Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 401–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8892>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:11:56

Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных

А. С. Романюк

Получены точные по порядку оценки наилучших ортогональных тригонометрических приближений классов Никольского–Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q . Установлены также порядки наилучших приближений функций $2d$ переменных вида $g(x, y) = f(x - y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, $f(x) \in B_{p,\theta}^r$, линейными комбинациями произведений функций d переменных.

Библиография: 16 названий

DOI: 10.4213/mzm8892

Введение. В настоящей работе исследуются аппроксимативные характеристики классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ и Никольского H_p^r периодических функций многих переменных. Работа состоит из двух пунктов. В первом пункте изучаются тригонометрические приближения названных классов функций в пространстве L_q и при этом главное внимание уделяется установлению точных по порядку оценок наилучших ортогональных тригонометрических приближений. Затем с использованием полученных оценок указанных величин устанавливаются порядки приближения функций из классов $B_{p,\theta}^r$ и H_p^r их “кубическими” суммами Фурье, а также точные по порядку оценки наилучших приближений тригонометрическими полиномами с соответствующим спектром. Во втором пункте исследуются приближения функций $2d$ переменных вида

$$g(x, y) = f(x - y), \quad x, y \in \mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi],$$

$f(x) \in B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, либо $f(x) \in H_p^r$, линейными комбинациями произведений функций d переменных. Такого вида приближения называют *билинейными*. Определения рассматриваемых аппроксимативных характеристик будут даны в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d -мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, а $L_p(\mathbb{T}^d)$ – пространство 2π -периодических по каждой переменной функций $f(x)$,

для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Пусть далее $k \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ обозначим

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и определим кратную разность порядка k функции $f(x)$ в точке x с шагом h по формуле

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h \Delta_h^{k-1} f(x), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Отправляясь от $\Delta_h^k f(x)$ определим модуль k -го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, который обозначим $\omega_k(f, t)_p$, согласно формуле

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f\|_p,$$

где $|h|$ – евклидова норма h .

Будем говорить, что функция $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ принадлежит пространству $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta, p \leq \infty$, $r > 0$, если

$$\left(\int_0^\infty (t^{-r} \omega_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\sup_{t>0} \omega_k(f, t)_p t^{-r} < \infty, \quad \theta = \infty.$$

При этом предполагается, что $k > r$. Норма в пространстве $B_{p,\theta}^r$ задается формулами

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \|f\|_p + \left(\int_0^\infty (t^{-r} \omega_k(f, t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f, t)_p t^{-r}.$$
(1)

Пространства $B_{p,\theta}^r$ введены Бесовым [1], причем $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r – пространства, введенные Никольским [2]. Таким образом, класс $B_{p,\theta}^r$ – это множество функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых $\|f\|_{B_{p,\theta}^r} \leq 1$.

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным определением классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, и H_p^r .

Пусть $V_m(u)$, $m \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_m(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos ku + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos ku.$$

Многомерное ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, определим по формуле

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^d V_m(x_j).$$

Для функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим оператор свертки $\mathbf{V}_m$ этой функции с ядром $V_m(x)$, т.е.

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m.$$

Таким образом, с помощью оператора $\mathbf{V}_m$ определяется кратная сумма Валле Пуссена функции $f(x)$:

$$V_m(f, x) = \mathbf{V}_m f.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ положим

$$\sigma_0(f, x) = V_1(f, x), \quad \sigma_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s = 1, 2, \dots$$

В принятых обозначениях (с точностью до абсолютных постоянных) классы $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} B_{p,\theta}^r &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \\ B_{p,\infty}^r &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что в случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентные определения классов $B_{p,\theta}^r$, используя в (2) вместо $\sigma_s(f, x)$ “блоки” ряда Фурье функции $f(x)$.

