Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Р. Насыров, Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 597–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:56:35

Нахождение полинома, униформирующего заданную компактную риманову поверхность

С. Р. Насыров

Предлагается приближенный метод нахождения полинома, униформирующего заданную риманову поверхность. Метод основан на соединении гладкой кривой этой поверхности с некоторой другой поверхностью в пространстве разветвленных накрытий сферы Римана, для которой униформирующий полином известен. Критические точки искомого полинома находятся с помощью решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 3 названия.

1. Постановка задачи. Пусть задана односвязная n -листная компактная риманова поверхность над сферой Римана, которая над бесконечно удаленной точкой имеет точку ветвления порядка $n-1$. Пусть остальные точки ветвления имеют кратности $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$. Тогда по известной теореме униформизации (см., например, [1], [2]) существует полином $P(z)$, который отображает сферу Римана $\mathbb{C}$ на S . Без ограничения общности можно считать, что одна из точек ветвления S располагается над началом координат, $P(0) = 0$, $P(z) \sim z^n$, $n \rightarrow \infty$. Обозначим через a_j , $1 \leq j \leq N-1$, прообразы точек ветвления S , где $a_{N-1} = 0$. Тогда

$$P(z) = n \int_0^z \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta - a_j)^{m_j} d\zeta. \quad (1.1)$$

Так как поверхность S известна, известны точки A_j , $1 \leq j \leq N-1$, $A_{N-1} = 0$, которые являются проекциями на плоскость точек ветвления. Важной задачей является проблема нахождения критических точек a_j полинома (1.1). Конечно, по заданным A_j эти точки определяются, вообще говоря, неединственным образом. Система $P(a_j) = A_j$, $1 \leq j \leq N-2$, является системой $N-2$ алгебраических уравнений с $N-2$ неизвестными, и ее решение представляет известные сложности. Число существенно различных решений связано с известной проблемой Гурвица о числе неэквивалентных накрытий сферы с заданным типом ветвления (см., например, библиографию в [3]). Обозначим через $\Sigma_n(m_1, \dots, m_{N-1})$ пространство компактных

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00381, 09-01-97008-р_поволжье).

односвязных n -листных римановых поверхностей над сферой Римана, которые имеют N точек ветвления порядков $m_1, \dots, m_{N-1}, n-1$, причем над точкой 0 лежит точка ветвления порядка m_{N-1} , а над ∞ – порядка $n-1$.

Мы хотим предложить приближенный метод нахождения параметров a_j в интеграле (1.1). Суть его состоит в соединении гладким путем $S(t)$ в пространстве $\Sigma_n(m_1, \dots, m_{N-1})$ поверхности $S = S(1)$ с некоторой поверхностью $S_0 = S(0)$, для которой критические точки a_j^0 , $1 \leq j \leq N-2$, известны. Гладкость пути означает, что проекции точек ветвления $A_j(t)$ поверхностей $S(t)$ гладко зависят от параметра t . Этой кривой в пространстве критических точек $(a_1, \dots, a_{N-2})$ соответствует гладкий путь, который является интегральной кривой для системы из $N-2$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая эту систему с начальным условием $a_j(0) = a_j^0$, $1 \leq j \leq N-2$, мы получаем уравнение этой кривой. Концевая точка $a_j(1)$, $1 \leq j \leq N-2$, даст значение параметров a_j , $1 \leq j \leq n-2$, для нашей поверхности S . Отметим, что нахождение кривой $S(t)$, соединяющей две точки в пространстве $\Sigma_n(m_1, \dots, m_{N-1})$, является непростой задачей и в данной работе не исследуется.

Итак, пусть нам задана гладкая кривая

$$A_j(t), \quad 1 \leq j \leq N-2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

в пространстве $\mathbb{R}^{N-2}$. Требуется описать гладкую кривую

$$a_j(t), \quad 1 \leq j \leq n-2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

такую, что

$$P(a_j(t), t) = A_j(t), \quad 1 \leq j \leq n-2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$P(z, t) = n \int_0^z \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta - a_j(t))^{m_j} d\zeta,$$

причем $a_j(0) = a_j^0$, $1 \leq j \leq n-2$.

