Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 , *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 497–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:49:50

Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2

С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная

Получены точные неравенства типа Джексона–Стечкина для модулей непрерывности k -го порядка Ω_k , где вместо оператора сдвига $T_h f$ использован оператор Стеклова $S_h(f)$. Аналогичные характеристики гладкости функций рассматривались ранее в работах В. А. Абилова, Ф. В. Абиловой, В. М. Кокилашвили и других. Для классов функций, определенных при помощи указанных характеристик, вычислены точные значения некоторых n -поперечников.

Библиография: 23 названия.

1. При решении ряда задач теории аппроксимации функций действительного переменного часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (см., например, [1]–[10]). Во многих случаях это продиктовано специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Так, например, при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами Потаповым и его учениками были предложены различные модификации классического определения модуля непрерывности, использующие вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x + h)$ различные усредняющие операторы (см., например, [11]–[13]).

В случае аппроксимации 2π -периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f$ Абиловым и Абиловой была использована функция Стеклова $S_h(f)$ [5]. Следует отметить, что в теории аппроксимации функция $S_h(f)$ была применена самим Стекловым. Аналогичный подход был применен Кокилашвили и Уилдиром в работе [7]. Дальнейшее развитие результаты [5] получили в работе авторов [10]. Данная статья продолжает указанную тематику и является своеобразным обобщением и развитием идей, изложенных в статьях [5] и [10].

Пусть $L_2 \equiv L_2([0, 2\pi])$ – пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Для произвольного элемента $f \in L_2$ запишем функцию Стеклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \quad h > 0,$$

полагая при этом $S_{h,i}(f) \stackrel{\text{df}}{=} S_h(S_{h,i-1}(f))$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве L_2 , определим согласно [5] конечные разности первого и высших порядков

$$\tilde{\Delta}_h^1(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} S_h(f, x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f, x),$$

$$\tilde{\Delta}_h^k(f, x) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{\Delta}_h^1(\tilde{\Delta}_h^{k-1}(f), x) = (S_h - \mathbb{I})^k(f, x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} S_{h,i}(f, x),$$

где $k = 2, 3, \dots$. Используя указанные обозначения, рассмотрим введенную в [5] характеристику гладкости функции $f \in L_2$

$$\Omega_k(f, t) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^k(f)\| : 0 < h \leq t\}, \quad (1)$$

которую назовем *специальным модулем* непрерывности k -го порядка.

Через $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx),$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} = \|f - \tilde{S}_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $\tilde{S}_{n-1}(f)$ есть частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f ; $\rho_j^2(f) \stackrel{\text{df}}{=} a_j^2(f) + b_j^2(f)$. Символом L_2^r , $r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0 \equiv L_2$, обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 . Всюду далее полагаем $\text{sinc } t := \sin t/t$.

Нетрудно показать (см., например, [5; с. 804]), что для функции $f \in L_2$

$$\|\tilde{\Delta}_h^k(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \text{sinc } jh)^{2k} \rho_j^2(f), \quad (2)$$

и в силу этого

$$\Omega_k(f, t) = \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} (1 - \text{sinc } jh)^{2k} \rho_j^2(f) \right)^{1/2} : 0 < h \leq t \right\}. \quad (3)$$

Напомним, что для решения ряда задач конструктивной теории функций в пространстве 2π -периодических функций L_p , $0 < p < 1$, Руновский [14] использовал

вместо модуля непрерывности k -го порядка следующую усредненную характеристику гладкости

$$\widetilde{\Omega}_m(f, t)_p \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|_{L_p}^p dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/p}, \quad (4)$$

где $0 < t < \infty$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_m)$,

$$\Delta_h^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1, \quad \Delta_{h_j}^1(f, t) \stackrel{\text{df}}{=} f(t + h_j) - f(t), \quad j = 1, \dots, m.$$

Отметим, что ранее характеристика гладкости $\widetilde{\Omega}_1(f, t)_p$ была использована Стороженко, Кротовым и Освальдом [15] для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами по системе Хаара.

В случае $p = 2$ характеристика гладкости (4) применялась авторами при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации на классах 2π -периодических функций [9], [16]. Так, например, для произвольной функции $f \in L_2$ на основании (4) имеем [9]

$$\widetilde{\Omega}_m^2(f, t)_2 = 2^m \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \text{sinc } jt)^m \rho_j^2(f). \quad (5)$$

Сравнивая соотношения (2), (3) и (5) при $m = 2k$, получаем

$$\widetilde{\Omega}_{2k}(f, t)_2 = 2^k \|\widetilde{\Delta}_t^k(f)\| \leq 2^k \Omega_k(f, t). \quad (6)$$

2. Как отмечалось в [10], под *неравенствами типа Джексона–Стечкина* в рассматриваемом нормированном пространстве понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается через некоторую характеристику ее гладкости (см., например, [17]–[19]). Соотношение (6) дает возможность получить неравенство указанного типа для характеристики гладкости (1). Всюду далее отношение $0/0$ полагаем равным нулю.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любого числа $0 < t \leq 3\pi/4$ справедливо равенство

$$\sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_k(f^{(r)}, t/n)} : f \in L_2^r, f \not\equiv \text{const} \right\} = (1 - \text{sinc } t)^{-k}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов работы [9] следует, что при $0 < t \leq 3\pi/4$ имеет место соотношение

$$\sup \left\{ \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)}, t/n)_2} : f \in L_2^r, f \not\equiv \text{const} \right\} = \{2(1 - \text{sinc } t)\}^{-m/2}, \quad (8)$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Полагая в (8) $m = 2k$ и используя (6), для произвольной функции $f \in L_2^r$ ($f \not\equiv \text{const}$) запишем

