Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Корешков, Ассоциативные n -кратные алгебры,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 1, 36–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:16:31

Ассоциативные n -кратные алгебры

Н. А. Корешков

В работе изучаются алгебры, имеющие n билинейных операций умножения $[s]: A \times A \rightarrow A$, $s = 1, \dots, n$, таких, что $(a[s]b)[r]c = a[s](b[r]c)$, $s, r = 1, \dots, n$, $a, b, c \in A$. Радикал такой алгебры определяется как пересечение аннуляторов неприводимых A -модулей, и доказывается, что он совпадает с пересечением максимальных правых идеалов, каждый из которых s -регулярен для некоторой операции $[s]$. Отсюда следует, что фактор-алгебра по радикалу полупроста.

Если n -кратная алгебра артинова, то радикал нильпотентен, а полупростая артинова n -кратная алгебра является прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых – простая алгебра.

Кроме того, в терминах сэндвичевых алгебр описана конечномерная n -кратная алгебра A над алгебраически замкнутым полем, являющаяся простым A -модулем.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm8889

В работе [1] изучались некоторые свойства n -кратных алгебр ассоциативного типа. Эти алгебры являются обобщением алгебр ассоциативного типа, которые изучались в работах [2], [3]. Указанные алгебры из работ [1]–[3] обладают тем свойством, что редукция в характеристику $p > 0$ соответствующих коммутаторных алгебр приводит к некоторым классам модулярных алгебр Ли картановского типа. В частности, стандартное умножение в модулярных гамильтоновой и контактной алгебрах является суммой “частичных” умножений соответствующей n -кратной алгебры Ли. (При $n = 2$ такие алгебры изучались в [4].) Последняя получается редукцией в характеристику $p > 0$ коммутаторной алгебры некоторой n -кратной алгебры ассоциативного типа.

В [5] изучались условия нильпотентности n -кратной ассоциативной алгебры и n -кратной алгебры Ли.

Заметим, что операции умножения в работах [1]–[3] естественным образом связаны с наличием в этих алгебрах градуировок. В данной работе, напротив, рассматриваются алгебры, в которых не предполагается наличие градуировок, и поэтому операции умножения не связаны с какими-либо градуировками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторное пространство A над полем k называется *ассоциативной n -кратной алгеброй*, если существует n билинейных отображений

$$[s]: A \times A \rightarrow A, \quad s = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющих условиям

$$(a \boxed{r} b) \boxed{s} c = a \boxed{r} (b \boxed{s} c) \quad \text{для любых } a, b, c \in A, \quad r, s = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Одним из примеров таких алгебр является следующий.

Пусть M_m – векторное пространство всех квадратных матриц размера m над полем k и $s_1, s_2, \dots, s_n$ – некоторый фиксированный набор матриц из M_m . Определим новые умножения в M_m по правилу

$$a \boxed{r} b = as_r b, \quad r = 1, \dots, n, \quad a, b \in M_m,$$

где в правой части приведенных формул берется обычное умножение квадратных матриц. Легко видеть, что формулы (1) в данном случае, конечно, выполняются.

Так как в данной статье рассматриваются лишь алгебры, удовлетворяющие определению 1, будем называть их для краткости n -кратными алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторное пространство V над полем k называется *правым модулем над n -кратной алгеброй A* (A -модулем), если существует n билинейных отображений $\ast_s: V \times A \rightarrow V$, $s = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условиям

$$(v \ast_s a) \ast_r b = v \ast_s (a \boxed{r} b) \quad \text{для любых } a, b \in A, \quad v \in V, \quad s, r = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Продолжая пример к определению 1, положим: V_m – пространство строк длины m над полем k , а каждое действие $v \ast_r a$, $v \in V$, $a \in M_m$, определено правилом $v \ast_r a = vs_r a$, где в правой части вычисляется обычное произведение векторов и матриц. Легко проверить, что формулы (2) очевидно выполняются, и пространство строк V_m можно рассматривать как правый A -модуль над n -кратной алгеброй $A = (M_m, \boxed{s}, s = 1, \dots, n)$.

Второй пример A -модуля получается, когда в качестве пространства V берется сама n -кратная алгебра A , а каждое действие $\ast_s$, $s = 1, \dots, n$, является умножением $\boxed{s}$, $s = 1, \dots, n$, в этой алгебре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное отображение φ A -модуля V в A -модуль V' называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(v \ast_s a) = \varphi(v) \ast_s a \quad \text{для любых } v \in V, \quad a \in A, \quad s = 1, \dots, n.$$

Если φ – биекция, то φ – изоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. 1) Подпространство U в A -модуле V называется *подмодулем*, если $UA \subseteq U$, где

$$UA = \langle u \ast_s a, u \in U, a \in A, s = 1, \dots, n \rangle_k.$$

В частности, подпространство I в алгебре A называется *правым идеалом*, если $IA \subseteq I$, где

$$IA = \langle x \boxed{s} a, x \in I, a \in A, s = 1, \dots, n \rangle_k.$$

Если дополнительно выполняется условие $AI \subseteq I$, то I называется *двусторонним идеалом* (или просто идеалом в A).

2) *Фактормодулем* модуля V по подмодулю U называется факторпространство $V/U = \{v + U, v \in V\}$ и действие алгебры A на V/U определено правилами

$$(v + U) *_{\bar{s}} a = v *_{\bar{s}} a + U, \quad s = 1, \dots, n.$$

3) A -модуль V называется *неприводимым (простым)*, если $VA \neq 0$ и единственные подмодули модуля V есть 0 и V .