2. Случай простых точек ветвления. Сначала рассмотрим случай, когда $m_j = 1$, $1 \leq j \leq N-1$. Тогда $N = n$ и полином

$$P(z, t) = n \int_0^z \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - a_j(t)) d\zeta = z^n - \left(\frac{n}{n-1} \right) \sum_{j=1}^{n-2} a_j(t) z^{n-1} + \dots \quad (2.1)$$

Запишем в окрестности точки $a_k(t)$ его тейлоровское разложение

$$P(z, t) = A_k(t) + B_k(t)(z - a_k(t))^2 + \dots, \quad (2.2)$$

где

$$B_k(t) = \frac{P''(a_k(t), t)}{2} = \frac{n}{2} \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (a_k(t) - a_j(t)).$$

Из (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} P'(z, t) &= 2B_k(t)(z - a_k(t)) + \dots, \\ \dot{P}(z, t) &= \dot{A}_k(t) - 2\dot{a}_k(t)B_k(t)(z - a_k(t)) + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда

$$\frac{\dot{P}(z, t)}{P'(z, t)} = \frac{\dot{A}_k(t)}{2B_k(t)(z - a_k(t))} + O(1), \quad z \rightarrow a_k(t). \quad (2.4)$$

Кроме того, из (2.1) получаем

$$\frac{\dot{P}(z, t)}{P'(z, t)} = -\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} \dot{a}_j(t) + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\frac{\dot{P}(z, t)}{P'(z, t)} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{2B_k(t)(z - a_k(t))} - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} \dot{a}_j(t).$$

Тогда

$$\dot{P}(z, t) = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)} \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (z - a_j(t)) - \frac{n}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \dot{a}_m(t) \prod_{j=1}^{n-1} (z - a_j(t)). \quad (2.6)$$

Подсчитаем

$$\dot{P}'(a_l(t), t), \quad 1 \leq l \leq n-2.$$

С одной стороны, в силу (2.3) $\dot{P}'(a_l(t), t) = -2\dot{a}_l(t)B_l(t)$. С другой стороны, учитывая равенство

$$\left(\prod_{j=1}^{n-1} (z - a_j(t)) \right)' = \prod_{j=1}^{n-1} (z - a_j(t)) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{z - a_i(t)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^{n-1} (z - a_j(t)) \right)' \Big|_{z=a_l(t)} &= \prod_{j=1, j \neq l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)), \\ \left(\prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (z - a_j(t)) \right)' \Big|_{z=a_l(t)} &= \prod_{j=1, j \neq k, l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)) \end{aligned}$$

при $k \neq l$,

$$\left(\prod_{j=1, j \neq l}^{n-1} (z - a_j(t)) \right)' \Big|_{z=a_l(t)} = \prod_{j=1, j \neq l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)) \sum_{i=1, i \neq l}^{n-1} \frac{1}{a_l(t) - a_i(t)}.$$

Тогда из (2.6) находим

$$\begin{aligned} \dot{P}'(a_l(t), t) &= -2\dot{a}_l(t)B_l(t) \\ &= \frac{n}{2} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)} \prod_{j=1, j \neq k, l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)) \\ &\quad + \frac{n}{2} \frac{\dot{A}_l(t)}{B_l(t)} \prod_{j=1, j \neq l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_l(t) - a_i(t)} \\ &\quad - \frac{n}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \dot{a}_m(t) \prod_{j=1, j \neq l}^{n-1} (a_l(t) - a_j(t)), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{a}_l(t) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)} \frac{1}{a_k(t) - a_l(t)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_l(t)}{B_l(t)} \sum_{i=1, i \neq l}^{n-1} \frac{1}{a_i(t) - a_l(t)} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \dot{a}_m(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначим

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)(a_k(t) - a_l(t))}.$$

Тогда (2.7) запишется в виде

$$\dot{a}_l(t) = \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \alpha_{kl} - \sum_{i=1, i \neq l}^{n-1} \alpha_{li} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \dot{a}_m(t). \quad (2.8)$$

Суммируя равенства (2.8), получаем

$$\sum_{l=1}^{n-2} \dot{a}_l(t) = \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \alpha_{kl} - \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{i=1, i \neq l}^{n-1} \alpha_{li} + \frac{n-2}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \dot{a}_m(t),$$

откуда

$$\sum_{l=1}^{n-2} \dot{a}_l(t) = -(n-1) \sum_{l=1}^{n-2} \alpha_{l, n-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{l=1}^{n-2} \dot{a}_l(t) = -\frac{n-1}{2} \sum_{l=1}^{n-2} \frac{\dot{A}_l(t)}{B_l(t)a_l(t)}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{a}_l(t) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)} \frac{1}{a_k(t) - a_l(t)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_l(t)}{B_l(t)} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-1} \frac{1}{a_k(t) - a_l(t)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{B_k(t)a_k(t)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$1 \leq l \leq n-2.$$

Эта система является искомой системой дифференциальных уравнений для определения $a_l(t)$.

