Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Филатов, Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:24:56

Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений

О. П. Филатов

Рассмотрим интегрируемую по Риману функцию $f(y)$ на n -мерном торе $\mathbb{T}^n$, где $y = (y_1, \dots, y_n) \bmod 2\pi$ – угловые координаты. Зафиксируем вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, число $\alpha \in (0, 1]$ и начальный вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$. Дифференциальное включение

$$\dot{y} \in \{\alpha\omega, \omega\}, \quad y(0) = a, \quad (1)$$

определяется двумя допустимыми скоростями $\alpha\omega$ и ω . *Решением задачи (1)* называется функция $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(0) = a$ абсолютно непрерывная на любом отрезке из промежутка $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, производная которой $\dot{y}$ почти всюду принадлежит множеству допустимых скоростей. Если $\alpha = 1$, то единственное решение $y(t) = a + t\omega$ задачи (1) задает условно-периодическое движение на торе. Если координаты вектора ω , называемые *частотами*, независимы (равенство $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0$ для целочисленных $k_1, \dots, k_n$ влечет $k_1 = \dots = k_n = 0$), функция $f(a + t\omega)$ локально интегрируема по Риману в промежутке $\mathbb{R}_+$, то пространственное среднее функции f на торе $\mathbb{T}^n$, определяемое формулой

$$m(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_K f(y) dy, \quad K = [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi],$$

совпадает с временным средним

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(a + t\omega) dt.$$

Этот результат установлен в 1909 г. и известен как теорема об усреднении для систем, совершающих условно-периодическое движение [1]. В данной работе устанавливается связь пространственного среднего $m(f)$ и предела максимального среднего

$$M(f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(y(t)) dt,$$

где Y – множество всех решений задачи (1).

Пусть $\lambda(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ – соответственно меры Жордана на K и $\mathbb{R}$, $f_0 = f - m(f)$,

$$K_c = \{y \in K : f_0(y) \geq c\}, \quad I_c = \int_{K_c} f_0(y) dy, \quad \lambda_c = \lambda(K_c).$$

Кроме того, обозначим $k = 1/\alpha$ и введем функцию

$$\varphi(k, c) = \frac{(k-1)I_c}{(2\pi)^n + (k-1)\lambda_c}.$$

Стандартным способом разобьем n -мерный куб K на попарно непересекающиеся кубики K_j , $j \in J$, число которых $|J| = l^n$, $l = 1, 2, \dots$. Множество индексов $j \in J$, которое отвечает включению $K_j \subset K_c$ (пересечению $K_j \cap K_c \neq \emptyset$) обозначим символом $J_{c,1}$ ($J_{c,2}$). Введем элементарные аппроксимирующие множества

$$K_{c,1} = \bigcup_{j \in J_{c,1}} K_j, \quad K_{c,2} = \bigcup_{j \in J_{c,2}} K_j$$

для жорданова множества K_c .

Семейство множеств $\{K_c\}$, $c \in \mathbb{R}_+$, называется *равномерно измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое l_0 , что для любого целого $l \geq l_0$ и любого $c \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\lambda(K_{c,2}) - \lambda(K_{c,1}) \leq \varepsilon$.

Например, если граница любого множества K_c имеет $(n-1)$ -мерную жорданову меру (при $n = 2$ — это длина спрямляемой кривой), которая не превосходит некоторой общей для всего семейства постоянной, то такое семейство удовлетворяет условию равномерной измеримости. Для $\tau > 0$ введем обозначения

$$\begin{aligned} R_{c,\tau} &= \{t \in [0, \tau] : (a + t\omega) \in K_c\}, & R_{j,\tau} &= \{t \in [0, \tau] : (a + t\omega) \in K_j\}, \\ R_{j,\tau,c} &= \{t \in [0, \tau] : (a + t\omega) \in K_j \cap K_c\}, \\ r_1 &= \sup_{y \in K} |f_0(y)|, & r &= \max\{1, r_1\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ независимы, функция f интегрируема на $\mathbb{T}^n$ по Риману, а $f(a + t\omega)$ локально интегрируема на $\mathbb{R}_+$ по Риману и при любых $c \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ множества K_c , $R_{c,\tau}$ измеримы по Жордану, а семейство множеств $\{K_c\}$, $c \in \mathbb{R}_+$, равномерно измеримо. Тогда предел максимального среднего M_f вычисляется по формуле

$$M(f) = m(f) + \sup_{c \geq 0} \varphi(k, c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы усреднения [1; с. 251–254] пространственное среднее функции f_0 , равное 0, совпадает с временным средним функции $f_0(a + t\omega)$. Следовательно, имеет место соотношение [2; теорема 1]

$$M(f_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{c \geq 0} \frac{(k-1)I_{c,\tau}}{1 + (k-1)\mu_{c,\tau}}, \quad (2)$$