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_k(f^{(r)}, t/n)} \leq (1 - \text{sinc } t)^{-k}. \quad (9)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos nx$, принадлежащую классу L_2^r . Очевидно, что $E_{n-1}(f_0) = 1$. Поскольку при $0 < n\tau \leq 3\pi/4$

$$\min\{\operatorname{sinc} x : 0 < |x| \leq n\tau\} = \operatorname{sinc} n\tau,$$

то, используя (3), для функции f_0 получаем

$$\begin{aligned} \Omega_k(f_0^{(r)}, \tau) &= n^r \sup\{(1 - \operatorname{sinc} nh)^k : 0 < h \leq \tau\} \\ &= n^r \left(1 - \min_{0 < x \leq n\tau} \operatorname{sinc} x\right)^k = n^r (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^k. \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая в (10) $t = n\tau$, запишем

$$\Omega_k\left(f_0^{(r)}, \frac{t}{n}\right) = n^r (1 - \operatorname{sinc} t)^k.$$

Тогда

$$\frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\Omega_k(f_0^{(r)}, t/n)} = (1 - \operatorname{sinc} t)^{-k}. \quad (11)$$

Сопоставляя соотношения (9) и (11), получаем требуемое равенство (7). Теорема 1 доказана.

3. В работе [5] было получено неравенство типа Джексона–Стечкина, в котором величина $E_{n-1}(f)$ оценивалась сверху через функционал, содержащий величину (1), а именно

$$E_{n-1}(f) \leq \left(\frac{2}{\pi^2 - 4}\right)^k n^{2k-r} \left\{ \int_0^{\pi/n} t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \right\}^k, \quad (12)$$

где $f \in L_2^r$, $r \in \mathbb{Z}_+$. При этом константа в правой части неравенства (12) уменьшена быть не может. Позднее в [10] было показано, что для любых $n, k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{r-k} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt\right)^k} = \frac{1}{(\pi - \operatorname{Si}(\pi))^k}, \quad (13)$$

где $\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \operatorname{sinc} x dx$ – интегральный синус.

В работе [20] Черных отмечал, что поскольку функционал

$$\left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f, t) \sin nt dt \right\}^{1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_1(f, \pi/n)$ ($f \neq \text{const}$) то, по-видимому, он более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций в L_2 . Аналогичную ситуацию можно наблюдать и в рассматриваемом случае. Если, например, при некотором $0 < h \leq \pi/n$ имеем $\int_0^h \psi(t) dt \leq 1$, то, очевидно, что функционал $\left\{ \int_0^h \Omega_k^p(f, t) \psi(t) dt \right\}^{1/p}$ ($f \neq \text{const}$) не будет превосходить значения $\Omega_k(f, h)$.

Для обобщения результатов (12), (13) рассмотрим следующую экстремальную характеристику:

$$\chi_{n,k,r,p,s}(\psi, h) \stackrel{\text{df}}{=} \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt \right)^s} : f \in L_2^r, f \not\equiv \text{const} \right\}, \quad (14)$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – положительные числа; $0 < h \leq \pi$; $\psi(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция.

Следующая теорема является распространением одного результата Лигуна [18] на случай специального модуля непрерывности Ω_k .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, ψ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{n,k,r,p}(\psi, h)} \leq \chi_{n,k,r,p,1/p}(\psi, h) \leq \frac{1}{\inf_{n \leq m < \infty} \gamma_{m,k,r,p}(\psi, h)}, \quad (15)$$

где

$$\gamma_{m,k,r,p}(\psi, h) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ m^{rp} \int_0^h (1 - \text{sinc } mt)^{pk} \psi(t) dt \right\}^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в том, что для произвольной функции $f \in L_2^r$ справедливо равенство [5], [10]

$$\|\tilde{\Delta}_t^k(f^{(r)})\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m^2(f) m^{2r} (1 - \text{sinc } mt)^{2k}. \quad (16)$$

Воспользуемся далее упрощенным вариантом неравенства Минковского, приведенным в [21]:

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{m=n}^{\infty} |\bar{f}_m(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \left(\int_0^h |\bar{f}_m(t)|^p dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

где $0 < p \leq 2$. Полагая $\bar{f}_m \stackrel{\text{df}}{=} f_m \psi^{1/p}$, из (17) имеем

$$\left\{ \int_0^h \left(\sum_{m=n}^{\infty} |f_m(t)|^2 \right)^{p/2} \psi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_m(t)|^p \psi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}, \quad (18)$$

где $0 < p \leq 2$. Используя соотношения (16), (18) и (1), получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt \right\}^{1/p} \geq \left\{ \int_0^h \|\tilde{\Delta}_t^k(f^{(r)})\|^{2 \cdot p/2} \psi(t) dt \right\}^{1/p} \\ & \geq \left\{ \int_0^h \left(\sum_{m=n}^{\infty} \rho_m^2(f) m^{2r} (1 - \text{sinc } mt)^{2k} \right)^{p/2} \psi(t) dt \right\}^{1/p} \\ & \geq \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \left(\rho_m^p(f) m^{pr} \int_0^h (1 - \text{sinc } mt)^{pk} \psi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \\ & = \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \rho_m^2(f) \gamma_{m,k,r,p}^2(\psi, h) \right\}^{1/2} \geq E_{n-1}(f) \inf_{n \leq m < \infty} \gamma_{m,k,r,p}(\psi, h). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (14) следует оценка сверху

$$\chi_{n,k,r,p,1/p}(\psi, h) \leq \frac{1}{\inf_{n \leq m < \infty} \gamma_{m,k,r,p}(\psi, h)}. \quad (19)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sin nx$, которая принадлежит классу L_2^r . Поскольку

$$E_{n-1}(f_1) = 1, \quad \Omega_k(f_1^{(r)}, t) = n^r(1 - \operatorname{sinc} nt)^k,$$

