Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ильин, О рангах идемпотентных матриц над полутелами, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 832–839

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:42:27

О рангах идемпотентных матриц над полутелами

С. Н. Ильин

Как известно, каждая положительная идемпотентная матрица имеет ранг 1. Доказано, что тем же свойством обладают все идемпотентные матрицы без нулей над многими полутелами и все такие полутела описаны.

Библиография: 7 названий.

Уже многие десятилетия неотрицательные и в том числе положительные матрицы (т.е. матрицы, все элементы которых неотрицательны или соответственно положительны) являются предметом активного изучения и источником многочисленных исследований в теории матриц. Поскольку множество неотрицательных вещественных чисел относительно обычных операций сложения и умножения образует полукольцо, то в связи с развитием общей теории полуколец и ее приложений естественным образом возникают вопросы о возможности обобщения тех или иных свойств неотрицательных матриц на случай матриц над различными классами полуколец. Матрицам над полукольцами посвящено большое количество работ (см., например, [1; гл. 19] и [2; гл. 5, 12]). В частности, весьма активно изучаются идемпотентные матрицы; упомянем здесь лишь некоторые публикации последних лет, содержащие результаты об идемпотентных матрицах над полукольцами [3]–[5].

Очевидно, что с точки зрения мультипликативных свойств элементов наиболее близкими к полукольцу неотрицательных вещественных чисел полукольцами являются полутела и полуполя.

Напомним, что под *полутелом* понимается полукольцо с делением, т.е. такая алгебраическая система $(S, +, \cdot, 0, 1)$, что $(S, +, 0)$ – коммутативный моноид, $(S \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ – группа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0x = x0 = 0$ для всех $x \in S$. Коммутативные полутела называют *полуполями*. Как правило, говоря о полутелах и полуполях, имеют ввиду “чистые” (т.е. не являющиеся телами и полями) полутела и полуполя. Мы также будем придерживаться этого соглашения. Отметим, что для всякого полутела S множество $S^* = S \setminus \{0\}$ замкнуто относительно операций сложения и умножения, поэтому обычно систему $(S^*, +, \cdot, 1)$ называют *полутелом без нуля*.

Нетрудно видеть, что ранг любой идемпотентной положительной матрицы A порядка n равен 1, иначе говоря, все ее столбцы (строки) пропорциональны и имеет место разложение $A = \bar{x}\bar{y}^T$, где $\bar{x}, \bar{y}$ – столбцы длины n . Для этого достаточно воспользоваться двумя классическими результатами – теоремой о жордановой нормальной форме матрицы и теоремой Перрона, либо известным фактом [6; теорема 8.5.1], согласно которому последовательность степеней любой положительной

матрицы, имеющей перронов корень 1, сходится к матрице вида $L = \bar{x}\bar{y}^T$. Основным результатом данной работы – теорема 5 – показывает, что аналогичное разложение справедливо для всякой идемпотентной матрицы без нулей над любым полутелом, удовлетворяющим достаточно слабому дополнительному условию.

Приведем предварительно несколько определений и примеров.

Полутело S называется *аддитивно идемпотентным*, если для любого $a \in S$ верно $a + a = a$. Полутело S *аддитивно сократимо*, если $a + c = b + c$ влечет $a = b$ для всех $a, b, c \in S$. Обобщая последнее определение, назовем полутело S *слабо аддитивно сократимым*, если $a + a = a + b$ влечет $a = b$ для всех $a, b \in S$. Очевидно, каждое аддитивно сократимое полутело слабо аддитивно сократимо, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно, что показывает следующий

ПРИМЕР 1 [1; пример 4.32]. Зададим на множестве $S = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cup \{(0, 0)\}$, где $\mathbb{R}_+^*$ – множество всех положительных вещественных чисел, операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (a', b') = \begin{cases} (a, b), & b > b', \\ (a', b'), & b < b', \\ (a + a', b), & b = b', \end{cases} \quad (a, b) \odot (a', b') = (aa', bb').$$

Непосредственно проверяется, что $(S, \oplus, \odot)$ – слабо аддитивно сократимое полуполе, не являющееся аддитивно сократимым.