3. Общий случай. Пусть теперь

$$P(z, t) = n \int_0^z \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta - a_j(t))^{m_j} d\zeta = z^n - \left(\frac{n}{n-1} \right) \sum_{j=1}^{N-1} m_j a_j(t) z^{n-1} + \dots, \quad (3.1)$$

где все $a_j(t)$ попарно различны, $a_{N-1}(t) = 0$, $m_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{N-1} m_j = n-1$.

В окрестности точки $a_k(t)$

$$P(z, t) = A_k(t) + B_k(t)(z - a_k(t))^{m_k+1} + \dots, \quad (3.2)$$

где

$$B_k(t) = P^{(m_k+1)}(a_k(t), t) = \left(\frac{n}{m_k+1} \right) \prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (a_k(t) - a_j(t))^{m_j}.$$

Как и в предыдущем пункте, из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\frac{\dot{P}(z, t)}{P'(z, t)} = \sum_{k=1}^{N-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{(m_k+1)B_k(t)(z - a_k(t))^{m_k}} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{P}(z, t) &= n \sum_{k=1}^{N-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{(m_k+1)B_k(t)} \prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (z - a_j(t))^{m_j} \\ &\quad - \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t) \prod_{j=1}^{N-1} (z - a_j(t))^{m_j}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подсчитаем

$$\dot{P}^{(m_l)}(a_l(t), t), \quad 1 \leq l \leq N-1.$$

С одной стороны, из разложения (3.2) получаем $\dot{P}^{(m_l)}(a_l(t), t) = -(m_l+1)! \dot{a}_l(t) B_l(t)$.
С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^{N-1} (z - a_j(t))^{m_j} \right)^{(m_l)} \Big|_{z=a_l(t)} &= m_l! \prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} (a_l(t) - a_j(t))^{m_j}, \\ \left(\prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (z - a_j(t))^{m_j} \right)^{(m_l)} \Big|_{z=a_l(t)} &= m_l! \prod_{j=1, j \neq k, l}^{N-1} (a_l(t) - a_j(t))^{m_j} \end{aligned}$$

при $k \neq l$,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} (z - a_j(t))^{m_j} \right)^{(m_l)} \Big|_{z=a_l(t)} \\ = m_l! \prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} (a_l(t) - a_j(t))^{m_j} \sum_{\sum k_i = m_l} \prod_{i=1, i \neq l}^{N-1} \frac{C_{m_i}^{k_i}}{(a_l(t) - a_i(t))^{k_i}}, \end{aligned}$$

где $0 \leq k_i \leq m_i$, $1 \leq i \leq N-1$. С учетом этих равенств из (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{P}^{(m_l)}(a_l(t), t) &= -(m_l+1)! \dot{a}_l(t) B_l(t) \\ &= m_l! n \sum_{k=1, k \neq l}^{N-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{(m_k+1)B_k(t)} \prod_{j=1, j \neq k, l}^{N-1} (a_l(t) - a_j(t))^{m_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_l! n \frac{\dot{A}_l(t)}{(m_l+1)B_l(t)} \prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} (a_l(t) - a_j(t))^{m_j} \sum_{\sum k_i=m_l} \prod_{i=1, i \neq l}^{N-1} \frac{C_{m_i}^{k_i}}{(a_l(t) - a_i(t))^{k_i}} \\
& - m_l! \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t) \prod_{j=1, j \neq l}^N (a_l(t) - a_j(t))^{m_j}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\dot{a}_l(t) = & - \sum_{k=1, k \neq l}^{N-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{(m_k+1)B_k(t)} \frac{1}{(a_l(t) - a_k(t))^{m_k}} \\
& - \frac{\dot{A}_l(t)}{(m_l+1)B_l(t)} \sum_{\sum k_i=m_l} \prod_{i=1, i \neq l}^{N-1} \frac{C_{m_i}^{k_i}}{(a_l(t) - a_i(t))^{k_i}} + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$D_l = -\frac{1}{n} \sum_{k=1, k \neq l}^{N-2} \frac{\dot{A}_k(t)}{\tilde{B}_k(t)} \frac{1}{(a_l(t) - a_k(t))^{m_k}} - \frac{1}{n} \frac{\dot{A}_l(t)}{\tilde{B}_l(t)} \sum_{\sum k_j=m_l} \prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} \frac{C_{m_j}^{k_j}}{(a_l(t) - a_j(t))^{k_j}},$$