где $0 < t \leq \pi/n$, то

$$\chi_{n,k,r,p,1/p}(\psi, h) \geq \frac{E_{n-1}(f_1)}{(\int_0^h \Omega_k^p(f_1^{(r)}, t) \psi(t) dt)^{1/p}} = \frac{1}{\gamma_{n,k,r,p}(\psi, h)}. \quad (20)$$

Сопоставляя неравенства (19) и (20), получаем требуемое соотношение (15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

4. Из доказанной теоремы вытекают такие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ и выполнены все остальные требования теоремы 2. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\chi_{n,k,r,p,1/p}(\psi, h) = \frac{1}{\gamma_{n,k,r,p}(\psi, h)}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\operatorname{sinc} x$. Для нее при любом $x \geq 1$ и $0 < y \leq 3\pi/4$ выполняется неравенство $\operatorname{sinc} x \geq \operatorname{sinc} xy$ (см., например, [22; с. 129, 132]). Тогда справедливо неравенство

$$x^\nu(1 - \operatorname{sinc} xy)^\alpha \geq (1 - \operatorname{sinc} y)^\alpha, \quad (22)$$

где ν и α – произвольные положительные числа. Пусть $x = m/n$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \geq n$, а $y = nt$, $0 < t \leq h$. Также полагаем $\nu = rp$, $\alpha = kp$. Тогда в силу (22) выполняется соотношение

$$m^{rp}(1 - \operatorname{sinc} mt)^{kp} \geq n^{rp}(1 - \operatorname{sinc} nt)^{kp}. \quad (23)$$

Умножив обе части неравенства (23) на функцию $\psi(t)$, проинтегрировав полученное соотношение по t в пределах от 0 до h и возведя обе части полученного таким образом неравенства в степень $1/p$, для любого $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, запишем

$$\gamma_{m,k,r,p}(\psi, h) \geq \gamma_{n,k,r,p}(\psi, h). \quad (24)$$

С учетом (24) и формулы (15) получаем требуемое равенство (21), чем и завершаем доказательство следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\psi \equiv 1$, $k, n, r \in \mathbb{N}$; $1/r \leq p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда выполнено следующее равенство:

$$\chi_{n,k,r,p,1/p}(1, h) = \frac{1}{\gamma_{n,k,r,p}(1, h)}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из вида величины $\gamma_{m,k,r,p}(1,h)$, $m \geq n$, достаточно показать, что функция

$$\xi(\tau) \stackrel{\text{df}}{=} \tau^{rp} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt$$

будет невозрастающей при $\tau \geq 1$. Очевидно, что

$$\xi'(\tau) = rp\tau^{rp-1} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt + \tau^{rp} \int_0^h \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt. \quad (26)$$

Поскольку, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, справедливо равенство

$$\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk}, \quad (27)$$

где t, τ отличны от нуля, из формулы (26) с учетом (27) имеем

$$\xi'(\tau) = \tau^{rp-1} \left\{ rp \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt + \int_0^h t \frac{\partial}{\partial t} (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt \right\}. \quad (28)$$

Используя при вычислении второго интеграла в правой части равенства (28) процедуру интегрирования по частям, запишем

$$\xi'(\tau) = \tau^{rp-1} \left\{ h(1 - \operatorname{sinc} \tau h)^{pk} + (rp - 1) \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} \tau t)^{pk} dt \right\}. \quad (29)$$

Учитывая поведение функции $\varphi(t) = \operatorname{sinc} t$ (см., например, [22; с. 132]) и используя приведенное в формулировке следствия неравенство $p \geq 1/r$, из (29) при $\tau \geq 1$ получаем $\xi'(\tau) \geq 0$. Следовательно, $\inf\{\xi(\tau) : 1 \leq \tau < \infty\} = \xi(1)$, а это означает, что

$$\inf\{\gamma_{m,k,r,p}(1,h) : n \leq m < \infty\} = \gamma_{n,k,r,p}(1,h). \quad (30)$$

Используя равенство (30) и соотношение (15), получаем требуемое равенство (25). Следствие 2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\psi(t) \equiv 1$, $k, n, \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\chi_{n,k,r,1/k,k}(1,h) = \frac{1}{\gamma_{n,k,r,1/k}(1,h)}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим величины

$$\gamma_{m,k,r,1/k}(1,h) = m^r \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} mt) dt \right\}^k = m^r \left(h - \frac{1}{m} \operatorname{Si}(mh) \right)^k, \quad (32)$$

где $m \geq n$. Используя (32), получаем

$$\mathcal{R}_{m,n,k,r,1/k}(1,h) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\gamma_{m,k,r,1/k}(1,h)}{\gamma_{n,k,r,1/k}(1,h)} = \left(\frac{m}{n} \right)^r \left(\frac{1 - \operatorname{Si}(mh)/(mh)}{1 - \operatorname{Si}(nh)/(nh)} \right)^k. \quad (33)$$

Учитывая, что функция $\mu(t) \stackrel{\text{df}}{=} \text{Si}(t)/t$ является положительной невозрастающей на интервале $0 < t < \infty$ и такой, что $\lim\{\mu(t) : t \rightarrow 0\} = 1$, $\lim\{\mu(t) : t \rightarrow \infty\} = 0$ [6], из (33) имеем $\mathcal{R}_{m,n,k,r,1/k}(1, h) \geq 1$, т.е.

$$\inf\{\gamma_{m,k,r,1/k}(1, h) : n \leq m < \infty\} = \gamma_{n,k,r,1/k}(1, h). \quad (34)$$

С учетом формулы (34) из (15) получаем требуемое равенство (31). Следствие 3 доказано.

