$, $u(R', \phi) \leq 0$, так как X – точка максимума, и тем, что $\tilde{p}$ убывает по r . Интегрируя по углам, приходим к неравенству $f_i(R) \leq 0$.

Напомним, что неравенство (6.5) выполняется при любых $R \in [0, \epsilon]$. Тогда в силу леммы 2 получаем $f_i(R) \equiv 0$ при тех же R или, эквивалентно,

$$\int_0^R \int_{\omega_i} \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} d\phi dr \equiv 0.$$

Меняя порядок интегрирования

$$\int_{\omega_i} \int_0^R \tilde{p}(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} dr d\phi \equiv 0$$

и вспоминая, что при любом допустимом ϕ внутренний интеграл по r неположителен, получаем при фиксированном ϕ

$$\int_0^R p(r, \phi) \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} dr \equiv 0.$$

А так как это равенство выполняется при всех $R \in [0, \epsilon]$, то

$$\frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} = 0$$

при допустимых r и ϕ . Тогда в силу непрерывности u получаем $u \equiv \text{const}$ в некоторой окрестности X , что противоречит условию нетривиальности максимума.

Теперь все готово для доказательства следующей теоремы, являющейся точным аналогом сильного принципа максимума.

7. Формулировка и доказательство сильного принципа максимума.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u \in C_p^2(\Omega_0)$ является решением неравенства $\Delta_p u \geq 0$. Тогда u не может иметь точек локального нетривиального максимума в Ω_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что при допустимых r стратифицированный шар $B_r(X)$ является связным подмножеством Ω . В таком случае стратифицированную сферу $S_r(X)$ можно рассматривать как $\partial B_r(X)$ в том смысле, в котором мы понимаем границу связного стратифицированного множества. Тогда для векторных полей класса $\vec{C}^1(\Omega_0)$ имеет место аналог теоремы о дивергенции (подробности см. в [7]), которая в применении к стратифицированному шару допустимого радиуса приводит к следующей формуле:

$$\int_{B_r} \nabla \cdot \vec{F} d\mu = \int_{S_r} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\mu,$$

в которой $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к сфере.

Применяя это к векторному полю $p\nabla u$, получаем, что из неравенства $\Delta_p u \geq 0$ следует неравенство

$$\int_{S_R} p \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu \geq 0,$$

которое выполняется при всех допустимых r . Последнее в силу теоремы 1 несовместимо с наличием нетривиальных локальных максимумов в Ω_0 .

Отсюда стандартно получается такое следствие, являющееся аналогом сильного принципа максимума для более общего эллиптического оператора.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $q \in C_\sigma(\Omega_0)$ – неотрицательная функция, а $u \in C^2(\Omega_0)$ – решение неравенства $\Delta_p u - qu \geq 0$. Тогда u не может иметь в Ω_0 точек положительного локального нетривиального максимума.

8. Заключительные замечания. Здесь приводятся несколько существенных комментариев к полученным результатам.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сильный принцип максимума выполняется и без предположения о том, что все страты в Ω_0 являются плоскими.

Пусть X – точка локального нетривиального максимума функции $u \in C^2$, являющейся решением неравенства $\Delta_p u - qu \geq 0$. Из определения стратифицированного множества следует, что существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^d$, содержащая X , и такой диффеоморфизм Φ этой окрестности, что $\Phi(U \cap \Omega_0)$ выглядит как фрагмент “плоского” стратифицированного множества. Коэффициенты p, q и решение u переходят в функции на $\Phi(U)$, сохраняя ключевые для сильного принципа максимума свойства – положительность, непрерывность и т.д. Операции градиента и дивергенции определены нами инвариантно (координаты не участвовали в их определении). Поэтому неравенство $\Delta_p u - qu \geq 0$ на исходном множестве переходит в неравенство $\Delta_{\hat{p}} \hat{u} - \hat{q} \hat{u} \geq 0$ на “плоском” стратифицированном множестве. Здесь $\hat{p}, \hat{q}$ – функции на $\Phi(\Omega_0)$; например, $\hat{u}(Y) = u(\Phi^{-1}(Y))$, и аналогично определяются остальные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В формулировке сильного принципа максимума заменить нетривиальный локальный максимум на локальный максимум, вообще говоря, нельзя.

Пусть Ω_0 является объединением трех интервалов – одномерных стратов σ_{1j} – и одного нульмерного страта, являющегося общим концом этих интервалов. Полагая $p \equiv 1$. Пусть функция u обращается в нуль на страте σ_{11} , линейно растет от нуля на страте σ_{12} и линейно убывает от нуля с той же скоростью на σ_{13} . Тогда u является решением уравнения $\Delta u = 0$ (при $p \equiv 1$ мы пишем Δ вместо Δ_1). Мы видим, что все точки страта σ_{11} являются точками максимума (тривиального) функции u .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие регулярности, которому должен удовлетворять коэффициент p не является сильно ограничительным.

Например, данным свойством обладают функции, дифференцируемые на каждом страте и имеющие ограниченные градиенты. Функцию $\hat{p}$ в точке X_0 в этом случае можно определить так:

$$\hat{p}(X) = \alpha - \beta |X - X_0|,$$

где $\beta > \sup_{\Omega_0} |\nabla p|$, а α меньше любого предельного значения по всем стратам функции p в точке X_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие строгой положительности коэффициента p могут быть ослаблены.

Анализ наших доказательств показывает, что можно потребовать, чтобы на каждом страте коэффициент был либо тождественно нулевым, либо строго положительным. Но он должен быть положительным на так называемых свободных стратах. Страт называется *свободным*, если он не примыкает к другим своими внутренними точками. Таковы, например, страты максимальной размерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае $\Omega_0 = \Omega$, что эквивалентно $\partial\Omega_0 = \emptyset$, наши рассуждения могут быть упрощены.

Оказывается, что в этом случае неравенство $\Delta_p u - qu \geq 0$ (неотрицательность q по-прежнему предполагается) не имеет решений при $q \not\equiv 0$ и допускает лишь постоянные решения при $q \equiv 0$. Это является обобщением известной леммы Бохнера (см. [8]), в которой вместо Δ_p фигурирует оператор Лапласа–Бельтрами.

Конечно, это немедленно следует из доказанного нами принципа максимума. Но это же можно доказать и более элементарно, основываясь на формулах Грина. Это доказательство приведено нами в работе [9].

Второй из авторов выражает благодарность М. Аграновскому и А. И. Назарову за полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Олейник, “О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа”, *Матем. сб.*, **30**:3 (1952), 695–702.
- [2] E. Hopf, “A remark on linear elliptic differential equation of second order”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 791–793.
- [3] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

- [4] С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, “Об одном необходимом условии экстремума на стратифицированном множестве”, *ДАН*, **416**:1 (2007), 22–25.
- [5] F. Pham, *Introduction á l'étude topologique des singularités de Landau*, Mémoires des Sciences Mathématiques, **164**, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1967.
- [6] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Ч. 1, Наука, М., 1981.
- [7] О. Penkin, “About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions”, *Partial Differential Equations on Multistructures*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **219**, Marcel Dekker, New York, 2001, 183–191.
- [8] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [9] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, “О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах”, *Дифференц. уравнения*, **34**:8 (1998), 1107–1113.

С. Н. Ощепкова

Белгородский государственный университет

E-mail: oshepkova@bsu.edu.ru

Поступило

18.06.2010

О. М. Пенкин

Белгородский государственный университет

E-mail: penkin@bsu.edu.ru

Д. В. Савастеев

Белгородский государственный университет

E-mail: savasteev@gmail.com