Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, Оценки возмущенной полугруппы Озеена и их приложения к системе Навье–Стокса в $\mathbb{R}^n$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 880–895

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 09:19:56

Оценки возмущенной полугруппы Озеена и их приложения к системе Навье–Стокса в $\mathbb{R}^n$

Л. И. Сазонов

Для возмущенной полугруппы Озеена в $\mathbb{R}^n$ установлены степенные $L_p - L_q$ оценки. Они используются для доказательства существования малых глобальных решений возмущенной нелинейной системы Озеена и оценок их L_p -норм при $t \rightarrow \infty$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть v – стационарное решение системы Навье–Стокса в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что поле v имеет вид $v = u_\infty e_1 + w$, где $u_\infty = \operatorname{const}$, а w в определенном смысле стремится к нулю на бесконечности (это условие в дальнейшем будет уточнено).

Осуществляя замену $u := u + v$, приходим к уравнению для возмущений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - u_\infty \partial_1 u - (w, \nabla)u - (u, \nabla)w - (u, \nabla)u - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Обозначим через $L_p^n(\mathbb{R}^n)$ пространство всех n -мерных векторных полей с координатами из $L_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $S_p = S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, – его подпространство, являющееся замыканием множества всех гладких финитных соленоидальных полей. Применяя к системе (1.2) гидродинамический проектор

$$\Pi: L_p^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

сведем возмущенную систему Озеена к ОДУ в пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu + Ku, \quad (1.3)$$

где A, B, K – операторы вида

$$Au = \Pi(\Delta u - u_\infty \partial_1 u), \quad Bu = -\Pi((w, \nabla)u + (u, \nabla)w), \quad Ku = -\Pi((u, \nabla)u). \quad (1.4)$$

Далее уравнение (1.3) будем исследовать методами теории полугрупп, следуя методике, развитой Юдовичем в [1] для исследования гидродинамических задач в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^3$. Полугрупповой подход для исследования эволюционных уравнений развивался в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, П. Е. Соболевского, Т. Като, В. И. Юдовича и многих других авторов. В частности, отметим работу Като [2], в которой для уравнения (1.3) при $B = 0$, $u_\infty = 0$ установлены теоремы существования локальных и глобальных при малых начальных данных решений в пространстве $S_n(\mathbb{R}^n)$ и их асимптотика при $t \rightarrow \infty$. Сошлемся также на работу [3], в которой установлена одна абстрактная теорема об устойчивости и доказана асимптотическая устойчивость нулевого равновесия системы Навье–Стокса в пространстве $\mathbb{R}^3$. Следует отметить, что полугрупповой подход к системе Навье–Стокса активно развивается в последние десятилетия и в его рамках исследованы вопросы глобальной разрешимости в различных функциональных пространствах (правда, в основном при условии определенной малости начальной скорости и поля внешних сил). По этому поводу см., например, [4] и имеющуюся там библиографию.

В случае $B = 0$ ($w = 0$) главная линейная часть уравнения (1.3) представлена оператором Озеена (Стокса при $u_\infty = 0$) A , который в каждом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, с областью определения $D(A) = W_p^2(\mathbb{R}^n) \cap S_p(\mathbb{R}^n)$ порождает аналитическую полугруппу Озеена $T(t)$, совпадающую на соленоидальных полях с полугруппой теплопроводности с переносом [5], [6]. Использование теоремы о свертках [7; с. 162] приводит к следующим оценкам для полугруппы Озеена:

$$\|\partial^\alpha T(t)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq}^\alpha t^{-|\alpha|/2 - (n/2)(1/p - 1/q)}, \quad (1.5)$$

где $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$.

Для применения полугруппового метода к возмущенной системе Озеена (1.3) необходимо выяснить, при каких условиях возмущенный оператор Озеена $\tilde{A} = A + B$ порождает аналитическую полугруппу с оценками вида (1.5).

Предварительно отметим, что возмущенный оператор Озеена $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = D(A)$ при выполнении условий w , $\partial_j w \in L_\infty^n(\mathbb{R}^n)$ порождает аналитическую полугруппу $\tilde{T}(t)$ в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Далее для получения оценок этой полугруппы воспользуемся результатами из [8], где методами теории банаховых алгебр указанные оценки получены для полугруппы Озеена во внешней области пространства $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем изложении на основе этих оценок устанавливается существование малых решений у возмущенной системы Озеена и исследуется поведение решений при $t \rightarrow \infty$ без предположения об их малости. Несмотря на большое количество работ об асимптотике по времени решений системы Навье–Стокса (см., например, [9]), представленные результаты являются новыми, так как получены для возмущенной системы Навье–Стокса.

2. Возмущенная полугруппа Озеена. Как уже отмечалось во введении, оператор Озеена $A = \Pi(\Delta - u_\infty \partial_1)$ с областью определения $D(A) = S_p(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n)$ порождает в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, аналитическую полугруппу $T(t)$, для которой справедливы оценки (1.5). В случае всего пространства этот факт является простым следствием из оценок полугруппы теплопроводности. Однако для других неограниченных областей получение таких оценок связано с опре-

деленными техническими трудностями. В частности, для внешних областей пространства $\mathbb{R}^3$ при фиксированном значении $u_\infty \neq 0$ оценки установлены в [6] методом гидродинамических потенциалов, в [10] они получены иными методами, причем доказана их равномерность по параметру $u_\infty \in (0, r)$, многомерный случай рассмотрен в [11]. Следует также отметить, что для внешних областей происходит сужение области изменения параметров p и q .