Отметим, что при $h = \pi/n$ из равенства (31) следует соотношение (13), ранее полученное авторами в работе [10].

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\psi(t) \equiv t$, $k, n, \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq \pi/n$. Тогда имеет место равенство

$$\chi_{n,k,r,1/k,k}(t, h) = \frac{1}{\gamma_{n,k,r,1/k}(t, h)}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Путем непосредственных подсчетов нетрудно убедиться в том, что

$$\gamma_{m,k,r,1/k}(t, h) = m^r \left\{ \int_0^h t(1 - \text{sinc } mt) dt \right\}^k = m^r \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2}{m^2} \sin^2 \left(\frac{mh}{2} \right) \right)^k,$$

где $m \geq n$. Запишем

$$\mathcal{R}_{m,n,k,r,1/k}(t, h) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\gamma_{m,k,r,1/k}(t, h)}{\gamma_{n,k,r,1/k}(t, h)} = \left(\frac{m}{n} \right)^r \left(\frac{1 - \text{sinc}^2(mh/2)}{1 - \text{sinc}^2(nh/2)} \right)^k. \quad (36)$$

Учитывая, что при $0 < \tau \leq \pi/2$ и любом $1 \leq x < \infty$ справедливо неравенство $\text{sinc } \tau \geq \text{sinc } x\tau$, из (36) при $m \geq n$ получаем $\mathcal{R}_{m,n,k,r,1/k}(t, h) \geq 1$. Следовательно,

$$\inf\{\gamma_{m,k,r,1/k}(t, h) : n \leq m < \infty\} = \gamma_{n,k,r,1/k}(t, h). \quad (37)$$

Требуемое равенство (35) вытекает из сопоставления соотношений (15) и (37). Следствие 4 доказано.

Отметим, что в частном случае при $h = \pi/n$ из (35) получаем точное значение экстремальной характеристики

$$\sup \left\{ \frac{n^{r-2k} E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^{\pi/n} t \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \right)^k} : f \in L_2^r, f \not\equiv \text{const} \right\} = \left(\frac{2}{\pi^2 - 4} \right)^k,$$

которое также следует из результата (12), полученного Абиловым и Абиловой в работе [5].

Пусть $h = b/n$, где $0 < b \leq \pi$, и $\psi_*(t) \stackrel{\text{df}}{=} g(nt)$, где g есть неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, b]$ функция. Тогда запишем

$$\begin{aligned} \gamma_{m,k,r,p} \left(\psi_*, \frac{b}{n} \right) &= \left\{ m^{rp} \int_0^{b/n} (1 - \text{sinc } mt)^{pk} g(nt) dt \right\}^{1/p} \\ &= n^{r-1/p} \left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^{rp} \int_0^b \left(1 - \text{sinc} \left(\frac{mt}{n} \right) \right)^{pk} g(t) dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда имеем

$$\inf_{n \leq m < \infty} \gamma_{m,k,r,p} \left(\psi_*, \frac{b}{n} \right) \geq n^{r-1/p} \inf_{x \geq 1} \left\{ x^{rp} \int_0^b (1 - \operatorname{sinc} xt)^{pk} g(t) dt \right\}^{1/p}. \quad (39)$$

Используя формулы (38), (39), теорему 2 и идеологию рассуждений, проведенных в [18; с. 788–789], получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < b \leq \pi$, g есть неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, b]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{\{\eta_{k,r,p}(b, g, 1)\}^{1/p}} \leq \sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\{\int_0^b \Omega_k^p(f^{(r)}, t/n) g(t) dt\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\{\inf_{1 \leq x < \infty} \eta_{k,r,p}(b, g, x)\}^{1/p}},$$

где

$$\eta_{k,r,p}(b, g, x) \stackrel{\text{df}}{=} x^{rp} \int_0^b (1 - \operatorname{sinc} xt)^{pk} g(t) dt.$$

Если при этом функция g такова, что

$$\inf_{1 \leq x < \infty} \eta_{k,r,p}(b, g, x) = \eta_{k,r,p}(b, g, 1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\{\int_0^b \Omega_k^p(f^{(r)}, t/n) g(t) dt\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\eta_{k,r,p}(b, g, 1)\}^{1/p}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $0 < b \leq \pi$, $n, k, r \in \mathbb{N}$. Если для некоторого $p \in (0, 2]$ функция $g(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{rp-1} g_1(t)$, где g_1 не возрастает, является неотрицательной суммируемой на отрезке $[0, b]$, то выполняется равенство

$$\inf_{1 \leq x < \infty} \eta_{k,r,p}(b, t^{rp-1} g_1(t), x) = \eta_{k,r,p}(b, t^{rp-1} g_1(t), 1) \quad (40)$$

и справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\{\int_0^b \Omega_k^p(f^{(r)}, t/n) t^{rp-1} g_1(t) dt\}^{1/p}} = \frac{1}{\{\eta_{k,r,p}(b, t^{rp-1} g_1(t), 1)\}^{1/p}}. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость равенства (40), поскольку тогда в силу следствия 5 получаем требуемое равенство (41). Следуя [18], полагаем

$$g_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} g_1(t), & \text{если } 0 \leq t \leq b, \\ g_1(b), & \text{если } b \leq t < \infty. \end{cases}$$

При всех $x \in [1, \infty)$ имеем

$$\eta_{k,r,p}(b, t^{rp-1} g_1(t), x) = x^{rp} \int_0^b (1 - \operatorname{sinc} xt)^{pk} t^{rp-1} g_1(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{bx} (1 - \operatorname{sinc} t)^{pk} t^{rp-1} g_2(t/x) dt \geq \int_0^{bx} (1 - \operatorname{sinc} t)^{pk} t^{rp-1} g_2(t) dt \\
&\geq \int_0^b (1 - \operatorname{sinc} t)^{pk} t^{rp-1} g_1(t) dt = \eta_{k,r,p}(b, t^{rp-1} g_1(t), 1).
\end{aligned}$$

Следствие 6 доказано.

5. Поскольку для функции $f \in L_2^r$ ее промежуточные производные $f^{(r-\nu)}$, $\nu = 1, \dots, r-1$, принадлежат пространству L_2 , то определенный интерес представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(r-\nu)})$ на классе L_2^r . Из результатов предыдущего пункта вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = 0, 1, \dots, r$; ψ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция; $f^{(0)} \equiv f$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left\{ \int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt \right\}^{-1/p}. \quad (42)$$

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $0 < h \leq \pi/n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = 0, 1, \dots, r$. Если $\psi(t) \equiv 1$, то

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{\nu-k} E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left\{ \int_0^h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \right\}^k} = \frac{1}{\{nh - \operatorname{Si}(nh)\}^k}. \quad (43)$$

Если $\psi(t) \equiv t$, то

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{n^{\nu-2k} E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left\{ \int_0^h \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) t dt \right\}^k} = \frac{1}{\{2((nh/2)^2 - \sin^2(nh/2))\}^k}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, покажем справедливость соотношения (42), поскольку равенства (43) и (44) доказываются аналогичным образом с использованием результатов следствий 3 и 4 соответственно.

Для произвольной функции $f \in L_2$ из формулы (21) при $r = 0$ имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{ \frac{\int_0^h \Omega_k^p(f, t) \psi(t) dt}{\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt} \right\}^{1/p}. \quad (45)$$

В то же время для любой функции $f \in L_2^r$ из (21) получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{n^r} \left\{ \frac{\int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt}{\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt} \right\}^{1/p}. \quad (46)$$

Поскольку из определения класса L_2^r следует, что $f^{(r)} \in L_2$, то из (45) имеем

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \leq \left\{ \frac{\int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt}{\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt} \right\}^{1/p}. \quad (47)$$

Воспользуемся точным неравенством между наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами последовательных производных функции $f \in L_2^r$ (см., например, [23; глава 6, § 6.3])

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \leq E_{n-1}(f^{(r)})^{1-\nu/r} E_{n-1}(f)^{\nu/r}. \quad (48)$$

Подставляя в правую часть неравенства (48) вместо величин $E_{n-1}(f)$ и $E_{n-1}(f^{(r)})$ их оценки сверху, приведенные в формулах (46) и (47) соответственно, для производной функции $f \in L_2^r$ получаем

$$\frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left\{ \int_0^h \Omega_k^p(f^{(r)}, t) \psi(t) dt \right\}^{1/p}} \leq \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt \right\}^{-1/p}. \quad (49)$$

Рассмотрим функцию $f_1(x) = \sin nx$, для которой

$$E_{n-1}(f_1^{(r-\nu)}) = n^{r-\nu}, \quad \Omega_k(f_1^{(r)}, t) = n^r (1 - \operatorname{sinc} nt)^k,$$

где $0 < t \leq \pi/n$. Поскольку для $f_1 \in L_2^r$ имеем

$$\frac{n^\nu E_{n-1}(f_1^{(r-\nu)})}{\left\{ \int_0^h \Omega_k^p(f_1^{(r)}, t) \psi(t) dt \right\}^{1/p}} = \left\{ \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pk} \psi(t) dt \right\}^{-1/p}, \quad (50)$$

то сопоставляя соотношения (49) и (50), получаем требуемое равенство (42), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Отметим, что в частном случае при $\nu = r$ и $h = \pi/n$ из формулы (44) следует результат (12), а из формулы (43) – результат (13), полученные ранее в работах [5] и [10] соответственно.

6. Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые определения и понятия. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в L_2 , $\mathcal{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $V: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $V^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathcal{M}; L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d_n(\mathcal{M}; L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathcal{M}; L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - Vf\| : f \in \mathcal{M} \} : V L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathcal{M}; L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathcal{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ \pi_n(\mathcal{M}; L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - V^\perp f\| : f \in \mathcal{M} \} : V^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *коломгоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекторным* n -*поперечниками*. В силу того, что L_2 является гильбертовым пространством, имеют место следующие соотношения между перечисленными величинами:

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) \leq d^n(\mathcal{M}; L_2) \leq d_n(\mathcal{M}; L_2) = \delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \pi_n(\mathcal{M}; L_2). \quad (51)$$

При помощи характеристики гладкости (1) определим следующие классы функций. Пусть $\Phi(t)$, $0 \leq t < \infty$, есть непрерывная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_p^r(\Omega_k, \Phi)$, $0 < p \leq 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in L_2^r$, для которых при любом $0 < t < \infty$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Omega_k^p(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Phi^p(t). \quad (52)$$

