Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Мирсабуров, Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстедта, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 721–729

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:19:40

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

М. Мирсабуров

В работе для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{Sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где $m = \operatorname{const} > 0$, в смешанной области рассматривается задача, которая отличается от задачи Трикоми тем, что на некоторых дугах эллиптической части границы задаются нелокальные условия, поточечно связывающие граничные значения $u(x, y)$ со значениями на внутренней кривой и на линии вырождения, а в характеристических частях границы задается условие со смещением. При определенных ограничениях на заданные функции в граничных условиях доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Библиография: 11 названий.

В работе [1] для равномерно эллиптического уравнения второго порядка впервые была сформулирована и исследована краевая задача, в которой нелокальное условие связывает значения искомого решения на части границы и на внутренней кривой. Задачи такого рода, называемые задачами типа задачи Бицадзе–Самарского, исследованы для различных видов уравнений в различных формулировках достаточно подробно (см., например, [2]–[7]).

В настоящей работе для уравнения Геллерстедта [8]

$$\operatorname{Sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m = \operatorname{const} > 0$, в смешанной области рассматривается краевая задача, которая отличается от задачи Трикоми [6] тем, что на некоторых дугах эллиптической части границы вместо условия Дирихле задаются нелокальные условия, поточечно связывающие граничные значения $u(x, y)$ со значениями $u(x, y)$ на внутренней кривой и на линии вырождения, а в характеристических частях границы задается условие со смещением [6].

Пусть D – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y , ограниченная кривой $\Gamma: y = f(x)$ с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC и BC уравнения (1).

Эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D обозначим через D^+ и D^- соответственно.

Относительно кривой $\Gamma: y = f(x)$ предположим, что $f(x) \in C^2(J)$, $f''(x) < 0 \forall x \in J$ и пусть в точке $(d, 0)$, $d \in J$, $f'(d) = 0$, где $J = (-1, 1)$ – интервал оси $y = 0$. В дальнейшем часть кривой Γ , где $x \in (a, b) \subset J$, обозначим через $\Gamma(a, b)$.

Пусть прямая l_0 , проходящая через точки $(c, f(c)) \in \Gamma$ и $(d_0, f(d_0)) \in \Gamma$, где $-1 < c < d_0 < d$, пересекает ось абсцисс в точке $(a_0, 0)$.

Предположим, что гладкая кривая $\gamma: y = g(x)$ с концами в точках $(d_0, f(d_0))$ и $(d_1, 0)$, $d_1 \in J$, лежит внутри области D^+ и в достаточно малой окрестности точки $(d_1, 0)$ часть кривой γ совпадает с отрезком прямой $x = d_1$. Кроме того, пусть кривая γ обладает следующими свойствами:

- 1) она целиком содержится в угле между прямой l_0 и осью $y = 0$;
- 2) любая прямая из связки прямых с центром в точке $(a_0, 0)$ пересекается с кривой γ не более чем в одной точке.

Примем обозначения:

$$E(x_0) = \omega(x_0) + ig(\omega(x_0)), \quad x_0 \in [-1, c], \quad (2)$$

$$S(x_0) = \zeta(x_0) + if(\zeta(x_0)), \quad x_0 \in \overline{J}, \quad (3)$$

где $E(x_0)$ – аффикс точки пересечения прямой $y = f(x_0)(x - x_0)/(x_0 - a_0)$ с кривой $\gamma: y = g(x)$, т.е. $E(x_0)$ есть гомеоморфизм из множества точек на $\Gamma[-1, c]$ в множество точек на γ , причем $\omega(-1) = d_1$, $\omega(c) = d_0$, $\omega(x) \in C^1[-1, c]$, а $S(x_0)$ – аффикс точки пересечения кривой $y = f(x - x_0 - 1)$, $x_0 \leq x \leq 1$, с дугой $\Gamma[d, 1]$, т.е. $S(x_0)$ есть гомеоморфизм из множества точек на $\overline{J}$ в множество точек на $\Gamma[d, 1]$, причем $\zeta(-1) = d$, $\zeta(1) = 1$, $\zeta(x) \in C^1(\overline{J})$.