В качестве дополнения к примеру 1 заметим, что для любого семейства $\{S_i\}_{i \in I}$ слабо аддитивно сократимых полутел их псевдопрямое произведение

$$\bigotimes_{i \in I} S_i = \left(\bigtimes_{i \in I} S_i^* \right) \cup \{0\}$$

(см. [1; гл. 2]) снова есть слабо аддитивно сократимое полутело, равно как и любое его подполутело, так что класс слабо аддитивно сократимых полутел значительно шире класса аддитивно сократимых полутел.

С другой стороны, легко видеть, что всякое аддитивно идемпотентное полутело не является слабо аддитивно сократимым. Как показывает следующий пример, и в этом случае обратное утверждение неверно.

ПРИМЕР 2. Возьмем в качестве S псевдопрямое произведение полуполя $\mathbb{Q}_+$ неотрицательных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения и полуполя $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$. Поскольку $(1, 0) + (1, -1) = (1, 0) + (1, 0) = (2, 0)$, полуполе S не является ни аддитивно идемпотентным, ни слабо аддитивно сократимым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ввиду мультипликативной обратимости всех ненулевых элементов полутела его аддитивная идемпотентность эквивалентна равенству $1 + 1 = 1$, а его аддитивная сократимость и слабая аддитивная сократимость эквивалентны импликациям $a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b$ и соответственно $a + 1 = 1 + 1 \Rightarrow a = 1$.

Обозначим через $M_n(S)$ полукольцо матриц порядка n над полутелом S . В дальнейшем нам не раз придется говорить о линейных комбинациях строк или столбцов,

при этом подразумевается, что в линейных комбинациях строк умножение на коэффициенты из S производится слева, а в линейных комбинациях столбцов – справа.

Напомним, что *столбцовым* (*строчным*) рангом матрицы A над полукольцом называется наименьшее возможное количество таких столбцов (строк) $X_1, \dots, X_k$, являющихся линейными комбинациями столбцов (строк) матрицы A , что любой столбец (строка) матрицы A линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$. *Факторизационным* рангом $(m \times n)$ -матрицы A называется наименьшее натуральное k такое, что для некоторой $(m \times k)$ -матрицы B и некоторой $(k \times n)$ -матрицы C верно $A = BC$.

Как и в случае вещественных матриц, легко видеть, что для матрицы $A \in M_n(S)$, $A \neq 0$, пропорциональность всех ее ненулевых столбцов (строк) равносильна существованию разложения $A = \bar{x}\bar{y}^T$, где $\bar{x}, \bar{y} \in S^n$ – столбцы длины n . Другими словами, для такой матрицы A столбцовый, строчный и факторизационный ранги равны 1. В этом случае считаем, что $\text{rank}(A) = 1$. (Подробнее о различных ранговых функциях для матриц над полукольцами см. [7].)

ЛЕММА 4. Пусть идемпотентная матрица $A \in M_n(S)$ имеет блочный вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right),$$

где блок B квадратный. Если $\text{rank}(B) = 1$, то $\text{rank}(A) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим порядок блока B через k . Поскольку $\text{rank}(B) = 1$, то для подходящих столбцов $\bar{x}, \bar{y} \in S^k$ справедливо разложение $B = \bar{x}\bar{y}^T$. С учетом идемпотентности A имеем

$$C = CB = C\bar{x}\bar{y}^T = \bar{z}\bar{y}^T, \quad \text{где } \bar{z} = C\bar{x} \in S^{n-k}.$$

Объединяя столбцы $\bar{x}$ и $\bar{z}$ в столбец $\bar{v} \in S^n$ и дополняя столбец $\bar{y} \in S^k$ необходимым количеством нулей до столбца $\bar{w} \in S^n$, получаем искомое разложение

$$A = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} (\bar{y}^T \quad 0) = \bar{v}\bar{w}^T.$$

Сформулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 5. Для полутела S следующие условия эквивалентны:

- 1) S слабо аддитивно сократимо или $S = \{0, 1\}$ – двухэлементное полуполе;
- 2) для любой идемпотентной матрицы $A \in M_n(S^*)$ выполнено $\text{rank}(A) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что полутело S содержит более двух элементов и не является слабо аддитивно сократимым. Покажем, что тогда найдется идемпотентная матрица без нулей, столбцы которой непропорциональны друг другу.