где

$$\tilde{B}_k(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (a_k(t) - a_j(t))^{m_j}.$$

Тогда (3.4) можно записать в виде

$$\dot{a}_l(t) = D_l + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t). \quad (3.5)$$

Из этих соотношений получаем

$$\sum_{l=1}^{N-2} m_l \dot{a}_l(t) = \sum_{l=1}^{N-2} m_l D_l + \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^{N-2} m_l \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t),$$

откуда

$$\frac{m_{N-1}}{n-1} \sum_{i=1}^{N-2} m_i \dot{a}_i(t) = \sum_{l=1}^{N-2} m_l D_l. \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) уравнения (3.5) принимают вид

$$\dot{a}_l(t) = D_l + \frac{1}{m_{N-1}} \sum_{s=1}^{N-2} m_s D_s, \quad 1 \leq l \leq N-2. \quad (3.7)$$

Получим систему (3.7) другим способом, позволяющим записать правые части в более компактном виде. Для этого рассмотрим случай простых точек ветвления $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, где $\alpha_{n-1} = 0$. Тогда для $\alpha_l(t)$ получаем систему уравнений (2.9):

$$n \dot{\alpha}_l(t) = \sum_{k=1, k \neq l}^{n-2} \frac{\dot{\tilde{A}}_k(t)}{\tilde{B}_k(t)} \frac{1}{\alpha_k(t) - \alpha_l(t)} + \frac{\dot{\tilde{A}}_l(t)}{\tilde{B}_l(t)} \sum_{k=1, k \neq l}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k(t) - \alpha_l(t)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dot{\tilde{A}}_k(t)}{\tilde{B}_k(t) \alpha_k(t)}, \quad (3.8)$$

$1 \leq l \leq n-1$, где

$$\tilde{B}_k(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (\alpha_k(t) - \alpha_j(t))^{m_j}, \quad \tilde{A}_k(t) = P(\alpha_k(t), t).$$

Осуществим предельный переход в (3.8), при котором параметры α_j стремятся к предельным значениям следующим образом:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1} \rightarrow a_1, \quad (3.9)$$

$$\alpha_{m_1+1}, \alpha_{m_1+2}, \dots, \alpha_{m_1+m_2} \rightarrow a_2, \quad (3.10)$$

$$\dots \dots \dots \alpha_{n-m_{N-1}}, \alpha_{n-m_{N-1}+1}, \dots, \alpha_{n-1} \rightarrow 0 = a_{N-1}. \quad (3.11)$$

При этом будем считать, что

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{A}}_1 &= \dot{\tilde{A}}_2 = \dots = \dot{\tilde{A}}_{m_1} = \dot{A}_1, \\ \dot{\tilde{A}}_{m_1+1} &= \dot{\tilde{A}}_{m_1+2} = \dots = \dot{\tilde{A}}_{m_1+m_2} = \dot{A}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{\tilde{A}}_{n-m_{N-1}} &= \dot{\tilde{A}}_{n-m_{N-1}+1} = \dots = \dot{\tilde{A}}_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Выведем, к примеру, дифференциальное уравнение для a_1 . Нетрудно видеть, что можно осуществить сначала предельный переход (3.9), потом (3.10), ..., (3.11).

Запишем дифференциальное уравнение для α_1 в виде

$$n\dot{\alpha}_1 = \frac{\dot{A}_1}{\tilde{B}_1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_1} - \frac{2}{\alpha_1} \right) + \dot{A}_1 \alpha_1 \sum_{k=2}^{m_1} \frac{1}{\tilde{B}_k} \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_1)\alpha_k} + \sum_{k=m_1+1}^{n-2} \frac{\dot{\tilde{A}}_k}{\tilde{B}_k} \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_1)\alpha_k}.$$

Докажем, что при предельном переходе (3.9)

$$\frac{1}{\tilde{B}_1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_1} - \frac{2}{\alpha_1} \right) + \alpha_1 \sum_{k=2}^{m_1} \frac{1}{\tilde{B}_k} \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_1)\alpha_k} \rightarrow \frac{a_1 h_{m_1}^{(m_1)}(a_1)}{m_1!},$$

где

$$h_{m_1}(x) = \frac{1}{x^2 \prod_{j=m_1+1}^{n-2} (x - \alpha_j)}.$$

При этом для простоты обозначений будем писать m вместо m_1 .