На $\overline{J}$ введем в рассмотрение возрастающую, непрерывно дифференцируемую функцию $p(x)$ со следующими свойствами:

$$-1 + \varepsilon \leq p(x) \leq 1, \quad p(1) = 1, \quad p(x) > x, \quad p'(1) \neq 0, \quad (4)$$

где постоянная $\varepsilon \in (0, 2)$. В качестве примера такой функции можно взять линейную функцию $p(x) = ax + b$, где постоянные $a \in (0, 1)$, $b = 1 - a$.

Задача T_μ . Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$;
- 2) $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области D^+ ;
- 3) $u(x, y) \in R_1$ – обобщенное решение уравнения (1) в области D^- (определение класса R_1 см. в [9]);
- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(x, y) = \mu_0(x)u[E(x)] + \rho_0(x), \quad (x, y) \in \Gamma[-1, c], \quad (5)$$

$$u[S(p(x))] = \mu_1(x)u(x, 0) + \rho_1(x), \quad x \in \overline{J}, \quad (6)$$

$$u(x, y) = \tilde{\varphi}(x), \quad (x, y) \in \Gamma[c, \zeta_0], \quad (7)$$

$$a_0(x)D_{-1x}^{1-\beta}u[\theta_0(x)] + b_0(x)D_{x1}^{1-\beta}u[\theta_1(x)] = c_0(x), \quad x \in J, \quad (8)$$

где $D_{-1x}^{1-\beta}, D_{x1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования порядка $1-\beta, \beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0), x \in J$, с характеристиками AC и BC соответственно [6]; $\zeta_0 = \zeta(p(-1))$;

5) на линии вырождения $y = 0$ выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J. \quad (9)$$

Заданные функции $\mu_k(x), \rho_k(x), k = 0, 1, \tilde{\varphi}(x), a_0(x), b_0(x)$ и $c_0(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем

$$w(x) = (1-x)^\beta a_0(x) + (1+x)^\beta b_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (10)$$

а функции $\mu_k(x)$ и $\rho_k(x), k = 0, 1$, представимы в виде

$$\mu_k(x) = (1 + (-1)^k x)^{2-k} \tilde{\mu}_k(x), \quad \rho_k(x) = (1 + (-1)^k x) \tilde{\rho}_k(x), \quad (11)$$

где $\tilde{\mu}_0(x), \tilde{\rho}_0(x) \in C^1[-1, c]; \tilde{\mu}_1(x), \tilde{\rho}_1(x) \in C^1(\bar{J})$.

Из краевых условий (5), (7) в силу $u(x, y) \in C(\bar{D})$ следует, что должно выполняться следующее естественное условие согласованности:

$$\tilde{\varphi}(c) = \mu_0(c) \tilde{\varphi}(d_0) + \rho_0(c).$$

Единственность решения задачи T_μ . В характеристическом треугольнике D^- решение задачи Коши, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \bar{J}; \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in J, \quad (12)$$

дается формулой Дарбу [6]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \gamma_1 \int_{-1}^1 \tau \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) (1-t^2)^{\beta-1} dt \\ & - \gamma_2 y \int_{-1}^1 \nu \left(x + \frac{2t}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right) (1-t^2)^{-\beta} dt, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)2^{1-2\beta}/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = -\Gamma(2-2\beta)2^{2\beta-2}/\Gamma^2(1-\beta)$, $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция Эйлера.

Из краевого условия (8) в силу формулы (13) имеем

$$\nu(x) = a(x) D_{-1x}^{1-\beta} \tau(x) + b(x) D_{x1}^{1-\beta} \tau(x) + c(x), \quad x \in J, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a(x) = & -\frac{\gamma_1 \Gamma(\beta) (1-x)^\beta a_0(x)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta) (m+2)^{1-2\beta} w(x)}, \quad b(x) = -\frac{\gamma_1 \Gamma(\beta) (1+x)^\beta b_0(x)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta) (m+2)^{1-2\beta} w(x)}, \\ c(x) = & \frac{2^{1-2\beta} (1-x^2)^\beta c_0(x)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta) (m+2)^{1-2\beta} w(x)}, \end{aligned}$$

и в силу (10) $a(x), b(x), c(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$.