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ обозначим

$$f_{(0)}(x) = \hat{f}(0), \quad f_{(s)}(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \leq \max |k_j| < 2^s \\ j=1, \dots, d}} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$ и

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(y) e^{-i(k,y)} dy$$

– коэффициенты Фурье функции f . Тогда

$$\begin{aligned} B_{p,\theta}^r &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \\ B_{p,\infty}^r &= \left\{ f : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p \leq 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что с увеличением параметра θ классы $B_{p,\theta}^r$ расширяются, т.е. при $1 \leq \theta \leq \theta' \leq \infty$

$$B_{p,1}^r \subset B_{p,\theta}^r \subset B_{p,\theta'}^r \subset B_{p,\infty}^r = H_p^r. \quad (4)$$

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для последовательностей $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ запись $\mu_1 \asymp \mu_2$ означает, что существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1 \mu_1(n) \leq \mu_2(n) \leq C_2 \mu_1(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Если только $\mu_2(n) \leq C_3 \mu_1(n)$ или $\mu_2(n) \geq C_4 \mu_1(n)$, то соответственно пишем $\mu_2(n) \ll \mu_1(n)$ и $\mu_2(n) \gg \mu_1(n)$. Все постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут встречаться ниже, могут зависеть только от параметров, содержащихся в определениях классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

1. Наилучшие тригонометрические приближения. Пусть $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}^d$ – конечное множество, содержащее m элементов, т.е. $|\Lambda_m| = m$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, положим

$$S_{\Lambda_m}(f, x) = \sum_{k \in \Lambda_m} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}$$

и рассмотрим величину

$$e_m^\perp(f)_q = \inf_{\Lambda_m} \|f(\cdot) - S_{\Lambda_m}(f, \cdot)\|_q.$$

Соответственно для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ положим

$$e_m^\perp(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^\perp(f)_q. \quad (5)$$

Величину (5) называют *наилучшим ортогональным тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q* . Наилучшие ортогональные тригонометрические приближения некоторых классов функций многих переменных исследовались в работах [4], [5], в которых можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

Основное внимание в этом пункте уделяется получению точных по порядку оценок величин $e_m^\perp(B_{p, \theta}^r)_q$, $1 \leq p, q \leq \infty$. В некоторых случаях для доказательства оценок снизу этих величин будем использовать оценки наилучших m -членных тригонометрических приближений функций из классов $B_{p, \theta}^r$. Для формулировки соответствующего результата приведем необходимые обозначения.

Пусть $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ и $\{k^j\}_{j=1}^m$ – произвольный набор d -мерных векторов $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ с целочисленными координатами. Тогда величина

$$e_m(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q,$$

где c_j – произвольные числа, называется *наилучшим m -членным тригонометрическим приближением функции f* . Для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ полагаем

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q.$$

Заметим, что согласно определений для величин $e_m(F)_q$ и $e_m^\perp(F)_q$ справедливо соотношение

$$e_m(F)_q \leq e_m^\perp(F)_q.$$

Напомним, что величина $e_m(f)_2$ для функций одной переменной введена Стечкиным [6] при формулировке критерия абсолютной сходимости ортогональных рядов. Затем величины $e_m(f)_q$ и $e_m(F)_q$, $1 \leq q \leq \infty$, для функций как одной, так и нескольких переменных исследовались во многих работах. С соответствующей библиографией можно ознакомиться, например, в работе [7]. Сформулируем результат о порядках величин $e_m(B_{p, \theta}^r)_q$, который получен в [8].

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ и

$$r(p, q) = \begin{cases} d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+, & 1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ или } 1 \leq q \leq p \leq \infty, \\ \max\left\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\right\} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда для $r > r(p, q)$ справедливо соотношение

$$e_m(B_{p,\theta}^r)_q \asymp m^{-r/d+(1/p-\max\{1/q; 1/2\})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

При получении оценок сверху величин $e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ будем использовать неравенство, установленное Никольским [2] и называемое “неравенство разных метрик”.

ТЕОРЕМА В. Пусть $n = (n_1, \dots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, и

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q.$$

Теперь сформулируем и докажем полученное нами утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ и $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. Тогда при $r > d(1/p - 1/q)_+$ справедливо соотношение

$$e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q \asymp m^{-r/d+(1/p-1/q)_+}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала получим в (6) оценку сверху. Согласно вложению $B_{p,\theta}^r \subset H_p^r$, $1 \leq \theta < \infty$, необходимую оценку достаточно получить для величины $e_m^\perp(H_p^r)_q$. Рассмотрим последовательно несколько соотношений между параметрами p и q .

