Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Ш. Джураев, Регуляризация граничных задач для гиперболического уравнения, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 202–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:05:52

Регуляризация граничных задач для гиперболического уравнения

Х. Ш. Джураев

Рассматривается проблема устойчивости распространения волн в анизотропной неоднородной среде. Построен класс приближенных решений, обладающих свойством устойчивости к малым отклонениям исходных данных, в виде, регуляризирующего операторы $R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)$. При этом важную роль играют выбор сглаживающей функции и условия согласования параметра регуляризации с погрешностью.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm8887

1. Рассмотрим уравнение с частными производными, объясняющее многие физические явления:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + b(x) u(x, t) = c(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Оно соответствует свободным колебаниям материальных тел и электромагнитного поля. Считая, что $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$ – непрерывно заданные на $[0, l]$ функции, связанные определенными соотношениями с упругими характеристиками и плотностью неоднородной среды, будем искать решение уравнения (1) при граничных условиях

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} + \gamma_2 u(x, t) \right) \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \text{ и } x = l, \\ \varphi(x) & \text{при } t = 0, \\ \psi(x) & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь γ_1, γ_2 – числа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции на $[0, t_1]$. Если $\gamma_1 = 0$, то имеем первую краевую задачу, если $\gamma_2 = 0$ – вторую, а при $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$ – третью.

Уравнение (1) определяет класс гиперболических уравнений, для которых смешанная задача, в том числе и краевая, может быть решена методом Фурье. Если $X_k(x, \lambda_k)$ есть k -я собственная функция краевой задачи

$$\begin{aligned} X''(x) + a(x)X'(x) + (b(x) + \lambda^2 c(x))X(x) &= 0, \\ \left(\gamma_1 \frac{dX}{dx} + \gamma_2 X(x) \right) \Big|_{x=0} &= \left(\gamma_1 \frac{dX}{dx} + \gamma_2 X(x) \right) \Big|_{x=l} = 0, \end{aligned}$$

а λ_k – соответствующее ей собственное значение и $T_k(t, \lambda_k)$ – решение уравнения

$$T''(t) + \lambda_k^2 T(t) = 0,$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\left(\gamma_1 \frac{dT}{dt} + \gamma_2 T(t) \right) \Big|_{t=0} = \varphi_k, \quad \left(\gamma_1 \frac{dT}{dt} + \gamma_2 T(t) \right) \Big|_{t=t_1} = \psi_k,$$

то общее решение (1), (2) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_k T_{1k}(t, \lambda_k) + \psi_k T_{2k}(t, \lambda_k)] \frac{X_k(x, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} T_{1k}(t, \lambda_k) &= \gamma_2 Sh(\lambda_k(t + t_1)) - \gamma_1 \lambda_k Ch(\lambda_k(t + t_1)), \\ T_{2k}(t, \lambda_k) &= \gamma_2 Sh(\lambda_k t) - \gamma_1 \lambda_k Ch(\lambda_k t), \\ \phi_k(t_1, \lambda_k) &= (\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \lambda_k^2) Sh(\lambda_k t_1), \end{aligned}$$

а φ_k и ψ_k – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе $X_k(x, \lambda_k)$.

Из вида (3) следует, что если существует такое k_0 , что $\phi_k(t_1, \lambda_k) = 0$, то решение такого вида либо не существует, либо оно неединственное. Неустойчивость решения вида (3) возможна из-за того, что при $k \rightarrow \infty$ $\phi_k(t_1, \lambda_k)$ может быть сколь угодно близка к нулю (например, это имеет место для уравнения колебания струны, так как в этом случае $\phi_k(t_1, \lambda_k) = \sin(\pi k t_1 / l)$).

Известно (см. [1; гл. VII, § 17]), что если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют непрерывную производную в промежутке $[0, l]$ и удовлетворяют предельным условиям (2), то функция $u(x, t)$ вида (3) удовлетворяет предельным условиям (2), а также уравнению (1). Это означает, что имеет место почленное дифференцирование ряда (3) по t и x два раза и полученные ряды равномерно сходятся в промежутке $[0, l]$ при всяком фиксированном t . Следовательно, формула (3) дает точное решение задачи (1), (2).