ЛЕММА. Если $\rho_0(x) \equiv 0$, $\rho_1(x) \equiv 0$, $c_0(x) \equiv 0$ и

$$0 \leq \mu_0(x) \leq 1, \quad x \in [-1, c]; \quad 0 \leq \mu_1(x) < 1, \quad x \in \bar{J}, \quad (15)$$

$$a_0(x), b_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (16)$$

то решение $u(x, y)$ задачи T_μ своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области D^+ достигает на $\Gamma[c, \zeta_0] \cup B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи T_μ , удовлетворяющее условиям леммы. Допустим, что функция $u(x, y)$ своего положительного максимума в замкнутой области $\bar{D}^+$ достигает в точке $P(x_0, y_0)$. Очевидно, что $P(x_0, y_0) \notin D^+ [10]$. Докажем, что точка $P(x_0, y_0)$ также не принадлежит отрезку вырождения $AB = \{(x, 0) : x \in J\}$ и дугам $\Gamma[-1, c]$, $\Gamma(\zeta_0, 1)$.

Сначала покажем, что $P(x_0, y_0) \notin AB$. Предположим обратное. Пусть $P(x_0, y_0) = P(x_0, 0) \in AB$. Тогда, пользуясь тем, что производные $D_{-1x}^{1-2\beta} \tau(x)$ и $D_{-1x}^{1-2\beta} \tau(x)$ дробного порядка в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ строго положительны, при выполнении условия (16) из равенства (14) (где $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$, $c(x) \equiv 0$) получим, что $\nu(x_0) \geq 0$. Последнее противоречит известному принципу Заремба–Жиро [10]. Следовательно, $P(x_0, y_0) \notin AB$.

Теперь покажем, что $P(x_0, y_0) \notin \Gamma[-1, c] \cup \Gamma(\zeta_0, 1)$. Так как $P(x_0, y_0) \notin D^+ \cup AB$, то с учетом (15) из краевого условия (5) (где $\rho_0(x) \equiv 0$) следует, что $P(x_0, y_0) \notin \Gamma[-1, c]$, а из краевого условия (6) (где $\rho_1(x) \equiv 0$) также следует, что $P(x_0, y_0) \notin \Gamma(\zeta_0, 1)$.

Таким образом, точка положительного максимума $P(x_0, y_0) \in \Gamma[c, \zeta_0] \cup B$.

Аналогично доказывается случай отрицательного минимума. Лемма доказана.

Из краевого условия (7) при $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$ и из условия (6) при $x = 1$ имеем

$$u|_{\Gamma[c, \zeta_0] \cup B} \equiv 0.$$

Отсюда в силу доказанной леммы следует единственность решения задачи T_μ .

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ T_μ . Доказательство существования решения задачи T_μ для простоты проведем в случае, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой

$$\sigma_0 : y = f(x) = \left(\frac{(m+2)^2(1-x^2)}{4} \right)^{1/(m+2)}.$$

Тогда в (3) $\zeta(x_0) = (1+x_0)/2$, а $d = 0$.

Решение уравнения (1) в области D^+ , удовлетворяющее условиям

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in J; \quad u|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (17)$$

или

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \bar{J}; \quad u|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (18)$$

соответственно дается формулами

$$u(x, y) = \int_{-1}^1 \nu(t) B_1(x, y; t) dt + \Phi_1(x, y) \quad (19)$$

или

$$u(x, y) = \int_{-1}^1 \tau(t) B_2(x, y; t) dt + \Phi_2(x, y), \quad (20)$$

где

$$B_1(x, y; t) = -k_1 \left(\left((x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{-\beta} - \left((1-xt)^2 + \frac{4t^2}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{-\beta} \right), \quad (21)$$

$$B_2(x, y; t) = k_2 y \left(\left((x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} - \left((1-xt)^2 + \frac{4t^2}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} \right), \quad (22)$$

$$\Phi_k(x, y) = \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) A_k(x, y; \zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2, \quad (23)$$

$$A_1(x, y; \zeta) = k_1 \left(\frac{m}{2} \right) (1-2\beta)^{1-2\beta} (1-R^2) (1-\zeta^2)^{2\beta-1} \times (r_1^2)^{-\beta-1} F(\beta, 1+\beta, 2\beta; 1-\sigma), \quad (24)$$

$$A_2(x, y; \zeta) = k_2 (1-\beta)(m+2)y(1-R^2)(r_1^2)^{\beta-2} F(1-\beta, 2-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma), \quad (25)$$

$$\left\{ \frac{r^2}{r_1^2} \right\} = (x-\zeta)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} (y^{(m+2)/2} \mp \eta^{(m+2)/2})^2, \quad \sigma = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Преобразуем интегралы $\Phi_k(x, y)$, $k = 1, 2$,

$$\Phi_k(x, y) = \left(\int_{-1}^c + \int_c^{\zeta_0} + \int_{\zeta_0}^1 \right) \varphi(z) A_k(x, y; z) dz. \quad (26)$$