Очевиден аналог первой теоремы о гомоморфизмах для модулей. А именно, если φ – гомоморфизм A -модуля V на A -модуль V' , где A – n -кратная алгебра, то V' изоморфен фактормодулю $V/\text{Ker } \varphi$, где $\text{Ker } \varphi = \{v \in V, \varphi(v) = 0\}$.

Более того, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Любой неприводимый A -модуль V изоморфен фактормодулю A/I , где I – максимальный правый идеал в A , причем существуют элемент $a \in A$ и операция $\bar{s}$ такие, что $x - a \bar{s} x \in I$ для любого $x \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $VA \neq 0$, существует $v \in V$ такой, что $vA \neq 0$. Более того, существует операция $*_{\bar{s}}: v *_{\bar{s}} A \neq 0$. Рассмотрим отображение $\varphi: A \rightarrow V$, определенное правилом $\varphi(a) = v *_{\bar{s}} a$. Так как V – неприводимый A -модуль и $v *_{\bar{s}} A \neq 0$, то $V = v *_{\bar{s}} A$. Поэтому φ – сюръективный гомоморфизм модулей, а $\text{Ker } \varphi$ – правый идеал в A . По первой теореме о гомоморфизмах получаем, что V изоморфен $A/\text{Ker } \varphi$. Также из неприводимости V получаем максимальность идеала $\text{Ker } \varphi$. Кроме того, из равенства $V = v *_{\bar{s}} A$ следует, что существует элемент $a \in A$ такой, что $v = v *_{\bar{s}} a$. Тогда для любого $x \in A$:

$$v *_{\bar{s}} x = (v *_{\bar{s}} a) *_{\bar{s}} x,$$

т.е. $v *_{\bar{s}} (x - a \bar{s} x) = 0$. Следовательно,

$$x - a \bar{s} x \in \text{Ker } \varphi \quad \text{для любого } x \in A.$$

Заметим, что справедливо и обратное утверждение. А именно, если I – максимальный правый идеал в A , то фактормодуль $V = A/I$ не содержит других подмодулей, кроме 0 и V . Если же существуют элемент $a_0 \in A$ и операция $\bar{s}$ такие, что $x - a_0 \bar{s} x \in I$ для любого $x \in A$, то $VA \neq 0$. Действительно, в противном случае $A^2 = AA \subseteq I$, т.е. для любого $r \in \{1, \dots, n\}$: $A \bar{r} A \subseteq I$. Следовательно, для любого элемента $a \in A$: $a \bar{r} A \subseteq I$, $r = 1, \dots, n$. В частности, для операции $\bar{s}$ и элемента a_0 : $a_0 \bar{s} x \in I$ для любого $x \in A$. Тогда из включения $x - a_0 \bar{s} x \in I$ для любого $x \in A$ следует $A \subseteq I$. Это противоречит максимальности I .

Полученный результат приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Правый идеал I n -кратной алгебры A называется *s -регулярным*, если существуют элемент $a \in A$ и операция $\bar{s}$ такие, что $x - a \bar{s} x \in I$ для любого $x \in A$.

По аналогии с ассоциативными алгебрами введем понятие радикала $J(A)$ для n -кратной алгебры A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $J(A) = \bigcap_V A(V)$, где

$$A(V) = \{x \in A, v *_{\bar{r}} x = 0 \text{ для любых } v \in V, r = 1, \dots, n\},$$

и V пробегает множество всех неприводимых A -модулей.

Для дальнейших построений удобно ввести в рассмотрение множества

$$A_s(V) = \{x \in A, v *_s x = 0 \text{ для любого } v \in V\}.$$

Тогда $A(V) = \bigcap_{s=1}^n A_s(V)$, причем каждое $A_s(V)$ – правый идеал, а $A(V)$ – двусторонний идеал в A . Кроме того, если I – правый идеал, то определим следующие “частные”:

$$(I : A) = \{x \in A \mid Ax \subseteq I\}, \quad \text{где } Ax = \langle a \boxed{s} x, a \in A, s = 1, \dots, n \rangle_k$$

$$(I : A)_s = \{x \in A \mid A \boxed{s} x \subseteq I\}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Тогда, как и выше, $(I : A)_s$ – правый идеал в A , $(I : A)$ – двусторонний идеал в A , причем $(I : A) = \bigcap_{s=1}^n (I : A)_s$.

ТЕОРЕМА 2. $J(A) = \bigcap (I : A)$, где I пробегает все максимальные правые идеалы в A , каждый из которых s -регулярен для некоторого s , причем $(I : A)$ – наибольший двусторонний идеал в A , лежащий в I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – максимальный правый идеал в A и, кроме того, s -регулярен для некоторого s . Тогда $V = A/I$ – неприводимый A -модуль и

$$A_r(V) = \{x \in A \mid (y + I) \boxed{r} x \subseteq I\}, \quad r = 1, \dots, n.$$

Если $x \in A_r(V)$, то $y \boxed{r} x \in I$ для любого $y \in A$, т.е.

$$A_r(V) \subseteq (I : A)_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $A(V) \subseteq (I : A)$. Поэтому пересечение $\bigcap (I : A)$, где I пробегает все максимальные правые идеалы в A , каждый из которых s -регулярен, для некоторого s содержит пересечение аннуляторов $\bigcap A(V)$ соответствующих неприводимых модулей, а значит, и пересечение аннуляторов всех неприводимых A -модулей, т.е. $\bigcap (I : A) \supseteq J(A)$.