которое было доказано в работе [2] в более общем случае интегрируемой по Лебегу функции $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь

$$I_{c,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{R_{c,\tau}} f_0(a + t\omega) dt, \quad \mu_{c,\tau} = \frac{\mu(R_{c,\tau})}{\tau}.$$

Пусть χ_c характеристическая функция множества K_c . Точную нижнюю грань функции $f_0\chi_c$ на кубике K_j обозначим γ_j , а верхнюю — Γ_j . Введем ступенчатые функции γ и Γ , сужения которых на кубик K_j равны соответственно γ_j и Γ_j . По построению $\gamma \leq f_0\chi_c \leq \Gamma$. Далее воспользуемся соотношением

$$I_{c,\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{j \in J_{c,2}} \int_{R_{j,\tau,c}} f_0(a + t\omega) dt \quad (3)$$

и учтем, что $\mu(R_{j,\tau,c}) = \mu(R_{j,\tau})$, если $K_j \subset K_c$, и $\mu(R_{j,\tau,c}) \leq \mu(R_{j,\tau})$ для любого j . Следовательно, из (3) получим двусторонние оценки

$$\sum_{j \in J_{c,1}} \gamma_j \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} \leq I_{c,\tau} \leq \sum_{j \in J_{c,2}} \Gamma_j \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau}. \quad (4)$$

По следствию из теоремы усреднения [1; следствие 2, с. 252] имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} = \frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n}.$$

Выберем τ_1 так, чтобы при $\tau \geq \tau_1$ и любом $j \in J$ выполнялись неравенства

$$\frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n} - \frac{\varepsilon}{r|J|} \leq \frac{\mu(R_{j,\tau})}{\tau} \leq \frac{\lambda(K_j)}{(2\pi)^n} + \frac{\varepsilon}{r|J|}. \quad (5)$$

Из (4), (5) при $\tau \geq \tau_1$ и любом $c \geq 0$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{K_{c,1}} \gamma(y) dy - \varepsilon \leq I_{c,\tau} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{K_{c,2}} \Gamma(y) dy + \varepsilon.$$

На основании равномерной измеримости семейства множеств $\{K_c\}$ и определения интеграла Римана отсюда следует, что при достаточно большом l и любых $\tau \geq \tau_1$, $c \geq 0$ выполняются двусторонние оценки

$$\frac{I_c}{(2\pi)^n} - 2\varepsilon \leq I_{c,\tau} \leq \frac{I_c}{(2\pi)^n} + 2\varepsilon.$$

Подобным же образом получаются оценки для меры $\mu_{c,\tau}$:

$$\frac{\lambda_c}{(2\pi)^n} - 2\varepsilon \leq \mu_{c,\tau} \leq \frac{\lambda_c}{(2\pi)^n} + 2\varepsilon,$$

которые выполняются при достаточно большом l и любых $\tau \geq \tau_1$, $c \geq 0$. Полученные соотношения означают, что равномерно по $c \geq 0$ выполняются предельные равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu_{c,\tau} = \frac{\lambda_c}{(2\pi)^n}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} I_{c,\tau} = \frac{I_c}{(2\pi)^n}. \quad (6)$$

Следовательно, сначала можно выполнить предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$ в равенстве (2) с учетом (6), а затем перейти к вычислению точной верхней границы. В результате получим

$$M(f_0) = \sup_{c \geq 0} \varphi(k, c).$$

Так как $M(f) = M(f_0) + m(f)$, теорема доказана.

Отметим, что вычисление пределов максимальных средних связано с построением усредненных дифференциальных включений в задачах с быстрыми и медленными переменными. Если воспользоваться техникой опорных функций многозначных отображений, то усреднение опорных функций по быстрым переменным приводит к вычислениям подобного вида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [2] О. П. Филатов, *Матем. заметки*, **59:5** (1996), 759–767.

О. П. Филатов

Самарский государственный университет
E-mail: filatov_oleg@samaradom.ru

Поступило

15.06.2010