Сначала убедимся, что уравнение $x + 1 = 1 + 1$ имеет в S решение, отличное от 0 и 1. Действительно, либо полутело S не является аддитивно идемпотентным, и тогда существование отличного от 0 и 1 решения $a \in S$ вытекает из нарушения слабой аддитивной сократимости (см. замечание 3), либо S аддитивно идемпотентно и тогда $1 + 1 = 1$. В последнем случае возьмем произвольный элемент $a \in S$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Если $a + 1 = 1$, то искомое решение найдено. Если же $a + 1 \neq 1$, то, умножая

обе части равенства $a + 1 + 1 = a + 1$ на $b = (a + 1)^{-1} \neq 1$, получаем $1 + b = 1$, так что в качестве искомого решения можно взять элемент b .

Итак, пусть $a + 1 = 1 + 1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Ясно, что элемент $1 + 1$ коммутирует с любым элементом из S , поэтому тем же свойством обладает элемент $d = (1 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что матрица

$$A = d \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

идемпотентна, но ее столбцы, очевидно, непропорциональны друг другу.

1) $\Rightarrow$ 2). Если S – двухэлементное полуполе, то $S^* = \{1\}$ и для любой матрицы $A \in M_n(S^*)$ равенство $\text{rank}(A) = 1$ тривиально верно.

Рассмотрим оставшийся случай, когда полутело S слабо аддитивно сократимо. Как обычно, для столбцов матрицы $A \in M_n(S)$ будем использовать обозначения $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, а для строк – $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$. Следующие три леммы вполне очевидны.

ЛЕММА 6. Пусть $A, D \in M_n(S)$, причем матрица D диагональная обратимая. Совпадение некоторой ненулевой линейной комбинации столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_p)}$ с ненулевой линейной комбинацией столбцов $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_q)}$ равносильно совпадению некоторых ненулевых линейных комбинаций столбцов матрицы $D^{-1}AD$ с теми же номерами.

ЛЕММА 7. Пусть $A \in M_n(S)$, α – перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$ и $U = (u_{ij})$ – соответствующая ей перестановочная матрица, т.е. $u_{ij} = 1$, если $\alpha(i) = j$, и $u_{ij} = 0$ в противном случае. Совпадение некоторой ненулевой линейной комбинации столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_p)}$ с ненулевой линейной комбинацией столбцов $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_q)}$ равносильно совпадению линейных комбинаций с теми же коэффициентами столбцов матрицы $U^{-1}AU$ с номерами $\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_p)$ и $\alpha(j_1), \dots, \alpha(j_q)$.

ЛЕММА 8. Пусть $A, B, X \in M_n(S)$, причем матрица A идемпотентна. Если B обратима, то матрица $B^{-1}AB$ идемпотентна. Если $XA = A$, то матрица AX идемпотентна.

Доказательства следующих ниже лемм проводятся только для столбцов. Соответствующие утверждения для строк доказываются аналогично.

ЛЕММА 9. Пусть $n \geq 2$ и матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(S^*)$ идемпотентна. Если все элементы столбца $A^{(1)}$ равны друг другу, то для некоторого $d \in S^*$ верно

$$A^{(1)}d = A^{(2)} + \dots + A^{(n)}. \quad (1)$$

Аналогично, равенство всех элементов строки $A_{(1)}$ влечет

$$d'A_{(1)} = A_{(2)} + \dots + A_{(n)} \quad (1')$$

при подходящем $d' \in S^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_{11} = \dots = a_{n1} = a$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ обозначим i -й элемент столбца $A^{(2)} + \dots + A^{(n)}$ через b_i , т.е. $b_i = \sum_{j=2}^n a_{ij}$, и покажем, что $b_1 = \dots = b_n$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n = 2$ и, значит,

$$A = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ a & b_2 \end{pmatrix}.$$

Для $(1, 1)$ -элемента матрицы A в силу ее идемпотентности выполнено $a^2 + b_1a = a$. Умножая обе части этого равенства на a^{-1} справа, получаем $a + b_1 = 1$. Аналогично, рассматривая $(2, 1)$ -элемент матрицы A , получаем $a + b_2 = 1$. Наконец, для ее $(2, 2)$ -элемента верно $ab_1 + b_2^2 = b_2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} b_2 + b_2 &= ab_1 + b_2^2 + b_2 = ab_1 + b_2(b_2 + 1) = ab_1 + b_2(b_2 + a + b_1) \\ &= ab_1 + b_2(1 + b_1) = ab_1 + b_2 + b_2b_1 = (a + b_2)b_1 + b_2 = b_1 + b_2, \end{aligned}$$

так что $b_2 + b_2 = b_1 + b_2$, откуда $b_1 = b_2$ ввиду слабой аддитивной сократимости полутела S .