Полагая при $t = 0$ значение функции $\text{sinc } t$ равным 1, обозначим через t_* величину ее аргумента, при котором эта функция достигает на полусегменте $[0, \infty)$ свое наименьшее значение. При этом t_* ($4.49 < t_* < 4.51$) есть минимальный положительный корень уравнения $t = \text{tg } t$. Обозначим [10]

$$(1 - \text{sinc } t)_* \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} 1 - \text{sinc } t, & \text{если } 0 \leq t \leq t_*, \\ 1 - \text{sinc } t_*, & \text{если } t_* \leq t < \infty. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r, k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [1/r, 2]$ и функция Φ при любых значениях $t \in (0, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \right)^p \geq \frac{\pi \int_0^{nt} (1 - \text{sinc } \tau)_*^{kp} d\tau}{nt \int_0^\pi (1 - \text{sinc } \tau)^{kp} d\tau}. \quad (53)$$

Тогда выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} \text{diam}_{2n}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) &= \text{diam}_{2n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) = E_{n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi)) \\ &= \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \text{sinc } \tau)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} n^{-r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (54)$$

где $\text{diam}_n(\cdot)$ – любой из выше перечисленных n -поперечников,

$$E_{n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi)) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W_p^r(\Omega_k, \Phi)\}.$$

При этом множество мажорант Φ , для которых имеет место неравенство (53), не пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение (25), в котором полагаем $h = \pi/n$, для произвольной функции $f \in L_2^r$ запишем оценку сверху величины ее наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}(f) \leq n^{-r} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \text{sinc } \tau)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} \left\{ \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^p(f^{(r)}, t) dt \right\}^{1/p}. \quad (55)$$

В силу определения класса $W_p^r(\Omega_k, \Phi)$, на основании формулы (51) и неравенства (55) имеем

$$\begin{aligned} \text{diam}_{2n}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) &\leq \text{diam}_{2n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) \leq d_{2n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) \\ &\leq E_{n-1}(W_p^r(\Omega_k, \Phi)) \leq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \text{sinc } \tau)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} n^{-r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Для вычисления оценок снизу рассматриваемых n -поперечников получим согласно (51) оценку снизу бернштейновского n -поперечника $b_{2n}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2)$. Для этого рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau \right)^{-1/p} n^{-r} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}.$$

Используя [10], имеем

$$\Omega_k^p(T_n^{(r)}, \tau) \leq n^{pr} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{kp} \|T_n\|^p. \quad (57)$$

Для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ в силу условия (53) и неравенства (57) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \Omega_k^p(T_n^{(r)}, \tau) d\tau &\leq n^{pr} \|T_n\|^p \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{kp} d\tau \\ &\leq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau \right\}^{-1} \Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{1}{nt} \int_0^{nt} (1 - \operatorname{sinc} \tau)_*^{kp} d\tau \leq \Phi^p(t), \end{aligned}$$

где $0 < t < \infty$. Отсюда следует включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_p^r(\Omega_k, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n -поперечника и соотношение (51), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}_{2n}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) &\geq b_{2n}(W_p^r(\Omega_k, \Phi); L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}; L_2) \\ &\geq \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau \right\}^{-1/p} \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r}. \end{aligned} \quad (58)$$

Сопоставляя неравенства (56) и (58), получаем требуемые равенства (54).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\pi}{\int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau} - 1, \quad (59)$$

удовлетворяет условию (53). Для этого необходимо доказать, что после подстановки функции Φ_* в соотношение (53) будет справедливо неравенство

$$\left(\frac{nt}{\pi} \right)^\alpha \geq \frac{\pi \int_0^{nt} (1 - \operatorname{sinc} \tau)_*^{kp} d\tau}{nt \int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau}. \quad (60)$$

Полагая в (60) $v \stackrel{\text{df}}{=} nt$, где $v \in [0, \infty)$, имеем

$$v^{\alpha+1} \geq \frac{\pi^{\alpha+1} \int_0^v (1 - \operatorname{sinc} \tau)_*^{kp} d\tau}{\int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau}. \quad (61)$$

Используя (61), рассмотрим функцию

$$H(v) \stackrel{\text{df}}{=} v^{\alpha+1} - \frac{\pi^{\alpha+1} \int_0^v (1 - \operatorname{sinc} \tau)_*^{kp} d\tau}{\int_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau},$$

которую с учетом (59) перепишем так:

$$H(v) = v^{\alpha+1} - \pi^{\alpha}(\alpha+1) \int_0^v (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau. \quad (62)$$

Нам достаточно показать, что $H(v) \geq 0$ для любых $0 \leq v < \infty$.

Для дальнейших рассуждений необходимо получить оценки величины α как сверху, так и снизу. Из геометрических соображений (см., например, [22; с. 132]) следует, что для любого $\tau \in (0, \pi)$ выполнено неравенство $\operatorname{sinc} \tau > 1 - \tau/\pi$. Тогда из (59) имеем

$$\alpha > \frac{\pi}{\int_0^{\pi} (\tau/\pi)^{kp} d\tau} - 1 = kp. \quad (63)$$

Для получения оценки сверху воспользуемся несложно проверяемым неравенством $1 - \operatorname{sinc} \tau > (\tau/\pi)^2$, где $\tau \in (0, \pi)$. В силу (59) имеем

$$\alpha < \frac{\pi}{\int_0^{\pi} (\tau/\pi)^{2kp} d\tau} - 1 = 2kp. \quad (64)$$

Рассуждения проведем отдельно для трех случаев:

- а) $0 \leq v \leq \pi$;
- б) $\pi \leq v \leq t_*$;
- в) $t_* \leq v < \infty$.