Обратно, пусть V – неприводимый A -модуль. Тогда по теореме 1 $V' \cong A/I$, где I – максимальный правый идеал, s -регулярный для некоторого s . Если $x \in (I : A)_r$, т.е. $A \boxed{r} x \subseteq I$, то

$$x \in A_r(V) = \{x \in A \mid (y + I) \boxed{r} x \subseteq I\}.$$

Поэтому

$$(I : A)_r \subseteq A_r(V), \quad r = 1, \dots, n,$$

т.е. $(I : A) \subseteq A(V)$. Таким образом, пересечение аннуляторов $\bigcap A(V)$ всех неприводимых модулей содержит пересечение “частных” $\bigcap (I : A)$, когда I пробегает множество максимальных правых идеалов, каждый из которых s -регулярен, соответствующих этим модулям, а значит, радикал $J(A)$ содержит и пересечение $\bigcap (I : A)$, когда I пробегает множество всех максимальных правых идеалов, каждый из которых s -регулярен для некоторого s . Из полученных двух включений получаем сформулированное в теореме равенство.

Для доказательства второго утверждения теоремы, во-первых заметим, что $(I : A) \subseteq I$. Действительно, если $x \in (I : A)$, то $y \boxed{r} x \in I$ для любого $y \in A$ и любого $r \in \{1, \dots, n\}$. В частности, $y \boxed{s} x \in I$ для той операции $\boxed{s}$, относительно

которой правый идеал I является s -регулярным. Тогда из включения $x - a \boxed{s} x \in I$ для любого $x \in A$ следует $(I : A) \subseteq I$.

Пусть J – некоторый двусторонний идеал n -кратной алгебры A , содержащийся в I . Тогда

$$A \boxed{r} J \subseteq J \subseteq I, \quad r = 1, \dots, n.$$

Значит,

$$J \subseteq (I : A)_r, \quad r = 1, \dots, n,$$

т.е. $J \subseteq (I : A)$. Итак, $(I : A)$ – наибольший двусторонний идеал, лежащий в I .

Радикал $J(A)$ n -кратной алгебры A можно получить и как пересечение некоторых правых s -регулярных идеалов. Для доказательства этого утверждения отметим следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. *Любой s -регулярный правый идеал можно легко вложить в максимальный правый идеал, который также s -регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы дословно повторяет доказательство леммы 12.1 [4]. Необходимо лишь термин “регулярность” в лемме заменить на термин “ s -регулярность”.

Обозначим через M множество всех максимальных правых идеалов, каждый из которых s -регулярен для некоторой операции $\boxed{s}$.

ТЕОРЕМА 4. *Имеем $J(A) = \bigcap_{I \in M} I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 радикал $J(A)$ совпадает с $\bigcap_{I \in M} (I : A)$. Так как по той же теореме $(I : A) \subseteq I$, то $J(A) \subseteq \bigcap_{I \in M} I$. Обозначим это пересечение через T . Пусть x – некоторый фиксированный элемент из T , а $\boxed{s}$ – некоторая фиксированная операция n -кратной алгебры A . Рассмотрим множество

$$B = \{y + x \boxed{s} y \mid \text{для любого } y \in A\}.$$

Предположим, что $B \neq A$. Очевидно, что B – правый s -регулярный идеал. По теореме 3 идеал B содержится в максимальном правом идеале B_0 , который также s -регулярен. Так как $x \in T$, то $x \in B_0$ и, следовательно, $x \boxed{r} A \subseteq B_0$ для любой операции $\boxed{r}$. В частности, $x \boxed{s} y \in B_0$ для любого $y \in A$. Поэтому из условия $y + x \boxed{s} y \in B \subseteq B_0$ следует $y \in B_0$, т.е. $A = B_0$. Полученное противоречие означает, что $B = A$.

Таким образом, для любого элемента x из T и любой операции $\boxed{s}$ существует элемент $z \in A$ такой, что $x \boxed{s} z + z = -x$. Используя этот факт, докажем, что $T \subseteq J(A)$.

Если предположить обратное, то существует неприводимый A -модуль V такой, что $VT \neq 0$. В частности, существует $v \in V$ такой, что $vT \neq 0$. Из последнего неравенства вытекает существование такого действия $\ast$ идеала T на пространстве V , для которого $v \ast_s T \neq 0$. Так как V – неприводимый A -модуль, то $V = v \ast_s T$. Значит, существует такой элемент $t \in T$, что $v \ast_s t = -v$.

По доказанному выше для элемента t из T и операции $\boxed{s}$ существует $z \in A$ такое, что $t + z + t \boxed{s} z = 0$. Тогда

$$0 = v *_s (t + z + t \boxed{s} z) = -v + v *_s z + (v *_s t) *_s z = -v + v *_s z - v *_s z = -v.$$

Полученное противоречие означает, что $T \subseteq J(A)$, т.е. $T = J(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. n -кратная алгебра A *полупроста*, если $J(A) = 0$.

ТЕОРЕМА 5. n -кратная алгебра $A/J(A)$ *полупроста*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{A} = A/J(A)$, а $I \in M$. Тогда по теореме 4 $I \supseteq J(A)$, а по теореме о соответствии при гомоморфизме (которая очевидным образом переносится на случай n -кратных алгебр) идеал $\bar{I} = I/J(A)$ является максимальным правым идеалом в $\bar{A}$. Если идеал I был s -регулярен, то $\bar{I}$ также s -регулярен. Так как $J(A) = \bigcap_{I \in M} I$, то

$$\bar{0} = \overline{J(A)} = \bigcap_{I \in M} \bar{I}.$$

Тем более равно нулю пересечение $\cap \tilde{I}$ всех максимальных правых идеалов $\tilde{I}$ алгебры $\bar{A}$, каждый из которых s -регулярен для некоторого s , т.е. $J(\bar{A}) = \cap \tilde{I} = \bar{0}$.