Пусть теперь $n \geq 3$. С учетом идемпотентности A для каждого $j = 1, \dots, n$ имеем

$$a = a_{j1} = \sum_{i=1}^n a_{ji}a_{i1} = \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \right) a = (a + b_j)a,$$

откуда

$$a + b_j = 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В силу той же идемпотентности A для всех $k = 2, \dots, n$ верно $a_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{nj}a_{jk}$. Суммируя эти равенства по k , получаем

$$b_n = \sum_{k=2}^n a_{nk} = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^n a_{nj}a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{nj} \left(\sum_{k=2}^n a_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n a_{nj}b_j. \quad (3)$$

С другой стороны, с учетом (2) имеем

$$b_n = \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} + a_{nn} = \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} \right) (a + b_n) + a_{nn} = \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj}a + \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} \right) b_n + a_{nn},$$

откуда ввиду (3) получаем

$$\begin{aligned} b_n + b_n &= a_{n1}b_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj}b_j + a_{nn}b_n + \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj}a + \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} \right) b_n + a_{nn} \\ &= ab_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj}(a + b_j) + b_n^2 + a_{nn} \\ &= ab_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_{nj} + b_n^2 + a_{nn} = ab_1 + b_n^2 + b_n. \end{aligned}$$

Заметим, что с учетом содержащихся в (2) равенств $a + b_1 = a + b_n = 1$ выражение $ab_1 + b_n^2 + b_n$ с помощью преобразований, аналогичных тем, что применялись выше для случая $n = 2$, приводится к виду $b_1 + b_n$, тем самым, верно $b_n + b_n = b_1 + b_n$, что в силу слабой аддитивной сократимости полутела S влечет $b_1 = b_n$.

Фиксируем произвольный индекс k , где $1 < k < n$. Обозначим через U перестановочную матрицу, отвечающую транспозиции $\tau = (k, n)$, и рассмотрим матрицу $\bar{A} = U^{-1}AU$. Положим $\bar{b}_i = \sum_{j=2}^n \bar{a}_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

Нетрудно видеть, что с учетом равенств $a_{11} = \dots = a_{n1} = a$ первый столбец идемпотентной матрицы $\bar{A}$ совпадает со столбцом $A^{(1)}$, так что все его элементы равны друг другу. Следовательно, для матрицы $\bar{A}$, как и для A , имеет место равенство $\bar{b}_1 = \bar{b}_n$. Заметим, что $\bar{b}_i = b_{\tau(i)}$ при любом i , откуда $b_1 = \bar{b}_1 = \bar{b}_n = b_k$, что ввиду произвольности k приводит к желаемым равенствам $b_1 = \dots = b_n$.

Итак, все элементы столбца $A^{(2)} + \dots + A^{(n)}$ равны b_1 , тем самым, при $d = a^{-1}b_1$ верно (1).

ЛЕММА 10. *Если матрица $A \in M_n(S^*)$ идемпотентна, то любой ее столбец (строка) есть линейная комбинация остальных ее столбцов (строк).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом лемм 7 и 8 достаточно показать, что столбец $A^{(1)}$ линейно выражается через столбцы $A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$. Поскольку все элементы матрицы A отличны от нуля и S – полутело, диагональная матрица $D = \text{diag}[a_{11}, \dots, a_{n1}]$ обратима. Легко видеть, что все элементы первого столбца идемпотентной матрицы $\tilde{A} = D^{-1}AD$ равны a_{11} , так что в силу леммы 9 столбцы матрицы $\tilde{A}$ удовлетворяют равенству (1). Умножая обе его части на d^{-1} справа, получаем представление первого столбца матрицы $\tilde{A}$ в виде линейной комбинации остальных ее столбцов, следовательно, в силу леммы 6 аналогичное представление имеет место для столбцов матрицы A .