Проведем доказательство этого утверждения индукцией по m . При $m=1$ имеем

$$h'_1(x) = -h_1(x) \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{x - \alpha_k} + \frac{2}{x} \right),$$

поэтому

$$a_1 h'_1(a_1) = \frac{1}{a_1 \prod_{j=2}^{n-2} (a_1 - \alpha_j)} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\alpha_k - a_1} - \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{\tilde{B}_1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\alpha_k - a_1} - \frac{2}{a_1} \right),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь утверждение доказано для некоторого m . Докажем его справедливость при $m+1$. Имеем $h_{m+1}(x) = (x - \alpha_{m+1})h_m(x)$. Тогда с учетом того, что при $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rightarrow a_1$

$$\tilde{B}_{m+1} \rightarrow (\alpha_{m+1} - a_1)^m \prod_{j=m+2}^{n-1} (\alpha_{m+1} - \alpha_j) = \frac{(\alpha_{m+1} - a_1)^m}{\alpha_{m+1} h_{m+1}(\alpha_{m+1})},$$

и из предположения индукции, переходя к повторному пределу, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1} \rightarrow a_1} \left[\frac{1}{\tilde{B}_1} \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_1} - \frac{2}{\alpha_1} \right) + \alpha_1 \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{\tilde{B}_k} \frac{1}{(\alpha_k - \alpha_1)\alpha_k} \right] \\ = a_1 \lim_{\alpha_{m+1} \rightarrow a_1} \left[\frac{h_m^{(m)}(a_1)}{m!} + \frac{h_{m+1}(\alpha_{m+1})}{(\alpha_{m+1} - a_1)^{m+1}} \right]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} h_m^{(m)}(x) &= \left(\frac{h_{m+1}(x)}{x - \alpha_{m+1}} \right)^{(m)} = \left(\frac{h_{m+1}(\alpha_{m+1})}{x - \alpha_{m+1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_{m+1}^{(j)}(\alpha_{m+1})}{j!} (x - \alpha_{m+1})^{j-1} \right)^{(m)} \\ &= -m! \frac{h_{m+1}(\alpha_{m+1})}{(x - \alpha_{m+1})^{m+1}} + \sum_{j=m+1}^{\infty} h_{m+1}^{(j)}(\alpha_{m+1}) \frac{\prod_{k=1}^{m-1} (j - k)}{j!} (x - \alpha_{m+1})^{j-m-1}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{h_m^{(m)}(a_1)}{m!} + \frac{h_{m+1}(\alpha_{m+1})}{(\alpha_{m+1} - a_1)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \sum_{j=m+1}^{\infty} h_{m+1}^{(j)}(\alpha_{m+1}) \frac{\prod_{k=1}^{m-1} (j - k)}{j!} (a_1 - \alpha_{m+1})^{j-m-1}.$$

Последний ряд сходится равномерно по α_{m+1} в окрестности точки a_1 , следовательно,

$$a_1 \lim_{\alpha_{m+1} \rightarrow a_1} \left[\frac{h_m^{(m)}(a_1)}{m!} + \frac{h_{m+1}(\alpha_{m+1})}{(\alpha_{m+1} - a_1)^{m+1}} \right] = a_1 \frac{h_{m+1}^{(m+1)}(a_{m+1})}{(m+1)!}.$$

Это завершает доказательство нашего утверждения.

Рассмотрим теперь предельный переход (3.10). Учитывая, что

$$\dot{\hat{A}}_{m_1+1} = \dot{\hat{A}}_{m_1+2} = \dots = \dot{\hat{A}}_{m_1+m_2} = \dot{A}_2,$$

получаем, что множитель при $\dot{A}_2$ имеет вид

$$\sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{1}{\tilde{B}_k} \frac{a_1}{(\alpha_k - a_1)\alpha_k} = a_1 \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{g(\alpha_k)}{\prod_{j=m_1+1, j \neq k}^{m_1+m_2} (\alpha_k - \alpha_j)},$$