В практических задачах коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и предельные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получаются в результате измерений, т.е. вместо функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны h - и δ -приближения этих функций соответственно по параметру x :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(x) - a(x)| &\leq h, & |\tilde{b}(x) - b(x)| &\leq h, & |\tilde{c}(x) - c(x)| &\leq h, \\ |\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| &\leq \delta, & |\tilde{\psi}(x) - \psi(x)| &\leq \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда вместо нахождения $u(x, t)$ можно ставить лишь задачу о нахождении приближенного решения. Если $\tilde{a}(x)$, $\tilde{b}(x)$, $\tilde{c}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ суть непрерывно дифференцируемые функции в $[0, l]$, то формула (3) дает искомое решение задачи (1), (2). Однако можно указать приближенные исходные значения функций $\tilde{a}(x)$, $\tilde{b}(x)$, $\tilde{c}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, которые не обладают свойством непрерывной дифференцируемости. Например, случай, когда графики исходных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задаются в виде ломаных линий. Поэтому в качестве приближенного решения задачи (1), (2) с приближенными исходными данными вида (4) нельзя брать точное решение $u(x, t)$ этой задачи в виде (3). Такое решение может не существовать, а если существует,

то оно не обладает свойством устойчивости к малым отклонениям $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

С другой стороны, численное суммирование ряда Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2 , является неустойчивым (см. [2; введение, § 3]). Так как решение $u(x, t)$ вида (3) есть ряд Фурье, то численное суммирование также не обладает свойством устойчивости при малых отклонениях коэффициентов φ_k и ψ_k . Отсюда следует, что краевая задача (1), (2) является некорректно поставленной. В простейшем случае, когда (1) является уравнением колебания струны и $\gamma_1 = 0$, как показано в [3; введение, § 2, п. 2], решение может не существовать, быть неединственным или неустойчивым по отношению к изменению исходных данных. Для этого простейшего случая в [4], [5] построены регуляризирующие алгоритмы решения задачи (1), (2) (в [4] при $x = 0$ и $x = l$ рассматриваются краевые условия первого рода, а в [5] – краевые условия первого и второго рода). В [4] в качестве приближенного решения берется конечный отрезок ряда, который при точном задании данных является решением. При этом количество членов в отрезке ряда определяется погрешностью задания исходных данных. В [5] регуляризованным решением является функция, которая определяется в результате применения обобщенного метода суммирования типа Тихонова [2] к соответствующему ряду.

Считая, что для точно заданных исходных данных решение в виде (3) существует, в заметке строится семейство регуляризирующих алгоритмов (РА) задачи (1), (2), обладающих свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных. При этом используются условия стабилизации и согласование параметра регуляризации для задачи (1), (2). Эти понятия можно ввести следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)$ называется *регуляризуемым решением* для задачи (1), (2), если существует функционал $s(\alpha, x, t)$, удовлетворяющий условию

$$|R(\varphi, \psi, x, t, \alpha) - u(x, t)| \leq s(\alpha, x, t)$$

для любого α , принадлежащего $(0, \alpha_0]$, и

$$R(\varphi, \psi, x, t, \alpha) \rightarrow u(x, t), \quad s(\alpha, x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0$$

для всякого $x \in [0, l]$ и $0 < t \leq t_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha)$ называется *вполне регуляризуемым решением* для задачи (1), (2), если существует функционал $c(\alpha, \delta, h, x, t)$, удовлетворяющий условию

$$|R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)| \leq c(\alpha, \delta, h, x, t)$$

для любого α , принадлежащего $(0, \alpha_0]$, и

$$R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) \rightarrow u(x, t), \quad c(\alpha, \delta, h, x, t) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta, h) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0$$

для всякого $x \in [0, l]$ и $0 < t \leq t_1$.

2. Предположив сначала, что $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – точно заданные функции, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – приближенно заданные функции, строим приближенные решения. Следуя [6],

в качестве приближенного решения (1), (2) с приближенными исходными данными будем брать значение однопараметрического семейства операторов

$$R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} r(k, \alpha) \cdot [\tilde{\varphi}_k \cdot T_{1k}(t, \lambda_k) + \tilde{\psi}_k \cdot T_{2k}(t, \lambda_k)] \cdot \frac{X_k(x, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)}, \quad (5)$$

где $r(k, \alpha)$ – стабилизирующий множитель, определенный для всех $\alpha \geq 0$ и $k = 1, \dots, \infty$, причем $\alpha = \alpha(\delta)$.