ЛЕММА 11. *Если три ненулевых столбца $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in S^n$ таковы, что каждый из них линейно выражается через другие два, то все они пропорциональны друг другу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно установить пропорциональность столбцов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, поскольку тогда им будет пропорционален и линейно выражающийся через них столбец $\bar{z}$.

Согласно условию для подходящих $s, t, u, v \in S$ верно $\bar{x} = \bar{y}s + \bar{z}t$, $\bar{y} = \bar{x}u + \bar{z}v$. Если $v = 0$, то пропорциональность столбцов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ вытекает из второго соотношения, поэтому можно считать, что $v \neq 0$. Тогда $\bar{y}v^{-1}t = \bar{x}uv^{-1}t + \bar{z}t$, откуда

$$\bar{x}(1 + uv^{-1}t) = \bar{y}s + \bar{x}uv^{-1}t + \bar{z}t = \bar{y}(s + v^{-1}t),$$

тем самым, $\bar{x} = \bar{y}w$, где $w = (s + v^{-1}t)(1 + uv^{-1}t)^{-1}$, так что и в этом случае столбцы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пропорциональны.

Вернемся к доказательству равенства $\text{rank}(A) = 1$ для произвольной идемпотентной матрицы $A \in M_n(S^*)$. Будем вести рассуждения индукцией по n .

При $n = 1$ равенство $\text{rank}(A) = 1$ тривиально верно, при $n = 2$ оно следует из леммы 10, а при $n = 3$ – получается последовательным применением лемм 10 и 11.

Предположим, что $n \geq 4$ и что для любой идемпотентной матрицы $B \in M_{n-1}(S^*)$ равенство $\text{rank}(B) = 1$ уже доказано.

ЛЕММА 12. *Пусть $\bar{A} \in M_n(S)$ – идемпотентная матрица, один из столбцов которой нулевой, а все прочие столбцы не содержат нулей. Тогда $\text{rank}(\bar{A}) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7 без ограничения общности можно считать, что единственный нулевой столбец идемпотентной матрицы $\bar{A}$ – последний и, следовательно, $\bar{A}$ имеет блочный вид

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right),$$

где $B \in M_{n-1}(S^*)$. Очевидно, матрица B идемпотентна, поэтому в силу предположения индукции $\text{rank}(B) = 1$, откуда $\text{rank}(\bar{A}) = 1$ согласно лемме 4.

Как и в доказательстве леммы 10, заметим, что диагональная матрица $D = \text{diag}[a_{11}, \dots, a_{n1}]$ обратима, поэтому все элементы первого столбца идемпотентной матрицы $\tilde{A} = D^{-1}AD$ равны друг другу, т.е.

$$\tilde{a}_{11} = \dots = \tilde{a}_{n1} = a. \quad (4)$$

ЛЕММА 13. Для любых индексов $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, столбец $A^{(i)}$ (строка $A_{(i)}$) является ненулевой линейной комбинацией столбцов (строк) матрицы A с номерами из $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом лемм 6–8 без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = n$, и вместо матрицы A можно рассматривать матрицу $\tilde{A}$.

Согласно лемме 10 строка $\tilde{A}_{(2)}$ линейно выражается через все остальные строки матрицы $\tilde{A}$, следовательно, при некоторых $x_k \in S^*$, $k \neq 2$, верно $\tilde{A}_{(2)} = \sum_{k \neq 2} x_k \tilde{A}_{(k)}$. В частности, учитывая (4), имеем

$$a = \tilde{a}_{21} = \sum_{k \neq 2} x_k \tilde{a}_{k1} = \left(\sum_{k \neq 2} x_k \right) a,$$

откуда

$$\sum_{k \neq 2} x_k = 1. \quad (5)$$

Полагая $x_2 = 0$, заменим вторую строку единичной матрицы порядка n строкой $(x_1, \dots, x_n)$ и обозначим получившуюся матрицу через X .