Вместе с оператором Озеена A рассмотрим возмущенный оператор Озеена

$$\tilde{A} = A + B, \quad \text{где} \quad Bu = -\Pi((u, \nabla)w + (w, \nabla)u).$$

ЛЕММА 1. Пусть w – соленоидальное поле, причем $w, \partial_j w \in L_\infty^n(\mathbb{R}^n)$. Тогда возмущенный оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = D(A)$ порождает в любом пространстве $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, аналитическую полугруппу $\tilde{T}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по существу повторяет доказательство из [8] и опускается.

Пусть u_0 – финитное гладкое соленоидальное поле в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u(t) = \tilde{T}(t)u_0$ – решение линейной возмущенной системы Озеена, т.е. системы (1.3), в которой следует положить $K = 0$. Для получения оценок полугруппы $\tilde{T}(t)$ достаточно оценить $u(t)$ для указанных начальных данных u_0 . Заметим, что $u(t)$ является решением интегрального уравнения

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds. \quad (2.1)$$

Рассмотрим оператор-функцию $T(t)B$. Ввиду соленоидальности поля w ее можно представить в виде

$$T(t)Bu = -T(t)\Pi[(\nabla, u)w + (\nabla, w)u].$$

Тогда из неравенств (1.5) вытекают оценки

$$\|T(t)B\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p,q} t^{-1/2 - (n/2)(1/p + 1/q - 1/q)} \|w\|_q, \quad (2.2)$$

причем должны выполняться условия

$$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{\varrho} \leq 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,$$

$q \neq 1$, а при $q = \infty$ $1/p + 1/\varrho < 1$. Заметим, что здесь оператор $T(t)B$ при $t > 0$ понимается как замыкание до ограниченного.

Пусть $q > n/(n-1)$ и дополнительно к условиям леммы 1 $w \in L_\varrho^n(\mathbb{R}^n)$ для всех $\varrho \in [\varrho_1, \infty]$, где $\varrho_1 < n$. Тогда в силу (2.2) для оператор-функции $T(t)B$ справедлива оценка

$$\|T(t)B\|_{q \rightarrow q} \leq c_q t^{-1/2} (1+t)^{-\gamma},$$

где $\gamma = \min(n/(2\varrho_1), (n/2)(1 - 1/q))$, причем $\gamma + 1/2 > 1$ ($q > n/(n-1)!$).

Для оператор-функции $T(t)B$ определим ее преобразование Фурье

$$\mathcal{F}_z[T(t)B] = \int_0^{+\infty} T(t)B e^{itz} dt$$

при $z \in \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Предположим, что оператор $I - \mathcal{F}_z[T(t)B]$ для любого z с $\operatorname{Im} z \geq 0$ обратим в любом пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$ при $q > n/(n-1)$. Тогда, как установлено в [8], существует оператор-функция $A(t) \in \operatorname{End}(S_q(\mathbb{R}^n))$, удовлетворяющая оценкам

$$\|A(t)\|_{q \rightarrow q} \leq c_{\alpha, \beta} t^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \quad (2.3)$$

для любого $\alpha \in (1/2, 1)$ с $\alpha + \beta = 1/2 + \gamma > 1$, такая, что решение уравнения (2.1) представляется в виде

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t A(t-\tau)T(\tau)u_0 d\tau. \quad (2.4)$$

Далее, из представления (2.4) и неравенств (2.3) вытекает оценка

$$\|u(t)\|_q \leq \|T(t)u_0\|_q + c_q \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (1+t-\tau)^{-\beta} \tau^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau < t} \|\tau^\gamma T(\tau)u_0\|_q, \quad (2.5)$$

где $0 < \gamma < 1$. Анализ неравенства (2.5), выполненный в [8], приводит к неравенству

$$\|\tilde{T}(t)u_0\|_q \leq c_q t^{-\gamma} \sup_t \|t^\gamma T(t)u_0\|_q, \quad \frac{n}{n-1} < q < \infty, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2.6)$$

Полагая $u_0 = \Pi \partial^\theta v_0$ и используя оценки невозмущенной полугруппы (1.5), получаем

$$\|\tilde{T}(t)\Pi \partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-|\theta|/2 - (n/2)(1/p-1/q)} \quad (2.7)$$

при выполнении следующих условий:

$$|\theta| \leq 1, \quad \frac{|\theta|}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) < 1, \quad q > \frac{n}{n-1}, \quad 1 \leq p \leq q < \infty.$$

Некоторые ограничения на p, q можно ослабить. Из полугруппового свойства следует, что неравенство (2.7) выполняется, если $q > n/(n-1)$ и $1 \leq p \leq q < \infty$.

Возвращаясь к интегральному уравнению, определяющему $u(t) = \tilde{T}(t)\Pi \partial^\theta v_0$, имеем при $1 < q \leq n/(n-1)$

$$\|u(t) - T(t)\Pi \partial^\theta v_0\|_q \leq \int_0^t \|T(t-\tau)B\|_{r \rightarrow q} \|u(\tau)\|_r d\tau,$$

где $r > n/(n-1)$.

Для интеграла с учетом (2.2) и (2.7) справедлива оценка

$$\int_0^t \|T(t-\tau)B\|_{r \rightarrow q} \|u(\tau)\|_r d\tau \leq ct^{1/2 - |\theta|/2 - n/(2q) - (n/2)(1/p-1/q)},$$

причем должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q} \right) < 1, \quad \frac{|\theta|}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) < 1, \\ \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad r > \frac{n}{n-1}, \quad p \leq q. \end{aligned}$$

Простой анализ предыдущих неравенств приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что оператор $I - \mathcal{F}_z[T(t)B]$ обратим в пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$ при любом $q > n/(n-1)$ для любого $z \in \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки*

$$\|\tilde{T}(t)\Pi\partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-|\theta|/2 - (n/2)(1/p - 1/q)} \quad (2.8)$$