Предположим, что $\{r(k, \alpha)\}$ – некоторая заданная последовательность, обладающая следующими свойствами:

- 1) $r(k, \alpha)$ определено для всех $\alpha \geq 0$ и любого натурального $k = 1, \dots, \infty$;
- 2) $0 \leq r(k, \alpha) \leq 1$ для любых значений $\alpha \geq 0$ и $k = 1, \dots, \infty$;
- 3) $r(k, 0) \equiv 1$;
- 4) для всякого числа $\alpha > 0$ выполнено $\{r(k, \alpha)\} \in l_2$;
- 5) при любом $\alpha > 0$ выполнено $\lim_{k \rightarrow \infty} r(k, \alpha) = 0$, и эта сходимость равномерна относительно $\alpha \in (0, \alpha_0]$, где α_0 – любое фиксированное положительное число;
- 6) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(k, \alpha) = 1$, не возрастаая для всякого натурального k ;
- 7) $r(k, \alpha)$ – монотонно убывающая функция по α и $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} r(k, \alpha) = 0$ для любого натурального k ;
- 8) для каждого $\alpha > 0$

$$\left\{ r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right\}$$

принадлежат l_2 при всяком фиксированном $t \in [0, t_1]$.

Если положить, например, $r(k, \alpha) = e^{-\alpha \cdot \xi_k}$, где $\{\xi_k\}$ – невозрастающая последовательность положительных чисел, или положить $r(k, \alpha) = (1 + \alpha \xi_k)^{-s}$, где $\{\xi_k\}$ – последовательность положительных чисел, порядок роста которых при $k \rightarrow \infty$ не ниже, чем k^s , где $s > 1/2$, то для таких $\{r(k, \alpha)\}$ условия 1)–8) выполняются.

На основе определения доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если стабилизирующий множитель $r(k, \alpha)$ удовлетворяет свойствам 1)–8), то для каждого фиксированного $t > 0$ оператор $R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)$ вида (5) является регуляризирующим решением для задачи (1), (2) и имеет место оценка

$$|R(\varphi, \psi, x, t, \alpha) - u(x, t)| \leq s(\alpha, x, t), \quad (6)$$

где $u(x, t)$ – точное решение задачи (1), (2) вида (3), $s(\alpha, x, t) = C\omega(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ – функции корректности задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Delta_1 R = R(\varphi, \psi, x, t, \alpha) - u(x, t).$$

Тогда из (3) и (5) имеем

$$|\Delta_1 R| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| (r(k, \alpha) - 1) \cdot \left(\varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} + \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right) \right| \cdot |X_k(x, \lambda_k)|.$$

Пользуясь равномерной ограниченностью $\{X_k(x, \lambda_k)\}$ (см. [7]) постоянной C , получаем

$$|\Delta_1 R| \leq C \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| (r(k, \alpha) - 1) \cdot \left(\varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} + \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right) \right| \right\}.$$

Используя свойство 1) функции $r(k, \alpha)$, имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_1 R| \leq C \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n |r(k, \alpha) - 1| \cdot \left(\left| \varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| + \left| \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\left| \varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| + \left| \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку для любого фиксированного $t \in [0, t_1]$

$$\left\{ \varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right\}$$

принадлежат l_1 , что следует из предположения о существовании решения в виде (3), то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $N(\varepsilon, t)$, что при $n \geq N(\varepsilon, t)$ будет выполняться неравенство

$$C \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\left| \varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| + \left| \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксировав одно из таких n , рассмотрим конечную сумму

$$C \cdot \sum_{k=1}^n |r(k, \alpha) - 1| \left(\left| \varphi_k \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| + \left| \psi_k \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right| \right).$$

По свойствам 2)–6) последовательности $\{r(k, \alpha)\}$ найдется такое $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon, t) > 0$, что для всех $\alpha \leq \alpha_0$ эта конечная сумма при любом фиксированном $t \in [0, t_1]$ не будет превосходить число $\varepsilon/3$.

Следовательно, $|\Delta_1 R| \leq s(\alpha, x, t)$, где $s(\alpha, x, t) = C \cdot \omega(\alpha) = 2\varepsilon/3$ есть функция корректности. Таким образом, теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть вместо $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны их δ -приближения $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ из $L_2(0, l)$ и t – заданное число из $(0, t_1)$. Тогда имеет место оценка

$$|R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)| \leq c(\alpha, \delta, x, t). \quad (7)$$

Здесь $c(\alpha, \delta, x, t) = C\delta(\sqrt{\omega_1(\alpha, t)} + \sqrt{\omega_2(\alpha, t)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Delta_2 R = R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha).$$