где

$$g(x) = \frac{1}{(x - a_1)^{m_1+1} x \prod_{i=m_2+1}^{n-1} (x - \alpha_i)}.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha_{m_1+1}, \alpha_{m_1+2}, \dots, \alpha_{m_1+m_2} \rightarrow a_2} \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{1}{\tilde{B}_k} \frac{a_1}{(\alpha_k - a_1)\alpha_k} = a_1 \frac{g^{(m_2-1)}(a_2)}{(m_2-1)!}.$$

Осуществив все предельные переходы, получаем соотношение

$$\frac{n\dot{a}_1}{a_1} = \frac{H_1^{(m_1)}(a_1)}{m_1!} \dot{A}_1 + \sum_{k=2}^{N-2} \frac{G_{k1}^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k-1)!} \dot{A}_k,$$

где

$$H_1(x) = \frac{1}{x \prod_{j=2}^{N-1} (x - a_j)^{m_j}}, \quad G_{k1}(x) = \frac{1}{x(x - a_1) \prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (x - a_j)^{m_j}}.$$

Аналогично получаем для всех $1 \leq l \leq N-2$

$$\frac{n\dot{a}_l}{a_l} = \frac{H_l^{(m_l)}(a_l)}{m_l!} \dot{A}_l + \sum_{k=1, k \neq l}^{N-2} \frac{G_{kl}^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k-1)!} \dot{A}_k, \quad (3.12)$$

где

$$H_l(x) = \frac{1}{x \prod_{j=1, j \neq l}^{N-1} (x - a_j)^{m_j}}, \quad G_{kl}(x) = \frac{1}{x(x - a_l) \prod_{j=1, j \neq k}^{N-1} (x - a_j)^{m_j}}.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. Система (3.12) с начальными условиями $a_l(0) = a_l^0$ является иско-
мой для определения параметров a_l , $1 \leq l \leq N-2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система (3.12) позволяет быстро и с хорошей степенью точности находить координаты критических точек полинома, униформизирующего заданную односвязную риманову поверхность. При этом в процессе решения находится не один, а целое семейство полиномов, униформизирующих определенное семейство поверхностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Систему (3.12) можно рассматривать как вариационные формулы для полиномов, выражающие вариации их критических точек через вариации их образов – точек ветвления соответствующих римановых поверхностей. Эти формулы могут быть использованы при решении экстремальных геометрических задач, связанных с комплексными полиномами.

4. Примеры. 1) Рассмотрим задачу о нахождении полинома, униформизирующего шестилистную риманову поверхность S с 5 простыми точками ветвления, располагающимися над точками $1-5i$, 7 , 10 , $4i$ и 0 , которая получается из шести листов плоскости следующим образом. Первый лист разрезан вдоль горизонтальных лучей, идущих из точек 0 , $4i$ и $1-5i$ влево, и из точки 10 – вертикально вверх, из точки 7 – вертикально вниз. Каждый из остальных листов разрезан вдоль одного из пяти описанных выше разрезов. Далее берега разрезов различных листов склеиваются “крест-накрест”.

В качестве начальной возьмем риманову поверхность S_0 , соответствующую полиному

$$P_0(z) = (z+1)^6 - 6(z+1) + 5.$$

Для этой поверхности имеем

$$a_k^0 = \exp \frac{2\pi i k}{5} - 1, \quad A_k^0 := P_0(a_k^0) = -5 \exp \frac{2\pi i k}{5} + 5, \quad 1 \leq k \leq 5.$$

Будем считать, что точки $A_k(t)$ движутся равномерно по отрезкам, соединяющим соответствующие точки, тогда

$$\dot{A}_1(t) \equiv 1 - 5i - A_1^0, \quad \dot{A}_2(t) \equiv 7 - A_2^0, \quad \dot{A}_3(t) \equiv 10 - A_3^0, \quad \dot{A}_4(t) \equiv 4i - A_4^0.$$

Решая соответствующую задачу Коши для системы (2.9) с начальными условиями $a_k(0) = a_k^0$, получаем

$$\begin{aligned} a_1(1) &= -0.423004 + 0.990397i, & a_2(1) &= -1.629548 + 0.220150i, \\ a_3(1) &= -2.093426 - 0.448178i, & a_4(1) &= -0.402543 - 0.900011i. \end{aligned}$$

Искомый полином имеет вид

$$\begin{aligned} P(z) &= z^6 + (5.458225 + 0.165171i)z^5 + (11.498625 + 0.154854i)z^4 \\ &\quad + (13.757210 + 0.160773i)z^3 + (11.193667 + 0.669005i)z^2. \end{aligned}$$

2) Рассмотрим в качестве начальной поверхность S , которая рассматривалась в предыдущем примере. Исследуем, что получится, если проекции точек ветвления поверхности остаются неизменными, кроме точки A_3 , которая однократно обходит окружность радиуса 10 с центром в начале координат против часовой стрелки.