при выполнении следующих условий:

$$|\theta| \leq 1, \quad 1 \leq p \leq q < \infty, \quad q > 1 \quad \text{при} \quad |\theta| = 0, \quad 1 < p \leq q < \infty \quad \text{при} \quad |\theta| = 1.$$

Условия теоремы 1 можно сформулировать в терминах возмущенного оператора Озеена. Опуская выкладки, отметим, что при $\operatorname{Im} z \geq 0$ справедлива формула

$$\mathcal{F}_z[T(t)B] = -R_{-iz}(A)B,$$

где $R_{-iz}(A)$ – резольвента оператора Озеена. В свою очередь, резольвенту $R_\lambda(A)$ при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ на финитных соленоидальных гладких полях можно представить в виде

$$R_\lambda(A)u = -\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{|\xi|^2 + iu_\infty \xi_1 + \lambda} \mathcal{F}u, \quad (2.9)$$

где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье.

Здесь следует сделать одну оговорку. Точка $\lambda = 0$ является точкой спектра оператора Озеена, однако оператор, определяемый правой частью (2.9), при $\lambda = 0$ можно рассматривать как неограниченный оператор, и для него удобно сохранить обозначение $R_0(A)$. Применение теорем Михлина и Лизоркина о мультипликаторах преобразования Фурье (см., например, [12]) приводит к следующим утверждениям:

- при $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ оператор $R_\lambda(A)$ является ограниченным оператором из $S_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ для всех $p \in (1, \infty)$;
- при $\lambda = 0$ оператор $\partial^\theta R_0(A)$ является ограниченным оператором из $S_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^n)$ при выполнении условий

$$|\theta| \leq 2, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad \frac{2 - |\theta|}{n + 1} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2 - |\theta|}{n}.$$

- при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и выполнении условий $1 < p \leq q < \infty$, $1/(n+1) \leq 1/p - 1/q \leq 1/n$ справедливы равномерные по λ оценки

$$\|\partial_j R_\lambda(A)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq}. \quad (2.10)$$

Далее, ввиду компактности вложения $W_p^1(D) \subset L_p(D)$ для гладких ограниченных областей оператор $R_\lambda(A)B$ является вполне непрерывным оператором из $S_p(\mathbb{R}^n)$ в $S_p(\mathbb{R}^n)$ при

$$\frac{n+1}{n} < p < \infty, \quad \text{если} \quad \lambda = 0, \quad 1 < p < \infty, \quad \text{если} \quad \lambda \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Теперь из теории Фредгольма следует, что оператор $I - \mathcal{F}_z[T(t)B]$ для любого $z \in \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ обратим в пространстве $S_q(\Omega)$ при любом $q > n/(n-1)$ тогда и только тогда, когда ядро $\ker_q(I + R_\lambda(A)B)$ оператора $I + R_\lambda(A)B$, действующего

в пространстве $S_q(\mathbb{R}^n)$, тривиально для всех $q > n/(n-1)$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Кроме того, из сглаживающих свойств операторов $R_\lambda(A)B$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}_q(I + R_\lambda(A)B) &= \operatorname{Ker}_p(I + R_\lambda(A)B), \\ \operatorname{Ker}_q(I + R_\lambda(A)B) &= \operatorname{Ker}_q(A + B - \lambda I) \end{aligned} \quad \text{при } p, q > \frac{n+1}{n}.$$

Поэтому, говоря далее о собственных числах возмущенного оператора Озеена, мы будем иметь в виду его собственные числа, отвечающие собственным функциям из пространства $S_q(\mathbb{R}^n)$ при любом фиксированном $q > (n+1)/n$. Из изложенного следует, что множество собственных чисел из полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ не зависит от q .

Таким образом, установлена

ТЕОРЕМА 2. Пусть $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$, и возмущенный оператор Озеена не имеет собственных чисел в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. Тогда для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки, сформулированные в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Естественно возникает вопрос: при каких условиях на поле w выполняются предположения теоремы 2? Так как при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ выполняются равномерные по λ оценки (2.10), то при $q > n/(n-1)$, $\varrho \in [n, n+1]$ справедливо неравенство

$$\|R_\lambda(A)B\|_{q \rightarrow q} \leq c_{\varrho, q} \|w\|_\varrho,$$

где константа $c_{\varrho, q}$ зависит только от ϱ, q . Отсюда следует, что при выполнении условия $c_{\varrho, q} \|w\|_\varrho < 1$ для фиксированных ϱ, q возмущенный оператор Озеена не имеет собственных чисел в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. В общем случае вопрос остается открытым. Более того, автору неизвестны примеры течений, для которых у возмущенного оператора Озеена имеются собственные значения в указанной полуплоскости.

Для получения степенных оценок для операторов $\partial^\theta \tilde{T}(t)$ перейдем к сопряженным операторам $\tilde{T}^*(t) \Pi \partial^\theta$. При этом следует иметь в виду, что у оператора $\tilde{A}^*$ нарушается дивергентная структура. Это приводит к некоторым изменениям в оценках.