а) Пусть $0 \leq v \leq \pi$. Воспользовавшись неравенством $\sin \tau \geq \tau - \tau^3/6$, где $0 \leq \tau \leq \pi$, в силу (62) получаем

$$H(v) \geq v^{\alpha+1} \left(1 - \frac{\pi^{\alpha}(\alpha+1)v^{2kp-\alpha}}{(2kp+1)6^{kp}} \right). \quad (65)$$

Из (64) и (65) следует, что при $v \rightarrow 0+0$ функция H принимает положительные значения. Покажем, что H является знакопостоянной функцией на интервале $(0, \pi)$. Для этого применим метод рассуждений от противного, полагая, что существует некоторая точка $\beta \in (0, \pi)$, при переходе аргумента v через которую функция H меняет свой знак. С учетом (59) из (62) имеем $H(0) = H(\pi) = 0$. В силу теоремы Ролля отсюда получаем, что производная первого порядка

$$H^{(1)}(v) = \pi^{\alpha}(\alpha+1) \left(\left(\frac{v}{\pi} \right)^{\alpha} - (1 - \operatorname{sinc} v)^{kp} \right) \quad (66)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi)$ не менее двух различных нулей. Из (66) следует, что такое же количество различных нулей на $(0, \pi)$ и в тех же точках должна иметь и функция

$$H_*(v) \stackrel{\text{df}}{=} \left(\frac{v}{\pi} \right)^{\alpha/(kp)} - 1 + \operatorname{sinc} v. \quad (67)$$

В силу первого замечательного предела полагаем, что при $v = 0$ функция $\operatorname{sinc} v$ принимает значение, равное 1. С учетом этого из (67) имеем $H_*(0) = H_*(\pi) = 0$. Следовательно, функция H_* должна иметь на отрезке $[0, \pi]$ не менее четырех различных нулей. Поскольку

$$H_*(v) = \frac{\tilde{H}_*(v)}{v}, \quad (68)$$

где

$$\tilde{H}_*(v) \stackrel{\text{df}}{=} \pi^{-\alpha/(kp)} v^{1+\alpha/(kp)} - v + \sin v, \quad (69)$$

то из выше сказанного вытекает, что функция $\tilde{H}_*$ также должна иметь на отрезке $[0, \pi]$ не менее четырех различных нулей. Тогда из теоремы Ролля следует, что производная первого порядка

$$\tilde{H}_*^{(1)}(v) = \left(1 + \frac{\alpha}{kp}\right) \pi^{-\alpha/(kp)} \cdot v^{\alpha/(kp)} - 1 + \cos v \quad (70)$$

обязана обращаться в нуль на интервале $(0, \pi)$ не менее, чем в трех различных точках. Поскольку $\tilde{H}_*^{(1)}(0) = 0$, то на основании аналогичных соображений функция

$$\tilde{H}_*^{(2)}(v) = \left(1 + \frac{\alpha}{kp}\right) \frac{\alpha}{kp} \pi^{-\alpha/(kp)} \cdot v^{\alpha/(kp)-1} - \sin v \quad (71)$$

должна иметь на $(0, \pi)$ не менее трех различных нулей. Учитывая неравенство (63), из (71) имеем $\tilde{H}_*^{(2)}(0) = 0$. Следовательно, производная третьего порядка

$$\tilde{H}_*^{(3)}(v) = \left(1 + \frac{\alpha}{kp}\right) \frac{\alpha}{kp} \left(\frac{\alpha}{kp} - 1\right) \pi^{-\alpha/(kp)} \cdot v^{-2(1-\alpha/(2kp))} - \cos v \quad (72)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi)$ также не менее трех различных нулей. В силу неравенства (64) функция $v^{-2(1-\alpha/(2kp))}$ является положительной монотонно убывающей выпуклой вниз на множестве $(0, \pi)$. Учитывая поведение функции $\cos v$ при $0 < v < \pi$ заключаем, что на основании (72) функция $\tilde{H}_*^{(3)}$ может иметь на интервале $(0, \pi)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (61) в случае а).

Рассмотрим случай б). Из (71) следует, что при $v \in [\pi, t_*]$ функция $\tilde{H}_*^{(2)}$ принимает положительные значения. Следовательно, $\tilde{H}_*^{(1)}$ – монотонно возрастающая функция на $[\pi, t_*]$. Поскольку в силу (63) и (70)

$$\tilde{H}_*^{(1)}(\pi) = \frac{\alpha}{kp} - 1 > 0,$$

то $\tilde{H}_*^{(1)}(v) > 0$ для любого $v \in [\pi, t_*]$. Из (69) имеем $\tilde{H}_*(\pi) = 0$, что означает неотрицательность функции $\tilde{H}_*$. Учитывая соотношения (66)–(68), отсюда получаем $H^{(1)}(v) \geq 0$, когда $\pi \leq v \leq t_*$. Вследствие того, что $H(\pi) = 0$, в рассматриваемом случае $H(v) \geq 0$, что означает справедливость неравенства (61) для любого $\pi \leq v \leq t_*$.