В ходе доказательства теоремы 4 было отмечено, что для любого элемента $x \in J(A)$ и любой операции $\boxed{s}$ существует элемент $y \in A$ такой, что $x + y + x \boxed{s} y = 0$. Опишем некоторые характеристики радикала $J(A)$ в терминах этого свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. 1) Элемент a n -кратной алгебры A называется *s -праворегулярным*, если существует элемент $a' \in A$ такой, что $a + a' + a \boxed{s} a' = 0$. Элемент a' называется *правым s -квазиобратным*.

2) Элемент $a \in A$ называется *право-квазирегулярным*, если a является s -право-квазирегулярным для любого $s \in \{1, \dots, n\}$.

3) Правый идеал в A называется *право-квазирегулярным*, если любой его элемент право-квазирегулярен.

Из доказательства теоремы 4 вытекает, что $J(A)$ право-квазирегулярен и любой право-квазирегулярный идеал алгебры A содержится в $J(A)$. Объединяя два этих факта, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. $J(A)$ – единственный максимальный право-квазирегулярный правый идеал в n -кратной алгебре A .

Радикал $J(A)$ был определен как пересечение аннуляторов неприводимых правых A -модулей, и поэтому его следует называть правым радикалом. Аналогично можно определить левый радикал $J'(A)$ как пересечение аннуляторов неприводимых левых A -модулей. Покажем, что они совпадают.

Вначале рассмотрим случай, когда элемент $a \in A$ является s -право-квазирегулярным и s -лево-квазирегулярным, т.е. существуют правый s -квазиобратный a_s и левый s -квазиобратный a'_s , что

$$a + a_s + a \boxed{s} a_s = 0, \quad a + a'_s + a'_s \boxed{s} a = 0.$$

Тогда

$$a'_s \boxed{s} a + a'_s \boxed{s} a_s + a'_s \boxed{s} a \boxed{s} a_s = 0, \quad a \boxed{s} a_s + a'_s \boxed{s} a_s + a'_s \boxed{s} a \boxed{s} a_s = 0,$$

откуда $a'_s \boxed{s} a = a \boxed{s} a_s$. Соединяя это соотношение с равенством

$$a + a_s + a \boxed{s} a_s = a + a'_s + a'_s \boxed{s} a_s,$$

имеем $a_s = a'_s$.

Пусть $a \in J(A)$. Тогда для операции $\boxed{s}$ существует элемент a_s такой, что

$$a + a_s + a \boxed{s} a_s = 0.$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что $a_s \in J(A)$, и поэтому для элемента a_s , в свою очередь, существует элемент $\bar{a}_s$ такой, что

$$a_s + \bar{a}_s + a_s \boxed{s} \bar{a}_s = 0.$$

Таким образом, элемент a_s имеет левый s -квазиобратный a и правый s -квазиобратный $\bar{a}_s$. Тогда по доказанному выше $a = \bar{a}_s$, и последнее соотношение s -квазирегулярности можно записать в виде $a_s + a + a_s \boxed{s} a = 0$. Из этого соотношения следует, что элемент a_s является не только правым, но и левым s -квазиобратным для a , т.е. $J(A)$ – левый регулярный идеал. Следовательно, $J(A)$ содержится в левом радикале $J'(A)$. Аналогично проверяется, что $J'(A) \subseteq J(A)$, т.е. левый и правый радикалы совпадают.

Рассмотрим некоторые свойства n -кратных алгебр, связанные с понятием нильпотентности. Обозначим через $a \boxed{s}^m$ произведение $\underbrace{a \boxed{s} \cdots \boxed{s} a}_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. 1) Элемент a называется s -нильпотентным, если $a \boxed{s}^m = 0$ для некоторого натурального m .

2) Элемент a нильпотентен, если a является s -нильпотентным для любого $s \in \{1, \dots, n\}$.

3) Идеал (правый, левый, двусторонний) называется ниль-идеалом, если любой его элемент нильпотентен.

ТЕОРЕМА 7. Каждый правый (левый) ниль-идеал n -кратной алгебры A содержится в ее радикале $J(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент a из A такой, что $a \boxed{s}^m = 0$ для некоторого натурального m . Обозначим

$$b = -a + a \boxed{s}^2 - \cdots + (-1)^{m-1} a \boxed{s}^{(m-1)}.$$

Тогда $a + b + a \boxed{s} b = 0$. Таким образом, каждый правый ниль-идеал I право-квазирегулярен, т.е. $I \subseteq J(A)$.

Применим полученные результаты к артиновым n -кратным алгебрам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. n -кратная алгебра называется артиновой (справа), если любое непустое множество ее правых идеалов имеет минимальный элемент.

Так же, как в случае ассоциативных алгебр, легко проверить, что n -кратная алгебра A артинова тогда и только тогда, когда любая убывающая цепь правых идеалов

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m \supseteq \cdots$$

стабилизируется, т.е. существует номер m такой, что $I_m = I_{m+k}$ для всех $k > 0$.

ТЕОРЕМА 8. *Если n -кратная алгебра A артинова, то $J(A)$ – нильпотентный идеал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дословно повторяет рассуждения для обычной алгебры (например, [4], теорема 1.3.1).

СЛЕДСТВИЕ. *Если n -кратная алгебра A артинова, то любой ее нильидеал (правый, левый или двусторонний) нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 7 каждый правый (левый) нильидеал I n -кратной алгебры A лежит в ее радикале $J(A)$. Так как $J(A)$ – нильпотентный идеал, то I также нильпотентен.