Пусть сначала имеет место случай $1 \leq p < q \leq \infty$. Тогда подберем число $n(m)$ из соотношения $2^n \asymp m^{1/d}$ и рассмотрим приближение функции $f \in H_p^r$ ее частной суммой Фурье $S_n(f, x)$ вида

$$S_n(f, x) = \sum_{s=0}^n f_{(s)}(x).$$

Пусть q_0 – некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < q$. Поскольку для $f \in H_p^r$, $1 \leq p \leq \infty$, выполнено неравенство $\|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq 2^{-sr}$, $s \in \mathbb{Z}_+$ (см. (2)), согласно неравенству Минковского и неравенству разных метрик Никольского можем записать

$$e_m^\perp(f)_q \ll \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \right\|_q \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_q$$

$$\begin{aligned}
 &\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0-1/q)} \|f_{(s)}(\cdot)\|_{q_0} \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0-1/q)} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_{q_0} \\
 &\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0-1/q)} 2^{sd(1/p-1/q_0)} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p = \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p-1/q)} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \\
 &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd(r/d-1/p+1/q)} \ll 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/q}.
 \end{aligned}$$

При $1 < p = q < \infty$ в силу неравенства Минковского и соотношения $\|f_{(s)}(\cdot)\|_p \leq 2^{-sr}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $f \in H_p^r$ (см. (3)), будем иметь

$$\begin{aligned}
 e_m^\perp(f)_q &\ll \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(\cdot) \right\|_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}(\cdot)\|_p \\
 &\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp m^{-r/d}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Оценка сверху величины $e_m^\perp(H_p^r)_q$ в случае $1 < q < p < \infty$ следует из (7) согласно вложению $H_p^r \subset H_q^r$, т.е.

$$e_m^\perp(H_p^r)_q \leq e_m^\perp(H_q^r)_q \asymp m^{-r/d}, \tag{8}$$

а при $1 < q < \infty$ и $p = \infty$ оценка $e_m^\perp(H_\infty^r)_q$ является следствием (8) в силу вложения $H_\infty^r \subset H_p^r$.

Наконец, в случае $q = 1$ и $1 < p < \infty$ искомая оценка величины $e_m^\perp(H_p^r)_1$ следует из (8) согласно неравенству $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_q$, $q > 1$, и вложению $H_\infty^r \subset H_p^r$. Оценки сверху во всех случаях теоремы доказаны.

Переходя к установлению в (6) оценок снизу, заметим, что в случаях $1 \leq p \leq q \leq 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ и $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$ искомые оценки следуют из теоремы А согласно соотношению $e_m(B_{p,\theta}^r)_q \leq e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$. Поэтому рассмотрим те из оставшихся случаев, для которых величины $e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ и $e_m(B_{p,\theta}^r)_q$ имеют разные порядки. Предварительно отметим, что в силу вложения $B_{p,1}^r \subset B_{p,\theta}^r$, $1 < \theta \leq \infty$, достаточно получить соответствующие оценки снизу для величины $e_m^\perp(B_{p,1}^r)_q$.

Итак, пусть сначала выполнены соотношения $2 \leq p < q < \infty$ или $1 < p \leq 2 < q < \infty$. Для $f \in B_{p,1}^r$ рассмотрим приближающий полином вида

$$S_{\Lambda_m}(f, x) = \sum_{k \in \Lambda_m} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}^d$ и $|\Lambda_m| = m$.

Тогда в силу следствия Д.1.2 (см. [9; с. 392]) можем записать

$$\|f(\cdot) - S_{\Lambda_m}(f, \cdot)\|_q = \sup_{g: \|g\|_{q'} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f(x) - S_{\Lambda_m}(f, x)) \overline{g}(x) dx \right|, \tag{9}$$

где $1/q + 1/q' = 1$ и $\overline{g}(x)$ — функция, комплексно сопряженная функции $g(x)$.

Чтобы воспользоваться соотношением (9), построим соответствующие функции. Подберем число $n \in \mathbb{N}$ из неравенств $2^{(n-2)d} \leq m < 2^{(n-1)d}$ и рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^d \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j}.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\left\| \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 < p < \infty, \quad (10)$$

будем иметь

$$\|F_n\|_{B_{p,1}^r} = \sum_s 2^{sr} \|(F_n)_{(s)}(\cdot)\|_p = 2^{(n+1)r} \|F_n\|_p \asymp 2^{nr} 2^{nd(1-1/p)} = 2^{nd(r/d+1-1/p)}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что функция

$$f_1(x) = C_5 2^{-nd(r/d+1-1/p)} F_n(x)$$

при надлежащем выборе постоянной $C_5 > 0$ принадлежит классу $B_{p,1}^r$.