Тогда

$$|\Delta_2 R| \leq C \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| r(k, \alpha) \cdot \left((\tilde{\varphi}_k - \varphi_k) \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} + (\tilde{\psi}_k - \psi_k) \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right) \right| \right\}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|\Delta_2 R| \leq C \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\varphi}_k - \varphi_k)^2 \right\}^{1/2} \\ + C \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\psi}_k - \psi_k)^2 \right\}^{1/2}.$$

Введем обозначения

$$\omega_1(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{1k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right|^2, \quad \omega_2(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| r(k, \alpha) \cdot \frac{T_{2k}(t, \lambda_k)}{\phi_k(t_1, \lambda_k)} \right|^2.$$

Ввиду наложенных условий на $\{r(k, \alpha)\}$ эти ряды определены и являются невозрастающими функциями по α для каждого фиксированного $t \in (0, t_1)$, причем их суммы при $\alpha \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Далее, имеем

$$|\Delta_2 R| \leq C \cdot \delta \cdot (\sqrt{\omega_1(\alpha, t)} + \sqrt{\omega_2(\alpha, t)}).$$

Отметим, что для получения условия согласования параметра регуляризации α с погрешностью δ достаточно показать, что $R(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) \rightarrow u(x, t)$ при $\delta \rightarrow 0$. Если

$$\delta \leq \delta_0 = \frac{\varepsilon}{3C(\sqrt{\omega_1(\alpha, t)} + \sqrt{\omega_2(\alpha, t)})},$$

то для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ будет выполнено $\|\Delta_2 R\| \leq \varepsilon/3$. Таким образом, мы доказали неравенства (7) и, тем самым, теорему 2.

Так как

$$|R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - u(x, t)| \\ \leq |R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)| + |R(\varphi, \psi, x, t, \alpha) - u(x, t)|,$$

то, используя неравенства (6) и (7), получаем, что

$$|R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - u(x, t)| \leq c(\alpha, \delta, x, t) + s(\alpha, x, t). \quad (8)$$

Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$ есть корень уравнения

$$\sqrt{\omega_1(\alpha, t)} + \sqrt{\omega_2(\alpha, t)} = \frac{\varepsilon}{3 \cdot C \cdot \sqrt{\delta}}. \quad (9)$$

Тогда

$$|R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)| = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{\delta}}{3},$$

поэтому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - R(\varphi, \psi, x, t, \alpha)| = 0. \quad (10)$$

Кроме того, из свойств последовательности $\{r(k, \alpha)\}$ и (8) при $\alpha \rightarrow 0$ видно, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0. \quad (11)$$

Тогда из неравенства (8) с учетом свойства модуля непрерывности и свойств последовательности $\{r(k, \alpha)\}$ вытекает, что при выполнении соотношений (10) и (11) справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) - u(x, t)| = 0.$$

Значит, выполняется соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, t, \alpha) = u(x, t). \quad (12)$$

Таким образом, справедливость согласования параметра регуляризации с погрешностью δ для задачи (1), (2) доказана, т.е. имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если $\alpha = \alpha(\delta)$ есть корень уравнения (9), то выполняется равенство (12).

В заключение отметим, что полученные результаты совпадают с результатами работ [8] и [9] по управлению скоростью сигналов в линии одновременном и последовательном способами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 4, 2-е изд., ГИТТЛ, М., 1951.
- [2] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974.
- [3] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978.
- [4] И. В. Мельникова, А. Ю. Фрейберг, “О регуляризации краевой задачи для уравнений колебаний”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:5 (1985), 783–789.
- [5] Х. Ш. Джураев, *Разработка методов решения некорректно поставленных задач прикладного значения*, Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук, ТГУ, Душанбе, 1989.
- [6] Х. Ш. Джураев, “Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу”, *Дифференц. уравнения*, **43**:5 (2007), 701–704.
- [7] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988.
- [8] Х. Ш. Джураев, “О регуляризации скорости сигналов в линии при одновременном управлении”, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **52**:1 (2009), 23–29.
- [9] Х. Ш. Джураев, “О регуляризации решения граничных задач для уравнения колебания сигналов в линии”, *Тезисы докладов научно-теоретической конференции “Проблемы физики конденсированных сред” посвященной 80-летию академика А. А. Адхамова* (15 ноября 2008, Душанбе), ТНУ, Душанбе, 2008, 59–62.

Х. Ш. Джураев

Таджикский национальный университет, г. Душанбе

E-mail: hayrullo_58@mail.ru

Поступило

21.06.2010