Целью дальнейших построений является описание структуры полупростой артиновой n -кратной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Ненулевой элемент e n -кратной алгебры A назовем s -идемпотентом, если $e \boxed{s} e = e$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть A – полупростая n -кратная артинова алгебра, I – минимальный правый идеал в A . Тогда $I = e \boxed{s} A$ для некоторой операции $\boxed{s}$ и некоторого s -идемпотента e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как алгебра A без нильпотентных элементов, то $I^2 \neq 0$. Поэтому в силу минимальности I имеем $I^2 = I$. По определению

$$I^2 = \langle I \boxed{s} I, s = 1, \dots, n \rangle_k,$$

а каждое произведение $I \boxed{s} I$ – правый идеал A , содержащийся в I . Поэтому существует хотя бы одно s такое, что $I \boxed{s} I = I$. Отсюда следует, что найдется элемент $x \in I$ такой, что $x \boxed{s} I = I$. Тогда существует элемент $e \in I$ такой, что $x \boxed{s} e = x$. Умножая последнее соотношение на e , имеем

$$(x \boxed{s} e) \boxed{s} e = x \boxed{s} e \quad \text{или} \quad x \boxed{s} (e - e \boxed{s} e) = 0.$$

Для данного элемента x обозначим

$$K_x^s = \{y \in I \mid x \boxed{s} y = 0\}.$$

Очевидно, K_x^s – правый идеал, содержащийся в I . Так как $x \boxed{s} I \neq 0$, то $K_x^s \neq I$. Значит, $K_x^s = 0$.

Из соотношения $x \boxed{s} (e - e \boxed{s} e) = 0$ следует, что $e = e \boxed{s} e$, т.е. e является s -идемпотентом, принадлежащим I . Поэтому $e \boxed{s} A$ – правый идеал n -кратной алгебры A , лежащий в I . Так как $e \boxed{s} e \neq 0$ и I минимален, то $I = e \boxed{s} A$.

ТЕОРЕМА 10. *Полупростая артинова n -кратная алгебра A является конечной прямой суммой своих минимальных правых идеалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу артиновости n -кратной алгебры A в ней существует минимальный правый идеал A_1 . По теореме 9 $A_1 = e_1 \boxed{s} A$, где $e_1 \boxed{s} e_1 = e_1$. Обозначим

$$A'_1 = \{x \in A \mid e_1 \boxed{s} x = 0\}.$$

Тогда A'_1 – правый идеал, причем $A_1 \cap A'_1 = 0$. С другой стороны, любой элемент $a \in A$ можно представить в виде $e_1 \boxed{s} a + a - e_1 \boxed{s} a$. Так как $a - e_1 \boxed{s} a \in A'_1$, то $A = A_1 \oplus A'_1$.

В множестве всех правых идеалов n -кратной алгебры A , содержащихся в A'_1 , существует минимальный идеал A_2 (в силу артиновости A). Применяя теорему 9, представим его в виде $A_2 = e_2 \boxed{r} A$, где $e_2 \boxed{r} e_2 = e_2$ для некоторой операции $\boxed{r}$. Рассуждая как выше, построим идеал A'_2 n -кратной алгебры A такой, что $A'_1 = A_2 \oplus A'_2$. Повторяя этот процесс, получим цепочку правых идеалов

$$A \supseteq A'_1 \supseteq A'_2 \supseteq \dots$$

В силу артиновости через конечное число шагов очередной правый идеал A'_m будет минимальным и процесс закончится. При этом для алгебры A получим разложение

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{m+1}.$$

ЛЕММА. *Минимальные правые идеалы I и I' изоморфны как A -модули тогда и только тогда, когда существует операция $\boxed{s}$ и элемент $a' \in I'$ такие, что $I' = a' \boxed{s} I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I' = a' \boxed{s} I$ для некоторого $a' \in I'$ и некоторой операции $\boxed{s}$. Рассмотрим отображение $\varphi: I \rightarrow I'$, определенное правилом $\varphi(x) = a' \boxed{s} x$, $x \in I$. Очевидно, φ – гомоморфизм A -модулей, а из равенства $I' = a' \boxed{s} I$ следует, что φ сюръективен. С другой стороны, $\text{Ker } \varphi$ – правый идеал n -кратной алгебры A , содержащийся в I . Из минимальности идеалов I и I' вытекает, что $\text{Ker } \varphi = 0$, т.е. φ – биекция.

Обратно, пусть $\varphi: I \rightarrow I'$ – изоморфизм этих минимальных правых идеалов. По теореме 9 существует операция $\boxed{s}$ и s -идемпотент $e \in I$ такие, что $I = e \boxed{s} A$. Так как $e \boxed{s} e \neq 0$ и идеал I минимален, то $I = e \boxed{s} I$. Обозначим через a' образ s -идемпотента e ; тогда $\varphi(I) = a' \boxed{s} I$. Следовательно, $I' = a' \boxed{s} I$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если A – артинова n -кратная алгебра без нильпотентных элементов, то минимальные правые идеалы I и I' изоморфны как A -модули тогда и только тогда, когда $I' = I'I$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. n -кратная алгебра A проста, если она не содержит других двусторонних идеалов, кроме 0 и A .

ТЕОРЕМА 11. *Полупростая артинова n -кратная алгебра A является конечной прямой суммой двусторонних идеалов, каждый из которых является простой алгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 10 $A = I_1 \oplus \dots \oplus I_m$, где каждый I_j – минимальный правый идеал в A . Обозначим через C множество всех неизоморфных (как A -модули) идеалов из списка $I_1, I_2, \dots, I_m$, а через D_I – сумму всех минимальных правых идеалов, изоморфных идеалу I . Тогда $A = \sum_{I \in C} D_I$. По определению каждое пространство D_I – правый идеал и даже подалгебра в A . Если I, I' – неизоморфные минимальные идеалы, то в силу следствия $I'I = 0$, а значит, $D_{I'} D_I = 0$, т.е. D_I является и левым идеалом в A .