Ясно, что $X\tilde{A} = \tilde{A}$, поэтому ввиду леммы 8 матрица $\bar{A} = \tilde{A}X$ идемпотентна. Легко видеть, что $\bar{A}^{(k)} = \tilde{A}^{(2)}x_k + \tilde{A}^{(k)}$ при $k \neq 2$ и $\bar{A}^{(2)} = 0$, тем самым, матрица $\bar{A}$ удовлетворяет условиям леммы 12. Следовательно, $\text{rank}(\bar{A}) = 1$, так что все ненулевые столбцы матрицы $\bar{A}$ пропорциональны друг другу. В частности, столбец $\bar{A}^{(n)}$ пропорционален столбцу $\bar{A}^{(3)}$, значит, при некотором $y \in S^*$ верно

$$\tilde{A}^{(2)}x_n + \tilde{A}^{(n)} = (\tilde{A}^{(2)}x_3 + \tilde{A}^{(3)})y. \quad (6)$$

В силу равенств (4) и леммы 9 для матрицы $\tilde{A}$ верно (1). Положим $x' = \sum_{k \neq n} x_k$. Поскольку $x_2 = 0$, то ввиду (5) получаем $x' + x_n = 1$. Следовательно, из (1) и (6) выводим

$$\tilde{A}^{(1)}d = \tilde{A}^{(2)}x' + \tilde{A}^{(2)}x_n + \dots + \tilde{A}^{(n)} = \tilde{A}^{(2)}(x' + x_3y) + \tilde{A}^{(3)}y + \tilde{A}^{(3)} + \dots + \tilde{A}^{(n-1)},$$

откуда вытекает, что столбец $\tilde{A}^{(1)}$ является линейной комбинацией всех остальных столбцов матрицы $\tilde{A}$ кроме n -го, что и требовалось.

ЛЕММА 14. Для любых попарно различных индексов $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ столбец $A^{(i)}$ является линейной комбинацией столбцов $A^{(j)}$ и $A^{(k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $i \neq j$, то согласно лемме 13 строка $A_{(j)}$ является линейной комбинацией всех остальных строк матрицы A кроме i -й, иначе говоря, при подходящих коэффициентах $y_l \in S^*$, $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, верно равенство $A_{(j)} = \sum_{l \notin \{i, j\}} y_l A_{(l)}$, которое, полагая $y_i = y_j = 0$, можно переписать в виде

$$A_{(j)} = \sum_{l=1}^n y_l A_{(l)}. \quad (7)$$

Обозначим через Y матрицу, получающуюся из единичной матрицы порядка n заменой j -й строки на строку $(y_1, \dots, y_n)$. Ввиду (7) ясно, что $YA = A$. Следовательно, по лемме 8 матрица $\bar{A} = AY$ идемпотентна, при этом

$$\bar{A}^{(j)} = 0, \quad \bar{A}^{(i)} = A^{(i)}, \quad \bar{A}^{(l)} = A^{(j)}y_l + A^{(l)} \quad \text{для всех } l \neq i, j.$$

Применяя лемму 12, имеем $\text{rank}(\bar{A}) = 1$, так что все ненулевые столбцы матрицы $\bar{A}$ пропорциональны друг другу. В частности, столбец $\bar{A}^{(i)}$ пропорционален столбцу $\bar{A}^{(k)}$, тем самым, столбец $A^{(i)}$ линейно выражается через столбцы $A^{(j)}$ и $A^{(k)}$.

С учетом леммы 14 для доказательства пропорциональности всех столбцов матрицы A осталось воспользоваться леммой 11.

Итак, все столбцы матрицы $A \in M_n(S^*)$ пропорциональны друг другу, а значит, $\text{rank}(A) = 1$. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [2] J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations over Them. Theory and Applications*, Math. Appl., **556**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [3] D. Dolžan, P. Oblak, “Idempotent matrices over antirings”, *Linear Algebra Appl.*, **431**:5-7 (2009), 823–832.
- [4] Л. Б. Бисли, А. Э. Гутерман, К. Канг, С. Сонг, “Идемпотентные матрицы и мажорирование”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:1 (2007), 11–29.
- [5] K.-T. Kang, S.-Z. Song, Y.-O. Yang, “Characterizations of fuzzy idempotent matrices”, *J. Fuzzy Math.*, **16**:3 (2008), 653–663.
- [6] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [7] А. Е. Гутерман, “Rank and determinant functions for matrices over semirings”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 1–33.

С. Н. Ильин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: sergey.ilyin@ksu.ru

Поступило

27.05.2010

Исправленный вариант

19.03.2011