Заметим, что сопряженный оператор имеет вид $\tilde{A}^* = A^* + B^*$, где

$$A^* = \Pi(\Delta + u_\infty \partial_1), \quad B^* u = \Pi \left((\nabla, w) u + \sum_{j=1}^n (\nabla w_j) u_j \right).$$

Оператор A^* по существу совпадает с оператором A , если заменить u_∞ на $-u_\infty$. Поэтому сопряженная полугруппа $T^*(t)$ удовлетворяет тем же оценкам, что и $T(t)$. Далее, аналогично предыдущему $u(t) = \tilde{T}^*(t) u_0$ определяется из уравнения

$$u(t) = T^*(t) u_0 + \int_0^t T^*(t-s) B^* u(s) ds.$$

Для оператор-функции $T^*(t) B^*$ справедливо неравенство

$$\|T^*(t) B^*\|_{p \rightarrow q} \leq c_{p, q} (t^{-1/2 - (n/2)(1/p + 1/\varrho - 1/q)} \|w\|_\varrho + t^{-(n/2)(1/p + 1/\sigma - 1/q)} \|\nabla w\|_\sigma),$$

причем должны выполняться условия

$$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{\varrho} < 1, \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma} < 1, \quad 1 < p, q < \infty.$$

Анализ этих условий показывает, что нужная оценка

$$\|T^*(t)B^*\|_{q \rightarrow q} \leq c_q t^{-1/2}(1+t)^{-\gamma}, \quad \frac{1}{2} + \gamma > 1,$$

выполняется при $q > n/(n-2)$, если дополнительно к условию $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$ потребуем, чтобы $\nabla w \in L_{\sigma_1} \cap L_\infty$, $\sigma_1 < n/2$. Далее, мы должны потребовать отсутствия у оператора $\tilde{A}^*$ собственных значений в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, отвечающих собственным векторам из пространств $S_q(\mathbb{R}^n)$ для всех $q > n/(n-2)$ (а на самом деле, достаточно для одного из таких q). Однако это условие не является новым, а следует из отсутствия собственных значений у возмущенного оператора Озеена. Теперь, дословно повторяя доказательство для полугруппы $\tilde{T}(t)$, приходим к выводу, что при выполнении условий теоремы 2 справедливы оценки

$$\|\tilde{T}^*(t)\Pi\partial^\theta\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-|\theta|/2 - n/2(1/p-1/q)}, \quad (2.11)$$

если только $n/(n-1) < p \leq q < \infty$. Отсюда из соображений двойственности вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w \in L_{\rho_1} \cap L_\infty$, $\rho_1 < n$, $\nabla w \in L_{\sigma_1} \cap L_\infty$, $\sigma_1 < n/2$ и выполняются предположения теоремы 2. Тогда

$$\|\nabla \tilde{T}(t)\|_{p \rightarrow q} \leq c_{pq} t^{-1/2 - (n/2)(1/p-1/q)}, \quad (2.12)$$

если только $1 < p \leq q < n$.

3. Существование малых решений. Рассмотрим вопрос о глобальной разрешимости задачи Коши возмущенной системы Озеена (1.3). Ее решения будем понимать в обобщенном смысле как решения интегрального уравнения для возмущений с начальным условием u_0

$$u(t) = \tilde{T}(t)u_0 + \int_0^t \tilde{T}(t-s)(\nabla, u)u(s) ds. \quad (3.1)$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2 и, следовательно, для возмущенной полугруппы Озеена справедливы оценки (2.8).

Введем банахово пространство $X(q, \alpha, \beta)$ вектор-функций из $C((0, \infty), S_q(\mathbb{R}^n))$ с конечной нормой

$$\|u\|_{X(q, \alpha, \beta)} = \sup_t \|t^\alpha (1+t)^\beta u(t)\|_q.$$

Рассмотрим нелинейный оператор

$$(Qu)(t) = \int_0^t \tilde{T}(t-s)(\nabla, u)u(s) ds \quad (3.2)$$

и выясним условия, при которых этот оператор непрерывно отображает пространство $X(q, \alpha, \beta)$ в себя. Для оценок используем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Для интеграла

$$I(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\beta} (1+s)^{-\gamma} ds,$$

где $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma \geq 0$, справедливы оценки

$$I(t) \leq c \begin{cases} t^{1-\alpha-\beta}(1+t)^{-\gamma}, & 1-\beta-\gamma > 0, \\ t^{1-\alpha-\beta}(1+t)^{\beta-1}, & 1-\beta-\gamma < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < t < 1$, то очевидно, что $I(t) \leq ct^{1-\alpha-\beta}$. При $t > 1$ разбиваем область интегрирования на части $[0, t/2]$ и $[t/2, t]$. Для соответствующих интегралов имеем

$$I_1(t) \leq c \begin{cases} t^{1-\alpha-\beta-\gamma}, & 1-\beta-\gamma > 0, \\ t^{-\alpha}, & 1-\beta-\gamma < 0, \end{cases} \quad I_2(t) \leq ct^{1-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Следовательно, при больших t выполняется неравенство $I_2(t) \leq I_1(t)$. Поэтому для $I(t)$ справедлива оценка, приведенная в лемме. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для оператора Q при выполнении условий $\alpha < 1/2$, $0 \leq 2/q - 1/p < 1/n$, $q \geq 2$ справедливы оценки

$$\|Qu(t)\|_p \leq c \|u\|_{q,\alpha,\beta}^2 \begin{cases} t^{1/2-(n/2)(2/q-1/p)-2\alpha}(1+t)^{-2\beta}, & \alpha + \beta < \frac{1}{2}, \\ t^{1/2-(n/2)(2/q-1/p)-2\alpha}(1+t)^{2\alpha-1}, & \alpha + \beta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие оценок (2.8) полугруппы $\tilde{T}(t)$ имеем

$$\|Qu(t)\|_p \leq c \|u\|_{q,\alpha,\beta}^2 \int_0^t (t-x)^{-1/2-(n/2)(2/q-1/p)} x^{-2\alpha} (1+x)^{-2\beta} dx.$$

После этого остается сослаться на лемму 2.

ЛЕММА 4. Пусть

$$q > n, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1-n/q}{2}, \quad \frac{1-n/q}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{1+n/q}{2}, \quad \alpha + \beta \neq \frac{1}{2}.$$

Тогда оператор

$$(Qu)(t) = \int_0^t \tilde{T}(t-s)(\nabla, u)u(s) ds$$

непрерывно действует из $X_{q,\alpha,\beta}$ в $X_{q,\alpha',\beta'} \subset X_{q,\alpha,\beta}$, причем $\alpha' = 2\alpha + (n/q - 1)/2$, и $\beta' = 2\beta$ при $\alpha + \beta < 1/2$, $\beta' = 1 - 2\alpha$ при $\alpha + \beta > 1/2$.