Кроме того, $D_I \cap D_{I'} = 0$, когда $I \neq I'$, поскольку в противном случае пересечение $D_I \cap D_{I'}$ содержало бы минимальный правый идеал, который был бы изоморфен

двум неизоморфным между собой идеалам. Итак, $A = \bigoplus_{I \in C} D_I$ и каждое пространство D_I является двусторонним идеалом.

Покажем, что каждая n -кратная алгебра D_I проста. Пусть B – двусторонний идеал в D_I . В силу соотношения $D_I D_{I'} = D_{I'} D_I = 0$, когда $I \neq I'$, получаем, что B – двусторонний идеал всей алгебры A . Пусть J – минимальный правый идеал алгебры A , содержащийся в B . Тогда $J \cong I$, а поэтому $IJ = I \subseteq B$. Следовательно, любой минимальный правый идеал K из D_I содержится в B , так как $KI = K \subseteq B$. Значит, $B = D_I$.

Для описания некоторых простых конечномерных n -кратных алгебр будет использована конструкция сэндвичевой алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Подпространство A из M_m (M_m – пространство всех квадратных матриц размера m над полем k) называется n -кратной сэндвичевой алгеброй, если для фиксированного набора матриц $d_1, d_2, \dots, d_n$ из M_m произведения $ad_r b$ принадлежат A для любых элементов $a, b \in A$.

Пусть $C_n = \langle E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1} \rangle$ – линейная оболочка над k n матричных единиц. Определим n умножений в C_n по правилу

$$c \boxed{r} c' = c E_{1r} c', \quad c, c' \in C_n.$$

Так как $c \boxed{r} c' \in C_n$, $r = 1, \dots, n$, для любых $c, c' \in C_n$, то C_n является n -кратной сэндвичевой алгеброй. Легко проверить, что C_n является простой n -кратной алгеброй. Аналогично пространство $C'_n = \langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n} \rangle$ будет простой n -кратной сэндвичевой алгеброй, если определить n умножений в C'_n по правилу $c \boxed{r} c' = c E_{r1} c'$, $c, c' \in C'_n$, $r = 1, \dots, n$.

Более того, n -кратная сэндвичева алгебра C'_n является простым (неприводимым) правым C'_n -модулем, если каждое действие $\ast_r$, $r = 1, \dots, n$, алгебры C'_n на пространстве C'_n положить равным умножению $\boxed{r}$, $r = 1, \dots, n$, в алгебре C'_n . Аналогично, n -кратная сэндвичева алгебра C_n является простым (неприводимым) левым C_n -модулем.

Пусть $A = A(S)$ – n -кратная алгебра с набором умножений $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. (Здесь и далее операции $\boxed{s_i}$ для упрощения обозначений иногда будем записывать как s_i , если из контекста понятно, какой смысл вкладывается в соответствующие символы.) Для любых двух операций s_i и s_j можно определить операцию $\alpha_i s_i + \alpha_j s_j$, $\alpha_i, \alpha_j \in k$, по правилу

$$a \boxed{\alpha_i s_i + \alpha_j s_j} b = \alpha_i (a \boxed{s_i} b) + \alpha_j (a \boxed{s_j} b).$$

Тогда набор

$$S' = \{s'_1, \dots, s'_n\}, \quad s'_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} s_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

или коротко

$$S' = BS, \quad B = (b_{ij}) \in M_n, \quad b_{ij} \in k,$$

также удовлетворяет условиям (1). Если $\det(B) \neq 0$, то системы S и S' будем называть *эквивалентными*. Соответственно n -кратные алгебры $A(S)$ и $A(S')$ также назовем эквивалентными. Линейная оболочка $\langle S \rangle$ системы S образует векторное

пространство над k . Поэтому можно ввести понятие линейной зависимости для элементов из $\langle S \rangle$ и определить ранг системы $\tilde{S} \subset \langle S \rangle$ как количество операций в любой максимальной линейно независимой подсистеме системы $\tilde{S}$.

Кроме того, введем понятие изоморфизма n -кратных алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. n -Кратные алгебры

$$A(S), \quad S = \{s_1, \dots, s_n\}, \quad A'(S'), \quad S' = \{s'_1, \dots, s'_n\},$$

такие, что $\text{ранг } S = \text{ранг } S' = n$ *изоморфны*, если существует линейное биективное отображение φ соответствующих векторных пространств этих алгебр такое, что

$$\varphi(a \boxed{s_r} b) = \varphi(a) \boxed{s'_{\pi r}} \varphi(b), \quad r = 1, \dots, n,$$

где π – некоторая перестановка индексов $\{1, 2, \dots, n\}$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $A(S)$, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$, – m -кратная алгебра размерности n над алгебраически замкнутым полем k . Если ранг системы S равен m и $A(S)$ – простой левый $A(S)$ -модуль, то $n = m$ и алгебра $A(S)$ эквивалентна n -кратной алгебре $A(S')$, которая изоморфна сэндвичевой алгебре C_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через L ассоциативную алгебру линейных преобразований, порожденную операторами левого умножения $L_a(S)$, $a \in A(S)$, $s \in S$, где

$$L_a(s)b = a \boxed{s} b, \quad a, b \in A(S).$$

Так как $A(S)$ – простой левый $A(S)$ -модуль, то $L = \text{End}_k(A(S))$.

В дальнейшем символ A будет обозначать векторное пространство размерности n у m -кратной алгебры $A(S)$, а символ $A(s)$ – ассоциативную алгебру на пространстве A с одной операцией $s \in S$.