Теперь в первом и третьем интегралах правой части (26), соответственно сделав замену переменного интегрирования $z = at - b$, где $a = (1+c)/2$, $b = 1-a$ и $z = \zeta(p(t)) = (1+p(t))/2$, с учетом краевого условия (7) имеем

$$\Phi_k(x, y) = a \int_{-1}^1 \varphi_0(at-b) A_k(x, y; at-b) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_1\left(\frac{1+p(t)}{2}\right) A_k\left(x, y; \frac{1+p(t)}{2}\right) dp(t) + \int_c^{\zeta_0} \tilde{\varphi}(t) A_k(x, y; t) dt, \quad (27)$$

где

$$\varphi_0(x) = u(x, y)|_{\Gamma[-1, c]}, \quad \varphi_1(x) = u(x, y)|_{\Gamma[\zeta_0, 1]}.$$

В силу краевого условия (6) $\varphi_1(\zeta(p(t))) = \varphi_1((1+p(t))/2) = \mu_1(t)\tau(t) + \rho_1(t)$. С учетом последнего функцию $\Phi_k(x, y)$ окончательно преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\Phi_k(x, y) = & a \int_{-1}^1 \varphi_0(at - b) A_k(x, y; at - b) dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau(t) \mu_1(t) A_k\left(x, y; \frac{1+p(t)}{2}\right) dp(t) + \tilde{\Phi}_k(x, y),\end{aligned}\quad (28)$$

где

$$\tilde{\Phi}_k(x, y) = \int_c^{\zeta_0} \tilde{\varphi}(t) A_k(x, y; t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho_1(t) A_k\left(x, y; \frac{1+p(t)}{2}\right) dp(t). \quad (29)$$

Из формулы (20) с учетом (2) и (28) находим

$$\begin{aligned}u[E(x)] = & \int_{-1}^1 \tau(t) \left(B_2(\omega(x), g(\omega(x)); t) + 0.5\mu_1(t) A_2\left(\omega(x), g(\omega(x)); \frac{1+p(t)}{2}\right) p'(t) \right) dt \\ & + a \int_{-1}^1 \varphi_0(at - b) A_k(\omega(x), g(\omega(x)); at - b) dt + \tilde{\Phi}_k(\omega(x), g(\omega(x))), \quad x \in [-1, c].\end{aligned}\quad (30)$$

Теперь, подставляя (30) в краевое условие (5) и в полученном соотношении переменную $x \in [-1, c]$ заменяя на $ax - b$, где $x \in \overline{J}$, с учетом (10) имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0(ax - b) = & (1+x) \int_{-1}^1 B(x, t) \tau(t) dt \\ & + (1+x) \int_{-1}^1 A(x, t) \varphi_0(at - b) dt + (1+x) F(x), \quad x \in \overline{J},\end{aligned}\quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}B(x, t) = & a^2(1+x) \tilde{\mu}_0(ax - b) \left(B_2(\omega(ax - b), g(\omega(ax - b)); t) \right. \\ & \left. + 0.5\mu_1(t) A_2\left(\omega(ax - b), g(\omega(ax - b)); \frac{1+p(t)}{2}\right) p'(t) \right),\end{aligned}\quad (32)$$

$$A(x, t) = a^3(1+x) \tilde{\mu}_0(ax - b) A_2(\omega(ax - b), g(\omega(ax - b)), at - b), \quad (33)$$

$$F(x) = a^2(1+x) \tilde{\mu}_0(ax - b) \tilde{\Phi}_2(\omega(ax - b), g(\omega(ax - b))) + a \tilde{\rho}_0(ax - b). \quad (34)$$