Перейдем к рассмотрению случая в), в рамках которого из (59) и (62) получаем

$$H(v) = v^{\alpha+1} - \pi^{\alpha+1} - \pi^\alpha(\alpha+1) \left\{ \int_\pi^{t_*} (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{kp} d\tau + (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{kp} (v - t_*) \right\}. \quad (73)$$

Из (73) имеем

$$H^{(1)}(v) = \pi^\alpha(\alpha+1) \left\{ \left(\frac{v}{\pi}\right)^\alpha - (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{kp} \right\}. \quad (74)$$

Используя неравенство (63), из (74) получаем

$$H^{(1)}(t_*) > \pi^\alpha(\alpha + 1) \left\{ \left(\frac{t_*}{\pi} \right)^{kp} - (1 - \operatorname{sinc} t_*)^{kp} \right\} > 0. \quad (75)$$

Из (74)–(75) следует, что функция $H^{(1)}$ является положительной монотонно возрастающей. Поскольку в силу результатов случая б) значение $H(t_*) \geq 0$, то функция H является неотрицательной на множестве $t_* \leq v < \infty$ и неравенство (61) справедливо и в данном случае. Теорема 4 доказана.

Отметим, что при $p = 1/k$, где $k \leq r$, $k \in \mathbb{N}$, результат теоремы 4 совпадает с результатом теоремы 2 из [10].

7. Определенный интерес с нашей точки зрения представляет изучение поведения величин $E_{n-1}(f^{(r-\nu)})$, где $\nu = 0, 1, \dots, r$, на классах $W_p^r(\Omega_k, \Phi)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $p = 1/k$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Если функция Φ при любом $t \in (0, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)} \right)^{1/k} \geq \frac{\int_0^{nt} (1 - \operatorname{sinc} \tau)_* d\tau}{nt(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)},$$

то для $\nu = 0, 1, \dots, r$ справедливы равенства

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) : f \in W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)\} = \frac{\Phi(\pi/n)}{n^\nu(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)^k}. \quad (76)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (43) при $h = \pi/n$ для произвольной функции $f \in L_2^r$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \leq \frac{n^{k-\nu}}{(\pi - \operatorname{Si}(\pi))^k} \left\{ \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(f^{(r)}, t) dt \right\}^k.$$

Используя определение класса $W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)$, отсюда имеем

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) : f \in W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)\} \leq \frac{\Phi(\pi/n)}{n^\nu(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)^k}. \quad (77)$$

При доказательстве теоремы 2 из [10] было показано, что множество тригонометрических полиномов $T_n \in \mathcal{T}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|T_n\| \leq \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)^k},$$

принадлежит классу $W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)$. Поэтому рассмотрим функцию

$$f_2(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Phi(\pi/n)}{n^r(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)^k} \sin nx.$$

Поскольку $f_2 \in W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)$ и

$$E_{n-1}(f_2^{(r-\nu)}) = \frac{\Phi(\pi/n)}{n^\nu(1 - \operatorname{Si}(\pi)/\pi)^k},$$

то

$$\sup\{E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) : f \in W_{1/k}^r(\Omega_k, \Phi)\} \geq E_{n-1}(f_2^{(r-\nu)}) = \frac{\Phi(\pi/n)}{n^\nu(1 - \text{Si}(\pi)/\pi)^k}. \quad (78)$$

Сопоставляя соотношения (77) и (78), получаем требуемые равенства (76). Теорема 5 доказана.

Отметим, что при $\nu = r$ равенство (76) совпадает с соответствующим результатом, содержащимся в формулировке теоремы 2 из [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Жук, “Некоторые неравенства между равномерными наилучшими приближениями периодических функций”, *ДАН СССР*, **201**:2 (1971), 263–265.
- [2] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [3] Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, М., 1988.
- [4] А. А. Абилов, “Оценка поперечника одного класса функции в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **52**:1 (1992), 3–8.
- [5] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811.
- [6] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Некоторые вопросы теории аппроксимации 2π -периодических функций в пространствах L_p , $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Проблеми теорії наближення функцій і суміжні питання*, Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **1**, № 1, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2004, 25–41.
- [7] V. Kokilashvili, Y. E. Yildirim, “On the approximation in weighted Lebesgue spaces”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **143** (2007), 103–113.
- [8] L. Ephremidze, V. Kokilashvili, Y. E. Yildirim, “On the inverse inequalities for trigonometric polynomial approximations in weighted Lorentz spaces”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **144** (2007), 132–136.
- [9] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 792–796.
- [10] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336.
- [11] М. К. Потапов, “О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений”, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1998, № 3, 38–48.
- [12] М. К. Потапов, “О применении несимметричных операторов обобщенного сдвига в теории приближений”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы V Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 июня–4 июля 2001 г.), Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, **78**, Казань, 2001, 185–189.
- [13] А. Ю. Напеденина, “О совпадении классов функций, определяемых оператором обобщенного сдвига или порядком наилучшего приближения”, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2004, № 2, 29–33.
- [14] К. В. Руновский, “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 81–102.
- [15] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98**:3 (1975), 395–415.
- [16] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutna, “Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities”, *East. J. Approx.*, **14**:4 (2008), 411–421.

- [17] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [18] А. А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 785–792.
- [19] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p* , Тульский гос. ун-т, Тула, 1995.
- [20] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [21] G. H. Hardy, G. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
- [22] В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко, *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*, Наука, М., 1987.
- [23] Н. П. Корнейчук, А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Аппроксимация с ограничениями*, Наукова думка, Киев, 1982.

С. Б. Вакарчук

Днепропетровский университет экономики и права

E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило

11.05.2010

Исправленный вариант

19.06.2011

В. И. Забутная

Днепропетровский национальный университет

E-mail: zabutna@mail.ru