Отображение $\varphi_s: a \rightarrow L_a(s)$, $a \in A(s)$, является гомоморфизмом алгебры $A(s)$ на алгебру $L_A(s)$, порожденную всеми операторами левого умножения $L_a(s)$, $a \in A(s)$. В силу формулы

$$L_b(r)L_a(s) = L_{b \boxed{r} a}(s), \quad a, b \in A,$$

пространство $L_A(s) = \{L_a(s), a \in A\}$ является левым идеалом в алгебре L . Так как размерность минимального левого идеала в $\text{End}_k(A(S))$ равна n , то $\dim L_A(s) \geq n$, если $L_A(s) \neq 0$. Заметим, что алгебра $L_A(s)$ не может быть нулевой, так как в этом случае умножение s нулевое, что противоречит линейной независимости системы S . С другой стороны, алгебра $L_A(s)$ – образ алгебры $A(s)$ при гомоморфизме φ_s , и поэтому $\dim L_A(s) \leq n$.

Итак, $A(s) \cong L_A(s)$.

Отождествим алгебру L с полной матричной алгеброй $M_n(k)$. Так как $L_A(s)$ – левый идеал в $M_n(k)$ размерности n , то

$$L_A(s) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i l_i, x_i \in k, l_i = \sum_{j=1}^n a_j E_{ij}, i = 1, \dots, n \right\}$$

для некоторого фиксированного набора $a_1, \dots, a_n$ из k . С другой стороны, любой левый идеал в $M_n(k)$ имеет вид $M_n(k)e$, где e – некоторый идемпотент. Так как

идеал $L_A(s)$ минимален, ранг матрицы e равен единице. Выберем базис в пространстве A так, чтобы $e = E_{11}$ (при заданном $s = s_1$). Тогда $L_A(s_1) = \langle E_{i1}, i = 1, \dots, n \rangle$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в $A(s)$, соответствующий элементам $E_{11}, \dots, E_{n1}$ при изоморфизме φ_s . Тогда из формул умножения для матричных единиц $E_{i1}, i = 1, \dots, n$, получаем формулы умножения для элементов $e_i, i = 1, \dots, n$. А именно,

$$e_i \boxed{s_1} e_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n, \quad e_i \boxed{s_1} e_1 = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, операторы $L_{e_i}(s_1)$ совпадают с $E_{i1}, i = 1, \dots, n$.

Пусть s – еще одно умножение из S , отличное от s_1 . Ему отвечает ненулевой левый идеал $L_A(s)$. Как уже отмечалось, тогда

$$L_A(s) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i f_i, x_i \in k, f_i = \sum_{j=1}^n a_j E_{ij}, i = 1, \dots, n \right\}$$

для некоторого фиксированного набора $a_1, \dots, a_n \in k$. Причем матричная реализация операторов из $L_A(s)$ осуществляется относительно базиса $e_1, \dots, e_n$, определенного умножением s_1 . Пусть

$$L_{e_i}(s) = \sum_{r=1}^n x_r^{(i)} f_r = \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n x_r^{(i)} a_t E_{rt}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$L_{e_i}(s) e_j = \sum_{r=1}^n x_r^{(i)} a_j e_r = e_i \boxed{s} e_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим соотношение

$$(e_1 \boxed{s_1} e_1) \boxed{s} e_i = e_1 \boxed{s_1} (e_1 \boxed{s} e_i).$$

Его левая часть равна

$$e_1 \boxed{s} e_i = \sum_{r=1}^n x_r^{(1)} a_i e_r,$$

а правая –

$$e_1 \boxed{s_1} \sum_{r=1}^n x_r^{(1)} a_i e_r = x_1^{(1)} a_i e_1.$$

(Здесь используются формулы умножения для $\boxed{s_1}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.) Из полученного соотношения следует, что

$$x_r^{(1)} a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad r = 2, \dots, n.$$

Так как умножение s ненулевое, существует элемент $a_i \neq 0$. Таким образом, $x_r^{(1)} = 0, r = 2, \dots, n$, т.е.

$$e_1 \boxed{s} e_j = x_1^{(1)} a_j e_1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Далее рассмотрим соотношение

$$(e_i \boxed{s_1} e_1) \boxed{s} e_j = e_i \boxed{s_1} (e_1 \boxed{s} e_j).$$

Его левая часть равна

$$e_i \boxed{s} e_j = \sum_{r=1}^n x_r^{(i)} a_j e_r,$$

а правая –

$$x_1^{(1)} a_j (e_i \boxed{s_1} e_1) = x_1^{(1)} a_j e_i.$$

(Здесь кроме формул умножения для $\boxed{s_1}$ используются формулы, полученные для произведений $e_1 \boxed{s} e_j$.) В результате имеем

$$x_r^{(i)} a_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n.$$

Так как существует j , для которого $a_j \neq 0$, то все $x_r^{(i)} = 0$, $r = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, т.е.

$$e_i \boxed{s} e_j = x_i^{(i)} a_j e_i, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Соединяя полученные формулы с формулами для произведений $e_1 \boxed{s} e_j$, имеем

$$e_i \boxed{s} e_j = x_i^{(i)} a_j e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Заменяя каждое s_r , $r = 2, \dots, m$, на $s'_r = s_r + \lambda_r s_1$, $\lambda_r \in k$, получим при подходящих λ_r , $r = 2, \dots, m$, что $x_1^{(1)} a_1 \neq 0$ в формулах умножения для s'_r , $r = 2, \dots, m$.