Вводя в (31) обозначения $\varphi_0(ax - b) = (1+x)\psi(x)$, перепишем его в виде

$$\psi(x) = \int_{-1}^1 B(x, t) \tau(t) dt + \int_{-1}^1 (1+t) A(x, t) \psi(t) dt + F(x), \quad x \in \overline{J}. \quad (35)$$

Из (32), (33) и (34) в силу (10), (22), (25) и (29) нетрудно убедиться, что $B(x, t), (1+t) \times A(x, t) \in C(\overline{J} \times \overline{J})$, а $F(x) \in C(\overline{J})$. Соотношение (35) является первым функциональным соотношением между неизвестными $\psi(x)$ и $\tau(x)$.

Из формулы (19) с учетом (28) при $y = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \int_{-1}^1 \nu(t) B_1(x, 0; t) dt + a \int_{-1}^1 \psi(t) (1+t) A_1(x, 0; at-b) dt \\ & + 0.5 \int_{-1}^1 \tau(t) \mu_1(t) A_1\left(x, 0; \frac{1+p(t)}{2}\right) dp(t) + \tilde{\Phi}_1(x, 0), \quad x \in \bar{J}. \end{aligned} \quad (36)$$

В силу условия сопряжения (9) из соотношений (14) и (36), исключив $\nu(x)$, с учетом (21) имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -k_1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|x-t|^{2\beta}} - \frac{1}{(1-xt)^{2\beta}} \right) (a(t) D_{-1t}^{1-2\beta} \tau(t) + b(t) D_{t1}^{1-2\beta} \tau(t) + c(t)) dt \\ & + a \int_{-1}^1 (1+t) A_1(x, 0; at-b) \psi(t) dt \\ & + 0.5 \int_{-1}^1 \mu_1(t) A_1\left(x, 0; \frac{1+p(t)}{2}\right) \tau(t) dp(t) + \tilde{\Phi}_1(x, 0), \quad x \in \bar{J}. \end{aligned} \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|x-t|^{2\beta}} - \frac{1}{(1-xt)^{2\beta}} \right) \left\{ \begin{matrix} a(t) D_{-1t}^{1-2\beta} \tau(t) \\ b(t) D_{t1}^{1-2\beta} \tau(t) \end{matrix} \right\} dt \\ & = \Gamma(1-2\beta) \left\{ \begin{matrix} a(x) \\ b(x) \end{matrix} \right\} \left((1 - \cos 2\beta\pi) \tau(x) \right. \\ & \quad \left. \pm \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1 \mp x}{1 \mp t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \tau(t) dt \right) + \int_{-1}^1 \left\{ \begin{matrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{matrix} \right\} \tau(t) dt, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} A(x, t) \\ B(x, t) \end{matrix} \right\} = & \pm \frac{2\beta}{\Gamma(2\beta)} \int_{\left\{ \begin{matrix} t \\ -1 \end{matrix} \right\}}^{\left\{ \begin{matrix} 1 \\ t \end{matrix} \right\}} \left(\frac{\left\{ \begin{matrix} a(s)-a(x) \\ b(s)-b(x) \end{matrix} \right\} + \frac{x-s}{2\beta} \left\{ \begin{matrix} a'(s) \\ b'(s) \end{matrix} \right\}}{|x-s|^{2+2\beta} |t-s|^{1-2\beta}} (s-x) \right. \\ & \left. + \frac{\left\{ \begin{matrix} a(s)-a(x) \\ b(s)-b(x) \end{matrix} \right\} + \frac{1-xs}{2\beta} \left\{ \begin{matrix} a'(s) \\ b'(s) \end{matrix} \right\}}{(1-xt)^{1+2\beta} |t-s|^{1-2\beta}} \right) ds, \end{aligned} \quad (39)$$