Кроме того, справедливы неравенства

$$\|Qu(t)\|_{q,\alpha,\beta} \leq c(q, \alpha, \beta) \|u\|_{q,\alpha,\beta}^2, \quad (3.3)$$

$$\|Qu_1 - Qu_2\|_{q,\alpha,\beta} \leq c(q, \alpha, \beta) \|u_1 - u_2\|_{q,\alpha,\beta} \max \|u_j\|_{q,\alpha,\beta}. \quad (3.4)$$

Данная лемма является непосредственным следствием предыдущей.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует $\varepsilon(q, \alpha, \beta) > 0$ такое, что при выполнении условия

$$\|\tilde{T}(t)u_0\|_{X_{q,\alpha,\beta}} \leq \varepsilon(q, \alpha, \beta)$$

интегральное уравнение (3.1) имеет единственное решение в пространстве $X_{q,\alpha,\beta}$.

Пусть $u(t)$ – решение из пространства $X_{q,\alpha,\beta}$, тогда

$$\|u(t) - \tilde{T}(t)u_0\|_q \leq ct^{-\alpha'}(1+t)^{-\beta'}\|u\|_{q,\alpha,\beta}^2,$$

где α', β' определены в лемме 4.

Если $\alpha' + \beta' > \alpha + \beta$ и $\|\tilde{T}(t)u(0)\|_q \geq \eta t^{-\alpha-\beta}$, то

$$\inf \lim_{t \rightarrow \infty} \{t^{\alpha+\beta}\|u(t)\|_q\} \geq \eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о существовании малых решений получается применением теоремы Банаха о неподвижной точке с использованием оценок леммы 4. Остальные утверждения следуют из леммы 3. Единственность имеет место для любого решения интегрального уравнения ввиду его вольтерровости. Теорема доказана.

Эту теорему можно использовать для оценок решений при различных предположениях относительно начального условия u_0 . Ограничимся одним частным случаем. Пусть $u_0 \in S_r(\mathbb{R}^n)$. Из условий леммы 4 следует, что $r = n$. Поэтому

$$\tilde{T}(t)u_0 \in X_{q,\alpha(q),0}, \quad \alpha(q) = \frac{1-n/q}{2} \quad \text{при любом } q > n.$$

Для решения $u(t)$ интегрального уравнения для возмущений справедлива оценка

$$\|u(t)\|_p \leq ct^{-\alpha(p)}(\|u_0\|_n + \|u\|_{q,\alpha(q),0}^2) \quad (3.5)$$

при выполнении условий $p \geq n$, $2/q - 1/n < 1/p \leq 2/q$. В результате приходим к следующему заключению: если $u(t) \in X_{q,\alpha(q),0}$ при некотором $q > n$, то $u(t) \in X_{q,\alpha(q),0}$ при всех $q \geq n$.

В частности, из неравенства (3.5) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если возмущенный оператор Озеена не имеет собственных значений в полуплоскости $\{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, то стационарное решение устойчиво по Ляпунову в пространстве $S_n(\mathbb{R}^n)$.

4. Оценки решений. Пусть $u(t)$ – решение интегрального уравнения возмущений с начальным условием $u|_{t=0} = u_0$. Дальнейшей целью является исследование поведения этого решения при $t \rightarrow \infty$.

Предварительно заметим, что из теоремы 4 следует, что при любом фиксированном $p > n$ и достаточно малой константе $\varepsilon(p, \alpha, \beta)$ существует единственное решение интегрального уравнения возмущений, принадлежащее пространству $X(p, \alpha, \beta)$ при условиях леммы 4.

Далее, не предполагая малости решения $u(t)$, будем считать, что $u(t)$ принадлежит одному из пространств $X(p, \alpha, \beta)$, в котором заведомо существуют решения, хотя бы и малые, и исследовать вопрос о принадлежности этого решения более узкому пространству такого типа, если этому пространству принадлежит поле $\tilde{T}(t)u_0$.

Согласно теореме 4 наиболее широким в этом смысле пространством при $p > n$ является

$$X(p, \alpha_*(p), 0), \quad \text{где } \alpha_*(p) = \frac{1}{2} - \frac{n}{2p}.$$

Однако в этом случае оператор Q , вообще говоря, не улучшает класс решения (см. лемму 4). Поэтому будем предполагать, что решение $u(t)$ принадлежит более узкому пространству $X(p, \alpha_*(p), \beta)$, где в качестве β можно взять любое сколь угодно малое положительное число.

ЛЕММА 5. Пусть выполнено условие

$$u_0 \in S_r(\mathbb{R}^n) \cap S_l(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq r \leq n \leq l < \infty,$$

и $u(t)$ – решение интегрального уравнения возмущений (3.1), принадлежащее пространству $X(p, \alpha_*(p), \beta)$ при $p > n$ и некотором $\beta > 0$. Тогда $u(t)$ принадлежит всем пространствам $X(q, \alpha_*(q), \beta'(q))$ при $q > n$ и $\beta'(q) = \min\{(n/2)(1/r - 1/n), n/q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие оценок полугруппы $\tilde{T}(t)$ справедливы неравенства

$$\|\tilde{T}(t)u_0\|_q \leq c_q t^{-\alpha(q)} (1+t)^{-\beta(q)},$$

где

$$\alpha(q) = \begin{cases} 0, & r \leq q \leq l, \\ \frac{n}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{q} \right), & q \geq l, \end{cases} \quad \beta(q) = \begin{cases} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right), & r \leq q \leq l, \\ \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right), & q \geq l, \end{cases}$$