Рассмотрим соотношение

$$(e_i \boxed{s} e_1) \boxed{s} e_1 = e_i \boxed{s} (e_1 \boxed{s} e_1)$$

для любого s , отличного от s_1 . Его левая часть равна

$$x_i^{(i)} a_1 e_i \boxed{s} e_1 = (x_i^{(i)} a_1)^2 e_i,$$

а правая –

$$x_1^{(1)} a_1 e_i \boxed{s} e_1 = x_1^{(1)} x_i^{(i)} a_1^2 e_i.$$

Параметр $x_i^{(i)}$ отличен от нуля, поскольку в противном случае $L_{e_i}(s) = 0$, а тогда алгебры $A(s)$ и $L_A(s)$ не изоморфны. Следовательно, $x_i^{(i)} = x_1^{(1)}$, $i = 2, \dots, n$, и, заменяя умножение s на $s/x_1^{(1)}$, получим следующие формулы:

$$e_i \boxed{s_r} e_j = a_j^{(r)} e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 2, \dots, m.$$

Таким образом, каждое умножение s_r , $r = 2, \dots, m$, определяется вектором

$$\alpha_r = (a_1^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}) \in k^n,$$

а умножение s_1 – вектором

$$\alpha_1 = (1, 0, \dots, 0) \in k^n.$$

Линейная комбинация умножений $\sum_{i=1}^m \lambda_i s_i$, $\lambda_i \in k$, определяется вектором

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i.$$

Так как умножения $s_1, \dots, s_m$ линейно независимы, то $m \leq n$.

Покажем, что систему умножений S можно заменить эквивалентной системой $\bar{S}$, в которой каждое умножение $\bar{s}_r$ будет определяться вектором

$$(0, \dots, \underset{r}{1}, \dots, 0, a_{m+1}^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}), \quad r = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему умножений $\bar{S}$, определенную правилами

$$\bar{s}_1 = s_1, \quad \bar{s}_r = s_r - a_1^{(r)} s_1, \quad r = 2, \dots, m.$$

Тогда $e_i \boxed{s_r} e_1 = 0$, $r = 2, \dots, m$, т.е.

$$a_1^{(r)} = 0, \quad r = 2, \dots, m,$$

и, кроме того,

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_k^{(1)} = 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Пусть уже доказано существование системы S , для которой

$$a_i^{(i)} = 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad a_j^{(t)} = 0, \quad t \neq j, \quad 1 \leq t, \quad j \leq k.$$

Если $a_{k+1}^{(r)} = 0$, $r = k+1, k+2, \dots, m$, то вектор

$$v = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k a_{k+1}^{(i)} e_i$$

аннулируется всеми операторами $L_{e_t}(s_r)$, $t = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, m$, т.е. kv — ненулевой левый идеал в $A(S)$, не совпадающий с $A(S)$. Следовательно, среди указанных параметров есть ненулевой и, меняя, если необходимо нумерацию, будем считать, что $a_{k+1}^{(k+1)} \neq 0$. Заменим s_{k+1} на $s_{k+1}/a_{k+1}^{(k+1)}$ и рассмотрим систему умножений $\bar{S}$:

$$\bar{s}_{k+1} = s_{k+1}, \quad \bar{s}_i = s_i - a_{k+1}^{(i)} s_{k+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k+1.$$

Для системы $\bar{S}$ будут иметь место соотношения

$$a_i^{(i)} = 1, \quad i = 1, \dots, k+1, \quad a_j^{(t)} = 0, \quad t \neq j, \quad 1 \leq t, j \leq k+1.$$

Через m шагов приходим к системе S , соответствующий набор векторов которой имеет вид

$$(0, \dots, \underset{r}{1}, \dots, 0, a_{m+1}^{(r)}, \dots, a_n^{(r)}), \quad r = 1, \dots, m.$$

Если $m < n$, то вектор

$$w = e_m - \sum_{i=1}^m a_{m+1}^{(i)} e_i$$

аннулируется всеми операторами $L_{e_t}(s_r)$, $t = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, m$. Следовательно, kw — ненулевой левый идеал в $A(S)$, не совпадающий с $A(S)$. Таким образом, $m = n$, и мы переходим от первоначальной системы S к эквивалентной ей системе $\bar{S}$, таблица умножения в которой следующая:

$$e_i \boxed{\bar{s}_r} e_j = 0, \quad j \neq r, \quad e_i \boxed{\bar{s}_r} e_r = e_i, \quad i, j, r = 1, \dots, n.$$

Отображение

$$\varphi_r: \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ir}, \quad \alpha_i \in k,$$

задает изоморфизм алгебры $A(\bar{s}_r)$ и алгебры $D_r = \langle E_{ir}, i = 1, \dots, n \rangle$ (элементы в алгебре D_r перемножаются стандартным образом), а отображение

$$\psi_r: \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{ir} \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{i1}$$

задает изоморфизм алгебры D_r и алгебры $C_n(r)$, где $C_n(r)$ – алгебра с одним умножением $\boxed{r}$, определяемая из сэндвичевой алгебры C_n , т.е. для любых двух элементов $a, b \in C_n(r)$ выполнено $a \boxed{r} b = a E_{1r} b$. Отображение $\mu: A(\bar{S}) \rightarrow C_n$, которое является композицией изоморфизмов $\psi_r \varphi_r: A(s_r) \rightarrow C_n(r)$ при сужении μ на алгебру $A(\bar{s}_r)$, задает изоморфизм n -кратной алгебры $A(\bar{S})$ и сэндвичевой алгебры C_n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. А. Корешков, “ n -кратные алгебры ассоциативного типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 34–42.
- [2] Н. А. Корешков, “О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, № 9, 34–42.
- [3] Н. А. Корешков, “Об одном классе алгебр ассоциативного типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 3, 38–46.
- [4] В. В. Доценко, А. С. Хорошкин, “Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды”, *Функц. анализ и его прил.*, **41**:1 (2007), 1–22.
- [5] Н. А. Корешков, “О нильпотентности n -кратных алгебр Ли и ассоциативных n -кратных алгебр”, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 2, 33–38.
- [6] И. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972.

Н. А. Корешков

Казанский (Приволжский) федеральный
университет

E-mail: Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru

Поступило

10.07.2013