$A(x, t), B(x, t) \in C(\bar{J} \times \bar{J})$ за исключением диагонали $x = t$, где они имеют логарифмическую особенность, причем $A(-1, -1) = A(1, 1) = B(-1, -1) = B(1, 1) = 0$. В силу (38) соотношение (37) имеет вид

$$\begin{aligned} & \tau(x) (1 + k_1 \Gamma(1-2\beta) (1 - \cos 2\beta\pi) (a(x) + b(x))) \\ & + \frac{k_1 a(x)}{\Gamma(2\beta)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \tau(t) dt \\ & - \frac{k_1 b(x)}{\Gamma(2\beta)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-xt} \right) \tau(t) dt \\ & = \int_{-1}^1 K_0(x, t) \tau(t) dt + a \int_{-1}^1 (1+t) A_1(x, 0; at-b) \psi(t) dt + F_1(x), \quad x \in \bar{J}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$K_0(x, t) = -k_1(A(x, t) + B(x, t)) + 0.5\mu_1(t)A_1\left(x, 0; \frac{1+p(t)}{2}\right)p'(t), \quad (41)$$

$$F_1(x) = \tilde{\Phi}_1(x, 0) - k_1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{|x-t|^{2\beta}} - \frac{1}{(1-xt)^{2\beta}} \right) c(t) dt.$$

В силу (4), (11), (24) и (39) из (41) следует, что $K_0(x, t) \in C(\bar{J} \times \bar{J})$ за исключением диагонали $x = t$, где она имеет логарифмическую особенность; $F_1(x) \in C(\bar{J})$.

Соотношение (40) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\psi(x)$, причем оно является сингулярным интегральным уравнением относительно неизвестной функции $\tau(x)$.

Легко проверить, что

$$\frac{1}{t-x} \mp \frac{1}{1-xt} = \frac{2(1 \pm x)(1 \mp t)}{2t(1+x^2) - 2x(1+t^2)}. \quad (42)$$

Сделаем в (40) замену переменных $t = s/(1 + \sqrt{1-s^2})$, $x = z/(1 + \sqrt{1-z^2})$, с учетом (42) преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} A(z)\rho(z) + \frac{B(z)}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\rho(s) ds}{s-z} &= \int_{-1}^1 \frac{K(z, z) - K(z, s)}{s-z} \rho(s) ds \\ &+ \int_{-1}^1 K_0\left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}, \frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}}\right) \frac{\rho(s) ds}{\sqrt{1-s^2}(1+\sqrt{1-s^2})} \\ &+ a \int_{-1}^1 (1+t)A_1\left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}, 0; at-b\right) \psi(t) dt \\ &+ F_1\left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}\right), \quad z \in \bar{J}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} K(z, s) &= \frac{k_1}{\Gamma(2\beta)} \left(\frac{\sqrt{1+z} + \sqrt{1-z}}{\sqrt{1+s} + \sqrt{1-s}} \right)^{2\beta} \left(\frac{1-z^2}{1-s^2} \right)^{1/2} \\ &\times \left(a \left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} \right) \left(\frac{1-s}{1-z} \right)^\beta - b \left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} \right) \left(\frac{1+s}{1-z} \right)^\beta \right), \\ A(z) &= 1 + k_1 \Gamma(1-2\beta) (1 - \cos 2\beta\pi) \left(a \left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} \right) + b \left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Так как $A^2(z) - B^2(z) \neq 0 \quad \forall z \in \bar{J}$, уравнение (43) является сингулярным интегральным уравнением нормального типа [11]. Его индекс равен нулю в классе h_2 функций $\rho(z) \in C(\bar{J}) \cap H(J)$.

Таким образом, уравнение (43) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое в старых переменных и функциях имеет вид

$$\tau(x) = \int_{-1}^1 L_1(x, t) \tau(t) dt + \int_{-1}^1 L_2(x, t) \psi(t) dt + F_2(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (44)$$

где $L_1(x, t)$ и $L_2(x, t)$ выражаются через известные функции [11].

Уравнение (44) совместно с уравнением (35) составляет систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности решения задачи T_μ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [2] Бицадзе А. В. Об одном классе точных решений лоренц-ковариантных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 274–276.
- [3] Гордезиани Д. Г. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
- [4] Салахитдинов М. С., Толипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной или двумя линиями вырождения // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 134–142.
- [5] Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 534–539.
- [6] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
- [7] Мирсабуров М. Задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 829–834.
- [8] Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Ark. Mat. Astron. Fys. A. 1937. V. 26. № 3. P. 1–32.
- [9] Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
- [10] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
- [11] Мусхелишвили И. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, г. Ташкент

Поступило
16.04.1997