Далее, поскольку согласно (10)

$$\|F_n\|_{q'} \asymp 2^{(nd)/q}, \quad 1 < q < \infty,$$

функция

$$g_1(x) = C_6 2^{-(nd)/q} F_n(x)$$

с соответствующей постоянной $C_6 > 0$ удовлетворяет условию $\|g_1\|_{q'} \leq 1$.

Таким образом, воспользовавшись соотношением (9) по отношению к построенным функциям $f_1(x)$ и $g_1(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f_1(\cdot) - S_{\Lambda_m}(f_1, \cdot)\|_q &\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{-(nd)/q} (2^{nd} - m) \\ &> 2^{-nd(r/d+1+1/q-1/p)} 2^{nd} \left(1 - \frac{1}{2^d}\right) \\ &\asymp 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Пусть теперь имеет место случай $1 \leq p < \infty$ и $q = \infty$. Подберем число $n(m) \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялись соотношения $2^{nd} \asymp m$ и $2^{nd} \geq 4m$, и положим

$$v_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_7 2^{-nd(r/d+1-1/p)} v_{n+1}(x), \quad C_7 > 0. \quad (12)$$

Поскольку (см., например, [10; с. 66])

$$\|v_{n+1}\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (13)$$

легко убедиться, что функция $f_2(x)$ с соответствующей постоянной $C_7 > 0$ принадлежит классу $B_{p,1}^r$. Действительно, согласно (2) и (13) можем записать

$$\begin{aligned}\|f_2\|_{B_{p,1}^r} &= \sum_s 2^{sr} \|\sigma_s(f_2, \cdot)\|_p \ll 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{(n+1)r} \|v_{n+1}\|_p \\ &\asymp 2^{-nd(1-1/p)} 2^{nd(1-1/p)} = 1.\end{aligned}$$

Далее, пусть $S_{\Lambda_m}(f_2, x)$ – полином, состоящий из m произвольных гармоник ряда Фурье функции $f_2(x)$. Тогда, принимая во внимание, что согласно (13)

$$\|v_{n+1}\|_\infty \asymp 2^{nd},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\|f_2(\cdot) - S_{\Lambda_m}(f_2, \cdot)\|_\infty &\geq \|f_2(\cdot)\|_\infty - \|S_{\Lambda_m}(f_2, \cdot)\|_\infty \gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} (2^{nd} - m) \\ &\asymp 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d-1/p)} \asymp m^{-r/d+1/p}.\end{aligned}$$

Наконец, пусть $p = 1$ и $q \in (1, \infty)$. Заметим, что в случае $q \in (1, 2]$ оценка снизу для $e_m^\perp(B_{1,1}^r)_q$ следует из теоремы А. Поэтому осталось получить искомую оценку при $p = 1$ и $q \in (2, \infty)$. С этой целью снова воспользуемся соотношением (9). В качестве функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого соотношения выберем функции $f_2(x)$ при $p = 1$ и

$$g_2(x) = C_8 2^{-(nd)/q} v_{n+1}(x), \quad C_8 > 0,$$

соответственно. При этом по-прежнему предполагаются выполненными соотношения $2^{nd} \asymp m$ и $2^{nd} \geq 4m$.

Поскольку согласно (13)

$$\|g_2\|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} \|v_{n+1}\|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} 2^{nd(1-1/q')} = 1,$$

при соответствующем выборе постоянной $C_8 > 0$ функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию соотношения (9) для функции $g(x)$.

Таким образом, воспользовавшись соотношением (9) применительно к функциям $f_2(x)$ при $p = 1$ и $g_2(x)$, получим

$$\begin{aligned}e_m^\perp(f_2)_q &\gg 2^{-nr} 2^{-(nd)/q} (\|v_{n+1}\|_2^2 - m) \gg 2^{-nd(r/d+1/q)} (2^{nd} - m) \\ &\asymp 2^{-nd(r/d+1/q)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d-1+1/q)} \asymp m^{-r/d+1-1/q}.\end{aligned}$$

Оценки снизу установлены. Теорема доказана.

Прокомментируем полученный результат, сопоставив его с оценками близкой, в определенном смысле, аппроксимативной характеристики классов $B_{p,\theta}^r$.