из которых следует, что $\tilde{T}(t)u_0$ принадлежит всем пространствам $X(q, \alpha(q), \beta(q))$ при всех $q \geq r$. Из леммы 4 вытекает, что включение $u(t) \in X(p, \alpha_*(p), \beta)$ влечет включения

$$Qu(t) \in X(p, \alpha_*(p), 2\beta), \quad \text{если } \alpha_*(p) + \beta < \frac{1}{2},$$

или

$$Qu(t) \in X\left(p, \alpha_*(p), \frac{n}{p}\right), \quad \text{если } \alpha_*(p) + \beta > \frac{1}{2}.$$

Заметим, что при $\alpha_*(p) + \beta = 1/2$ можно уменьшить β и свести дело к первому случаю. Учитывая, что $\tilde{T}(t)u_0 \in X(p, \alpha_*(p), (n/2)(1/r - 1/n))$, и применяя при малых β необходимое число раз первое включение, устанавливаем, что $u(t) \in X(p, \alpha_*(p), \beta'(p))$. Заметим, что в случае $1/r - 1/n \leq 2/p$ показатель $\beta'(p)$ нельзя улучшить.

Перейдем к оценкам q -норм решения $u(t)$ при $q \neq p$. Согласно лемме 3 получаем, что $u(t) \in X(q, \alpha_*(q), \beta)$ с некоторым $\beta > 0$ для всех q , удовлетворяющих условию $0 \leq 2/p - 1/q < 1/n$. После этого, повторяя рассуждение для случая $q = p > n$, получим, что $u(t) \in X(q, \alpha_*(q), \beta'(q))$ для всех q с условием $0 \leq 2/p - 1/q < 1/n$. Повторяя описанный процесс, устанавливаем, что предыдущее включение верно для всех $q > n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены предположения леммы 5 и $1 \leq r < q \leq n$. Если $1/r - 1/q \geq 1/n$, то

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем целое $s \geq 0$ такое, что $q_s = 2^s q \leq n < q_{s+1} = 2^{s+1} q$. Ввиду оценок

$$\|Qu(t)\|_{q_s} \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2} \|u(x)\|_{q_{s+1}}^2 dx, \quad \|u(t)\|_{q_{s+1}} \leq ct^{-\alpha_*(q_{s+1})} (1+t)^{-\beta'(q_{s+1})}$$

и неравенства

$$\alpha_*(q_{s+1}) + \beta'(q_{s+1}) = \min \left(\frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q_{s+1}} \right), \frac{1}{2} + \frac{n}{2q_{s+1}} \right) > \frac{1}{2}$$

имеем

$$\|Qu(t)\|_{q_s} \leq c(1+t)^{-1/2}, \quad \|u(t)\|_{q_s} \leq c(1+t)^{-1/2}.$$

Далее, для q_{s-1} имеем

$$\|Qu(t)\|_{q_{s-1}} \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2} (1+x)^{-1} dx = c(1+t)^{-1/2+0}.$$

Последняя форма записи означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое c_ε , что $\|Qu(t)\|_{q_{s-1}} \leq (1+t)^{-1/2+\varepsilon}$. Так как $1/r - 1/q_{s-1} \geq 1/n$, то

$$\|u(t)\|_{q_{s-1}} \leq c(1+t)^{-1/2+0}.$$

Естественно, что в этом случае $s-1 \geq 0$.

Аналогично, продолжая оценки, получаем

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-1/2+0}.$$

Для уточнения последнего неравенства следует рассмотреть соотношение

$$\|Qu(t)\|_q \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2-(n/2)(1/s-1/q)} \|u(x)\|_{2s}^2 dx,$$

где $(1/s - 1/q) > 0$ достаточно мало. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть выполнены предположения леммы 5 и $r \leq q \leq n$. Если $1/r - 1/q < 1/n$, то

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-(n/2)(1/r-1/q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $1/r - 1/(2q) \geq 1/n$. Если $2q > n$, то из леммы 5 следует, что

$$\|u(t)\|_{2q} \leq ct^{-\alpha_*(2q)} (1+t)^{-\beta'(2q)}.$$

Поэтому

$$\|Qu(t)\|_q \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2} x^{-2\alpha_*(2q)} (1+x)^{-2\beta'(2q)} dx.$$

Так как

$$\alpha_*(2q) + \beta'(2q) = \min \left(\frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2q} \right), \frac{1}{2} + \frac{n}{4q} \right) \geq \frac{1}{2},$$

то

$$\|Qu(t)\|_q \leq c(1+t)^{-1/2+0}$$

и, следовательно,

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-(n/2)(1/r-1/q)}. \quad (4.1)$$

Если $2q < n$, то в силу леммы 6 выполняется неравенство

$$\|u(t)\|_{2q} \leq c(1+t)^{-1/2},$$

которое влечет оценку (4.1).

Далее, так как $1/r - 1/(2q) \geq 1/q - 1/(2q) = 1/(2q)$, то из предыдущего следует, что утверждение леммы установлено при $r \leq q \leq n/2$. Поэтому остается рассмотреть случай $n/2 \leq r \leq q \leq n$, $q > n/2$. Выбрав $\varepsilon = 2/s - 1/q > 0$ достаточно малым, чтобы было $s > n$, применим неравенство

$$\|Qu(t)\|_q \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2-(n/2)(2/s-1/q)} \|u(x)\|_s^2 dx.$$

С учетом леммы 5 и того, что

$$\alpha_*(s) + \beta'(s) = \min\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right), \frac{1}{2} + \frac{n}{2s}\right),$$

опять получаем оценку (4.1).