Имеем

$$\dot{A}_1(t) \equiv \dot{A}_2(t) \equiv \dot{A}_4(t) \equiv 0, \quad \dot{A}_3(t) \equiv 20\pi i \exp(2\pi it).$$

Решая соответствующую задачу Коши, получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.270000 + 1.015072i, & a_2 &= -1.361071 + 0.482319i, \\ a_3 &= -0.735819 - 1.943339i, & a_4 &= -0.718713 - 0.836007i. \end{aligned}$$

Искомый полином имеет вид

$$\begin{aligned} z^6 &+ (3.702723 + 1.538346i)z^5 + (7.974467 + 4.283021i)z^4 \\ &+ (10.498898 + 4.767967i)z^3 + (9.526016 + 4.233000i)z^2. \end{aligned}$$

Отметим, что полученная такой деформацией риманова поверхность не эквивалентна S .

3) Рассмотрим полином

$$P(z) = 10 \int_0^z (\zeta - 1)^2 (\zeta - 2)^3 \zeta^4 d\zeta.$$

Он отображает сферу Римана на десятилистную риманову поверхность S_0 , у которой над конечной частью плоскости расположены три точки ветвления: над $z = 0$ — точка ветвления порядка 4, над $P(1) = -0.257937\dots$ — порядка 2 и над точкой $P(2) = -1.01587\dots$ — порядка 3. Найдем полином, унифицирующий риманову поверхность, которая получается из S_0 движением проекций точек ветвления по отрезкам равномерно в точки (-1) и (-2) соответственно. Критические точки должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений (3.12), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{10\dot{a}_1}{a_1} = \frac{H_1''(a_1)}{2!} \dot{A}_1 + \frac{G_{21}''(a_2)}{1!} \dot{A}_2, \quad \frac{10\dot{a}_2}{a_2} = \frac{G_{12}'(a_1)}{0!} \dot{A}_1 + \frac{H_2'''(a_2)}{3!} \dot{A}_2, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(x) &= (x - a_2)^{-3} x^{-5}, & H_2(x) &= (x - a_1)^{-2} x^{-5}, \\ G_{21}(x) &= (x - a_1)^{-4} x^{-5}, & G_{12}(x) &= (x - a_2)^{-4} x^{-5}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ – константы, равные

$$\dot{A}_1 = -1 - P(1) = -0.742063 \dots, \quad \dot{A}_2 = -2 - P(2) = -0.98413 \dots$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{10\dot{a}_1}{a_1} &= \dot{A}_1 \left[\frac{6}{(a_1 - a_2)^5 a_1^5} + \frac{15}{(a_1 - a_2)^4 a_1^6} + \frac{15}{(a_1 - a_2)^3 a_1^7} \right] \\ &\quad + \dot{A}_2 \left[\frac{6}{(a_2 - a_1)^5 a_2^5} + \frac{15}{(a_2 - a_1)^4 a_2^6} + \frac{15}{(a_2 - a_1)^3 a_2^7} \right], \\ \frac{10\dot{a}_2}{a_2} &= -\dot{A}_1 \left[\frac{4}{(a_1 - a_2)^5 a_1^5} + \frac{5}{(a_1 - a_2)^4 a_1^6} \right] \\ &\quad - \dot{A}_2 \left[\frac{4}{(a_2 - a_1)^5 a_2^5} + \frac{15}{(a_2 - a_1)^4 a_2^6} + \frac{30}{(a_2 - a_1)^3 a_2^7} + \frac{35}{(a_2 - a_1)^2 a_2^8} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решая (4.3) с начальным условием $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = 2$, получаем при $t = 1$ искомые значения критических точек

$$a_1(1) = 1.195164 \dots, \quad a_2(1) = 2.165415 \dots$$

Соответствующий полином имеет вид

$$P(z) = z^{10} - 9.873973 z^9 + 38.779575 z^8 - 75.797113 z^7 + 73.940526 z^6 - 29.007420 z^5.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960.
- [2] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.
- [3] С. Р. Насыров, *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей*, Магариф, Казань, 2008.

С. Р. Насыров

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: snasyrov@ksu.ru

Поступило

14.09.2010