Пусть $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ и $\{\widehat{f}(k(l))\}_{l=1}^\infty$ – коэффициенты Фурье $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ функции $f(x)$, упорядоченные в порядке невозрастания их модулей, т.е.

$$|\widehat{f}(k(1))| \geq |\widehat{f}(k(2))| \geq \dots$$

Рассмотрим полином

$$G_m(f, x) = \sum_{l=1}^m \widehat{f}(k(l)) e^{i(k(l), x)},$$

который называют *аппроксимантом* функции $f(x)$.

Для функционального класса $B_{p,\theta}^r$ положим

$$G_m(B_{p,\theta}^r)_q = \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(\cdot) - G_m(f, \cdot)\|_q.$$

Такого вида m -членные приближения называют *жадные алгоритмы* (англ. “greedy algorithm”).

В [11] получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА С. Пусть $1 \leq q, p, \theta \leq \infty$. Тогда

$$G_m(B_{p,\theta}^r)_q \asymp \begin{cases} m^{-r/d+(1/p-1/2)+}, & 1 \leq q \leq 2, \quad r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)_+, \\ m^{-r/d+\max\{1/p; 1/2\}-1/q}, & 2 \leq q \leq \infty, \quad r > d \max\left\{\frac{1}{p}; \frac{1}{2}\right\}. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, сопоставив (6) и (14), видим, что существуют соотношения между параметрами p , q и r , для которых

$$e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q \asymp G_m(B_{p,\theta}^r)_q,$$

а также и такие, для которых величины $e_m^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ и $G_m(B_{p,\theta}^r)_q$ имеют разные порядки.

В заключение пункта, используя результат теоремы 1, установим порядок приближения функций из классов $B_{p,\theta}^r$ и, в частности, H_p^r их суммами Фурье $S_n(f, x)$. Параллельно получим также порядки наилучших приближений функций из тех же классов тригонометрическими полиномами с соответствующим спектром.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ и $n \in \mathbb{N}$ через $S_n(f, x)$ обозначим кратную сумму Фурье вида

$$S_n(f, x) = \sum_{\substack{|k_j| < 2^n \\ j=1, \dots, d}} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}.$$

Заметим, что выше при доказательстве теоремы 1 сумма $S_n(f, x)$ была определена в несколько иных терминах.

Пусть $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$. Положим

$$\mathcal{E}_n(f)_q = \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_q,$$

и если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ – некоторый функциональный класс, то

$$\mathcal{E}_n(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_n(f)_q.$$

Пусть T_n – множество тригонометрических полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k \in K(n)} c_k e^{i(k, x)},$$

где $K(n) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| < 2^n, j = 1, \dots, d\}$.

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, обозначим

$$E_n(f)_q = \inf_{t \in T_n} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ тригонометрическими полиномами из T_n и соответственно для $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$

$$E_n(F)_q = \sup_{f \in F} E_n(f)_q.$$

Отметим, что при $q \in (1, \infty)$ справедливо соотношение

$$E_n(f)_q \asymp \mathcal{E}_n(f)_q, \quad (15)$$

(см., например, [3; лемма 3]).

Сформулируем и докажем полученные утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ и при этом $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. Тогда при $r > d(1/p - 1/q)_+$ справедливы соотношения

$$\mathcal{E}_n(B_{p,\theta}^r)_q \asymp E_n(B_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-nd(r/d - (1/p - 1/q)_+)}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху для величины $\mathcal{E}_n(B_{p,\theta}^r)_q$ и, следовательно, для величины $E_n(B_{p,\theta}^r)_q$ получены при доказательстве теоремы 1. Переходя к доказательству в (16) оценок снизу, заметим, что в случае $1 < q < \infty$ искомые оценки также являются следствием теоремы 1 и соотношения (15) при $2^n \asymp m^{1/d}$.

Пусть имеет место случай $1 \leq p < \infty$ и $q = \infty$. Положим

$$t^*(x) = \sum_{k \in K(n)} c_k^* e^{i(k,x)}$$

– полином наилучшего приближения функции $f_2(x)$ (см. (12)) в метрике пространства $L_\infty(\mathbb{T}^d)$.