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $u(t)$ – решение интегрального уравнения возмущений, удовлетворяющее условиям

$$u(0) \in S_r(\mathbb{R}^n) \cap S_l(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq r < n \leq l < \infty, \\ \|u(t)\|_q \leq ct^{-\alpha(q)}(1+t)^{-\beta(q)}$$

при $q \geq 2r$, где $\alpha(q) < 1/2$, $\alpha(q) + \beta(q) > 1/4$. Тогда

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-(n/2)(1/r-1/q)}$$

при больших t и $q \geq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При больших t справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|Qu(t)\|_q &\leq c \int_0^R (t-x)^{-1/2-(n/2)(1/r-1/q)} \|u(x)\|_{2r}^2 dx \\ &\quad + c \int_R^{t-1} (t-x)^{-1/2-(n/2)(1/r-1/q)} \|u(x)\|_{2r}^2 dx \\ &\quad + c \int_{t-1}^t (t-x)^{-1/2} \|u(x)\|_{2q}^2 dx, \end{aligned}$$

вследствие которого в силу предположений леммы о поведении норм $\|u(t)\|_q$ имеем

$$\|Qu(t)\|_q \leq c\{t^{-\beta(r,q)} + t^{-\beta(r,q)-2\gamma(2r)+1} + t^{-2\gamma(2r)} + t^{-2\gamma(2q)}\},$$

где

$$\beta(r, q) = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right), \quad \gamma(q) = \alpha(q) + \beta(q) > \frac{1}{4}, \quad \text{если} \quad \beta(r, q) \neq 1, \quad \gamma(2r) \neq \frac{1}{2}.$$

Отметим, что последние условия несущественны, так как в этом случае $\beta(r, q)$ и $\gamma(2r)$ можно заменить на $\beta(r, q) - 0$ и $\gamma(2r) - 0$.

Таким образом, при больших t верно неравенство

$$\|Qu(t)\|_q \leq ct^{-\xi(q)},$$

где

$$\xi(q) = \min(\beta(r, q), \beta(r, q) + 2\gamma(2r) - 1, 2\gamma(2r), 2\gamma(2q)).$$

Вследствие неравенств для $\|\tilde{T}(t)u(0)\|_q$ имеем

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\gamma_1(q)},$$

где $\gamma_1(q) = \min(\xi(q), \eta(r, q))$, $\eta(r, q) = \beta(r, q) - 1/2$, или с учетом того, что $\gamma(2q) > 1/4$ при $q \geq r$, имеем $\gamma_1(q) \geq \min(1/2, \eta(r, q))$. Поэтому утверждение леммы верно при всех q с условием $\eta(r, q) \leq 1/2$, т.е. при $1/r - 1/q \leq 1/n$.

Применяя индукцию, при больших t получаем

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\gamma_k(q)},$$

где

$$\gamma_k(q) = \min\left(\eta(r, q), \eta(r, q) + 2\gamma_{k-1}(2r) - \frac{1}{2}, 2\gamma_{k-1}(2r), 2\gamma_{k-1}(2q)\right).$$

Теперь отметим, что при $q \geq r$ справедливо неравенство $\gamma_k(2q) \geq \gamma_k(2r) > 1/4$. Действительно, это верно для $k = 1$, так как $\eta(r, 2q) \geq \eta(r, 2r) > 1/4$, а применение индукции дает

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1}(2q) &= \min\left(\eta(r, 2q), \eta(r, 2q) + 2\gamma_k(2r) - \frac{1}{2}, 2\gamma_k(2r), 2\gamma_k(4q)\right) \\ &= \min(\eta(r, 2q), 2\gamma_k(2r)) \geq \min(\eta(r, 2r), 2\gamma_k(2r)) = \gamma_{k+1}(2r) > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Учитывая установленные факты, получаем

$$\gamma_k(q) = \min(\eta(r, q), 2\gamma_{k-1}(2r)) = \min(\eta(r, q), 2\eta(r, 2r), 4\gamma_{k-2}(2r)).$$

И так как $2\eta(r, 2r) = n/(2r) > \eta(r, q)$, то

$$\gamma_k(q) = \min(\eta(r, q), 2^{k-1}\gamma_1(2r)) = \eta(r, q)$$

при достаточно больших k . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено условие

$$u_0 \in S_r(\mathbb{R}^n) \cap S_l(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq r < n \leq l < \infty,$$

и $u(t)$ – решение интегрального уравнения возмущений, принадлежащее пространству $X(p, \alpha_*(p), \beta)$ при $p > n$ и некотором $\beta > 0$. Тогда $u(t)$ принадлежит всем пространствам $X(q, \alpha_*(q), \beta^*(q))$ при $q \geq r$, где

$$\alpha_*(q) = \begin{cases} 0, & r \leq q \leq n, \\ \frac{1}{2} - \frac{n}{2q}, & q > n, \end{cases} \quad \beta^*(q) = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) - \alpha_*(q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 известно, что $u(t) \in X(q, \alpha_*(q), \beta'(q))$ при $q > n$. Из леммы 3 заключаем, что $u(t) \in X(n, 0, 0)$. Поэтому при ограниченных t

$$\|Qu(t)\|_q \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2-(n/2)(2/n-1/q)} \|u(x)\|_n^2 dx \leq \text{const}$$

при $q \in [n/2, n)$. Аналогично

$$\|Qu(t)\|_q \leq c \int_0^t (t-x)^{-1/2-(n/2)(3/n-1/q)} \|u(x)\|_{2n/3}^2 dx \leq \text{const}$$

при $q \in [n/3, n/2)$ и т.д. Тем самым установлено, что $\alpha_*(q) = 0$ при $r \leq q \leq n$. Теперь остается оценить решение при больших t . В силу леммы 8 достаточно установить, что

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\alpha(q)}(1+t)^{-\beta(q)}$$

при $q \geq 2r$, $\alpha(q) < 1/2$, $\alpha(q) + \beta(q) > 1/4$. Если $q > n$, то вследствие леммы 5

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\alpha_*(q)}(1+t)^{-\beta'(q)}$$

и $\alpha_*(q) + \beta'(q) > 1/4$.