Тогда с одной стороны

$$\begin{aligned} ((f_2 - t^*), v_{n+1}) &= (f_2, v_{n+1}) \asymp 2^{-nd(r/d + 1 - 1/p)} \|v_{n+1}\|_2^2 \\ &\asymp 2^{-nd(r/d + 1 - 1/p)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d - 1/p)}, \end{aligned} \quad (17)$$

а с другой – в силу неравенства Гёльдера и оценки (13) имеем

$$((f_2 - t^*), v_{n+1}) \leq \|f_2 - t^*\|_\infty \|v_{n+1}\|_1 \asymp \|f_2 - t^*\|_\infty = E_n(f_2)_\infty. \quad (18)$$

Сопоставив (17) и (18), приходим к оценке

$$E_n(f_2)_\infty \gg 2^{-nd(r/d - 1/p)}.$$

Оценка снизу в случае $1 < p \leq \infty$, $q = 1$ следует из теоремы А при $2^n \asymp m^{1/d}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда при $p = 1, \infty$

$$E_n(B_{p,\theta}^r)_p \asymp 2^{-nr}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценку сверху в (19) установим при $\theta = \infty$, т.е. для классов H_p^r . Рассмотрим для $f \in H_p^r$ приближающий полином вида

$$t_n(f, x) = \sum_{s=0}^n \sigma_s(f, x).$$

Поскольку для $f \in H_p^r$ выполнено соотношение $\|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq 2^{-sr}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $p = 1, \infty$, согласно неравенству Минковского будем иметь

$$\|f(\cdot) - t_n(f, \cdot)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \sigma_s(f, \cdot) \right\|_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, \cdot)\|_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr}.$$

Оценка сверху в (19) следует из теоремы A согласно неравенству

$$E_n(B_{p,\theta}^r)_p \gg e_m(B_{p,\theta}^r)_p \asymp m^{-r/d}, \quad 2^n \asymp m^{1/d}.$$

Теорема доказана.

2. Наилучшие билинейные приближения. Пусть $L_q(\mathbb{T}^{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, — множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, с конечной смешанной нормой

$$\|f(x, y)\|_{q_1, q_2} = \left\| \|f(\cdot, y)\|_{q_1} \right\|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$ по переменной $x \in \mathbb{T}^d$, а затем от результата по переменной $y \in \mathbb{T}^d$ в пространстве $L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^{2d})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка m :

$$\tau_m(f)_{q_1, q_2} = \inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| f(x, y) - \sum_{i=1}^m u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1, q_2}, \quad (20)$$

где $u_i \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $v_i \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$.

Если $F \subset L_q(\mathbb{T}^{2d})$ — класс функций, то полагаем

$$\tau_m(F)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in F} \tau_m(f)_{q_1, q_2}. \quad (21)$$

По-видимому, первый результат о наилучших билинейных приближениях был получен Е. Шмидтом [12] еще в 1907 г. при исследовании интегральных уравнений. Несколько позже билинейные приближения как индивидуальных функций, так и классов функций (величины (20), (21)), исследовались во многих работах. С соответствующей библиографией можно ознакомиться, например, в работах [5], [13], [14].

Основная цель этой части работы — получение точных по порядку оценок величин

$$\tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1, q_2} = \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \tau_m(f)_{q_1, q_2}$$

в предположении, что $f(x) \in B_{p,\theta}^r$, а билинейные приближения $\tau_m(f)_{q_1, q_2}$ рассматриваются для функций вида $f(x - y)$, $x, y \in \mathbb{T}^d$.

Сформулируем и докажем полученное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq \theta, q_2 \leq \infty$. Тогда

$$\tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2} \asymp \begin{cases} m^{-r/d+1/p-1/q_1}, & 1 \leq p \leq q_1 \leq 2, \quad r > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}\right), \\ m^{-r/d}, & 2 \leq p \leq q_1 \leq \infty, \quad r > \frac{d}{2} \text{ или } 2 \leq q_1 \leq p \leq \infty, \quad r > 0, \\ m^{-r/d+1/p-1/2} & 1 \leq p < 2 < q_1 \leq \infty, \quad r > \frac{d}{p}. \end{cases} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху в (22) следуют из теоремы А.

Так, в силу равенства

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_{q_1} = \left\| f(x - y) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q_1, \infty}$$

и вложений (4) можно написать цепочку неравенств

$$\tau_m(B_{p,1}^r)_{q_1,1} \leq \tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2} \leq \tau_m(B_{p,\infty}^r)_{q_1,\infty} \leq 2e_m(B_{p,\infty}^r)_{q_1}.$$

Отсюда, воспользовавшись соответствующими результатами, полученными в теореме А, приходим к искомой оценке сверху величин $\tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2}$.

Переходя к доказательству в (22) оценок снизу, заметим, что их достаточно получить в случае $\theta = 1$, т.е. для классов $B_{p,1}^r$.

Пусть сначала имеет место соотношение $1 \leq p \leq q_1 \leq 2$. В таком случае для получения оценки снизу величины $\tau_m(B_{p,\theta}^r)_{q_1,q_2}$ нам понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $C^d(N)$ обозначает множество векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, вида

$$C^d(N) = \{k = (k_1, \dots, k_d), |k_j| \leq N, j = 1, \dots, d\}.$$

Имеет место

ЛЕММА А [15]. Пусть задано число N и $M = N^d$. Тогда для любой функции

$$g(x) = \sum_{k \in C^d(2N)} \hat{g}(k) e^{i(k, x)}$$

такой, что $|\hat{g}(k)| \leq 1$ и $|\hat{g}(k)| = 1$, при $k \in C^d(N)$ выполнено соотношение

$$\tau_M(g(x - y))_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Итак, подберем число $n \in \mathbb{N}$ согласно неравенствам $2^{(n-1)d} \leq m < 2^{nd}$ и рассмотрим билинейное приближение функции $V_{2^n}(x - y)$. Пусть системы функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^m$ и $\{v_i(y)\}_{i=1}^m$, $x, y \in \mathbb{T}^d$, таковы, что

$$\left\| V_{2^n}(x - y) - \sum_{i=1}^m u_i(x) v_i(y) \right\|_{q_1,1} \leq 2\tau_m(V_{2^n}(x - y))_{q_1,1}. \quad (23)$$

Поскольку

$$V_{2^{n+1}} * V_{2^n} = V_{2^n}$$

и для $f \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q_1 \leq \infty$,

$$\|V_{2^{n+1}} f\|_{q_1} \leq 3^d \|f\|_{q_1},$$

то, действуя на функцию под знаком нормы $\|\cdot\|_{q_1,1}$ в левой части (23) оператором $V_{2^{n+1}}$ (последовательно как на функцию по каждой из переменных x, y), можно считать следующее. Во-первых, функции $u_i(x)$, $v_i(y)$ являются тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из множества $C^d(2^{n+2})$, и, во-вторых, справедлива оценка

$$\left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_m(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1}. \quad (24)$$

Таким образом, воспользовавшись сначала теоремой B, а затем неравенством (24), можем записать

$$\begin{aligned} \left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} &\ll 2^{nd(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{q_1,1} \\ &\ll 2^{nd(1/q_1-1/2)} \tau_m(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Приняв во внимание соотношение между числами m и n и воспользовавшись леммой A, из (25) находим

$$\begin{aligned} \tau_m(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1} &\gg 2^{-nd(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y) \right\|_{2,1} \\ &\gg 2^{-nd(1/q_1-1/2)} m^{1/2} \asymp 2^{-nd(1/q_1-1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f_3(x) = C_9 2^{-nd(r/d+1-1/p)} V_{2^n}(x), \quad C_9 > 0.$$

Нетрудно убедиться, что при надлежащем выборе постоянной $C_9 > 0$ эта функция принадлежит классу $B_{p,1}^r$. Действительно, поскольку

$$\|V_{2^n}\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

согласно (2) можем записать

$$\begin{aligned} \|V_{2^n}\|_{B_{p,1}^r} &= \sum_s 2^{sr} \|\sigma_s(V_{2^n}, \cdot)\|_p \\ &\leq \sum_{s=0}^{n+1} 2^{sr} \|\sigma_s(V_{2^n}, \cdot)\|_p \ll 2^{(n+1)r} 2^{(n+1)d(1-1/p)} \asymp 2^{nd(r/d+1-1/p)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f_3 \in B_{p,1}^r$.

Таким образом, воспользовавшись (26), будем иметь

$$\begin{aligned}\tau_m(B_{p,1}^r)_{q_1,q_2} &\geq \tau_m(f_3(x-y))_{q_1,q_2} \gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} \tau_m(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1} \\ &\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{-nd(1/q_1-1)} = 2^{-nd(r/d-1/p+1/q_1)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/q_1}.\end{aligned}$$

Оценка снизу величины $\tau_m(B_{p,1}^r)_{q_1,q_2}$ в случае $1 \leq p < 2 < q_1 \leq \infty$ следует из доказанной оценки при $q_1 = 2$.