Если $2r \leq q \leq n$, то либо при $1/(2r) - 1/q \geq 1/n$ в силу леммы 6

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-1/2},$$

либо при $1/(2r) - 1/q < 1/n$ в силу леммы 7

$$\|u(t)\|_q \leq c(1+t)^{-(n/2)(1/r-1/q)}.$$

Но в последнем случае $(n/2)(1/r - 1/q) \geq (n/2)(1/r - 1/(2r)) > 1/4$, что и завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 9. Предположим, что дополнительно к предположениям теоремы 5 выполнена при больших t для всех $q \geq r$ оценка

$$\|\tilde{T}(t)u(0)\|_q \leq ct^{-\delta(q)},$$

где $\delta(q)$ – возрастающая функция с условием

$$\eta(r, q) = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \leq \delta(q) \leq \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) = \beta(r, q).$$

Тогда при больших t для всех $q \geq r$ справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\gamma(q)},$$

где $\gamma(q) = \min(\delta(q), \beta(r, q) + 2\delta(2r) - 1, 2\delta(2r))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично лемме 8, получаем при больших t

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-\gamma_*(q)},$$

где

$$\gamma_k(q) = \min(\delta(q), \beta(r, q), \beta(r, q) + 2\gamma_{k-1}(2r) - 1, 2\gamma_{k-1}(2r), 2\gamma_{k-1}(2q)) \quad (4.2)$$

и $\gamma_0(q) = \eta(r, q)$. По индукции легко проверяется, что $\gamma_k(q) \geq \gamma_{k-1}(q)$. Поэтому существует $\gamma(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(q)$. Отметим, что возрастание $\delta(q)$ влечет возрастание всех $\gamma_k(q)$ и $\gamma(q)$. Переходя к пределу в соотношении (4.2), получим

$$\gamma(q) = \min(\delta(q), \beta(r, q) + 2\gamma(2r) - 1, 2\gamma(2r)). \quad (4.3)$$

Из соотношения (4.3) вытекает, что $\gamma(2r) = \min(\delta(2r), \beta(r, 2r) + 2\gamma(2r) - 1)$. Но равенство $\gamma(2r) = \beta(r, 2r) + 2\gamma(2r) - 1$ приводит к противоречию, так как оно влечет оценку $\gamma(2r) < \gamma_0(2r)$. Следовательно, $\gamma(2r) = \delta(2r)$. Поэтому окончательно

$$\gamma(q) = \min(\delta(q), \beta(r, q) + 2\delta(2r) - 1, 2\delta(2r)).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что дополнительно к предположениям теоремы 5 выполнено условие $u_0 = \partial v_0$, где $v_0 \in S_\varrho(\mathbb{R}^n)$, $1/\varrho \leq 1/r \leq 1/\varrho + 1/n$. Тогда при больших t и $q \geq \varrho$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_q \leq ct^{-1/2-(n/2)(1/\varrho-1/q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений теоремы 6 вытекает, что

$$\delta(q) = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{q} \right).$$

Применяя лемму 9 с заменой r на ϱ , получаем, что

$$\gamma(q) = \min(\delta(q), \beta(\varrho, q) + 2\delta(2\varrho) - 1, 2\delta(2\varrho)).$$

Но

$$2\delta(2\varrho) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4\varrho} \right) = 1 + \frac{n}{2\varrho} > \delta(q), \quad 2\delta(2\varrho) > 1,$$

поэтому $\gamma(q) = \delta(q)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Юдович, *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости*, Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1984.
- [2] Т. Kato, "Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions", *Math. Z.*, **187**:4 (1984), 471–480.
- [3] Л. И. Сазонов, В. И. Юдович, "Устойчивость стационарных решений параболических уравнений и системы Навье–Стокса во всем пространстве", *Сиб. матем. журн.*, **29**:1 (1988), 151–158.
- [4] P. Biler, M. Cannone, G. Karch, "Asymptotic stability of Navier–Stokes flow past an obstacle", *Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems*, Banach Center Publ., **66**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004, 47–59.
- [5] Т. Miyakawa, "On nonstationary solutions of the Navier–Stokes equations in an exterior domain", *Hiroshima Math J.*, **12**:1 (1982), 115–140.

- [6] Л. И. Сазонов, “Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:5 (1994), 85–109.
- [7] Х. И. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [8] Л. И. Сазонов, “Оценки возмущенной полугруппы Озеена”, *Владикавказ. матем. журн.*, **11**:3 (2009), 51–61.
- [9] H.-O. Bae, B.-J. Jin, “Temporal and spatial decay rates of Navier–Stokes solutions in exterior domains”, *Bull. Korean Math. Soc.*, **44**:3 (2007), 547–567.
- [10] T. Kobayashi, Y. Shibata, “On the Oseen equation in the three-dimensional exterior domains”, *Math. Ann.*, **310**:1 (1998), 1–45.
- [11] Y. Enomoto, Y. Shibata, “On the rate of decay of the Oseen semigroup in exterior domains and its application to Navier–Stokes equation”, *J. Math. Fluid Mech.*, **7**:3 (2005), 339–367.
- [12] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

Л. И. Сазонов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
г. Владикавказ
E-mail: lsznv.46@mail.ru, sazonov@math.rsu.ru

Поступило

28.03.2010

Исправленный вариант

18.03.2011