Для завершения доказательства оценок снизу осталось рассмотреть случаи $2 \leq p \leq q_1 \leq \infty$, $r > d/2$ и $2 \leq q_1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$. Заметим, что при этом достаточно ограничиться рассмотрением случая $q_1 = 2$ и $q_2 = 1$.

Подберем число $n(m) \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялись соотношения $2^{nd} \geq 2m$ и $2^{nd} \asymp m$, и рассмотрим функцию

$$f_4(x) = C_{10} 2^{-nd(r/d+1/2)} R_{2^n}(x), \quad C_{10} > 0,$$

где

$$R_{2^n}(x) = \prod_{j=1}^d \sum_{|l| \leq 2^n} \varepsilon_l e^{ilx_j}, \quad |\varepsilon_l| = 1,$$

– полиномы Рудина–Шапиро, для которых (см., например, [16; с. 155]) имеет место оценка $\|R_{2^n}\|_\infty \ll 2^{(nd)/2}$.

Поскольку

$$\begin{aligned}\|R_{2^n}\|_{B_{p,1}^r} &= \sum_s 2^{sr} \|\sigma_s(R_{2^n}, \cdot)\|_p \asymp \sum_{s=1}^{n+1} 2^{sr} (\|V_{2^s}(R_{2^n}, \cdot)\|_p + \|V_{2^{s-1}}(R_{2^n}, \cdot)\|_p) \\ &\leq \sum_{s=1}^{n+1} 2^{sr} (\|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1) \|R_{2^n}\|_p \ll 2^{(nd)/2} \sum_{s=1}^{n+1} 2^{sr} \ll 2^{n(r+d/2)},\end{aligned}$$

отсюда следует, что при соответствующем выборе постоянной $C_{10} > 0$ функция $f_4(x)$ принадлежит классу $B_{p,1}^r$.

Таким образом, в силу леммы A можем записать

$$\tau_m(R_{2^n}(x-y))_{2,1} \gg m^{1/2},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\tau_m(f_4(x-y))_{2,1} &\gg 2^{-nd(r/d+1/2)} \tau_m(R_{2^n}(x-y))_{2,1} \\ &\gg 2^{-nd(r/d+1/2)} m^{1/2} \asymp m^{-r/d-1/2} m^{1/2} = m^{-r/d}.\end{aligned}$$

Оценки снизу и вместе с ними теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Порядки величин $\tau_m(SH_p^r)_{q_1,q_2}$ для классов функций SH_p^r , близких классам H_p^r , и тех же соотношений между параметрами p , q_1 , q_2 , которые рассмотрены в теореме 4, получены Темляковым [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
- [2] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН СССР, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278.
- [3] П. И. Лизоркин, “Обобщенные гильбертовы пространства $B_{p,\theta}^{(r)}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:5 (1968), 1127–1152.
- [4] А. С. Романюк, “Приближение классов периодических функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 109–121.
- [5] А. С. Романюк, “Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 69–98.
- [6] С. Б. Стечкин, “Об абсолютной сходимости ортогональных рядов”, *Докл. АН СССР*, **102**:1 (1955), 37–40.
- [7] А. С. Романюк, “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100.
- [8] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Nonlinear approximation by trigonometric sums”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **2**:1 (1995), 29–48.
- [9] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [10] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, Тр. МИАН СССР, **178**, 1986, 3–113.
- [11] V. N. Temlyakov, “Greedy algorithm and m -term trigonometric approximation”, *Constr. Approx.*, **14**:4 (1998), 569–587.
- [12] E. Schmidt, “Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen”, *Math. Ann.*, **63**:4 (1907), 433–476.
- [13] В. Н. Темляков, “Билинейная аппроксимация и приложения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 13*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **187**, Наука, М., 1989, 191–215.
- [14] В. Н. Темляков, “Билинейная аппроксимация и близкие вопросы”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 14*, Тр. МИАН СССР, **194**, Наука, М., 1992, 229–248.
- [15] В. Н. Темляков, “Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 11*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **173**, 1986, 243–252.
- [16] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.

А. С. Романюк

Институт математики НАН Украины, г. Киев

 E-mail: romanyuk@imath.kiev.ua

Поступило

13.07.2010

Исправленный вариант

05.07.2012