Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Масутова, Б. А. Омиров, А. Х. Худойбердыев,
Естественным образом градуированные алгебры Лейб-
ница с характеристической последовательностью $(n -$
 $m, m)$, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 746–
763

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:31:49

Естественным образом градуированные алгебры Лейбница с характеристической последовательностью $(n - m, m)$

К. К. Масутова, Б. А. Омиров, А. Х. Худойбердиев

В работе рассматривается задача классификации для некоторых специальных классов нильпотентных алгебр Лейбница. А именно, рассматриваются такие нильпотентные n -мерные алгебры Лейбница, для которых оператор правого умножения (на элемент общего положения) имеет две жордановы клетки размеров m и $n - m$, причем алгебра имеет “естественную” градуировку. Ранее вопрос о классификации таких алгебр исследовался при $m < 4$. Настоящая работа продолжает эти исследования для случая $m \geq 4$.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm8894

1. Введение. Данная статья посвящена изучению алгебр Лейбница, которые являются “не коммутативным” обобщением алгебр Ли. Известно, что понятие алгебры Лейбница было введено в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж. Л. Лоде [1] и определяется тождеством

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Напомним, что изучение конечномерных алгебр Ли сведено к изучению нильпотентных [2], [3]. Методам и подходам исследований нильпотентных алгебр Ли посвящены многочисленные работы [4]–[6] и другие. В связи с этим естественно возникает задача применить эти результаты и методы для исследований алгебр Лейбница. Так как описание даже нильпотентных алгебр Ли представляется необозримой задачей, изучение нильпотентных алгебр Лейбница должно проходить с наложением дополнительных условий, таких как ограничения на индекс нильпотентности алгебры, на характеристическую последовательность, градуировку и другие. Отметим, что классы нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница изучены в работах [7], [8]. Естественным образом градуированные квази-филиформные алгебры Лейбница были рассмотрены в работе [9], а случай естественным образом градуированных p -филиформных алгебр Лейбница – в работе [10].

При изучении естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Лейбница [9] было отмечено, что в отличие от Лиевского случая в алгебрах

Работа второго автора выполнена при поддержке NATO-Reintegration (грант № СВР.ЕАР. RIG.983169).

Лейбница появляется класс n -мерных алгебр, у которых характеристическая последовательность равна $(n - 2, 2)$. Дальнейшее изучение естественным образом градуированных алгебр с характеристической последовательностью, равной $(n - 3, 3)$, показывает, что класс не Лиевых алгебр Лейбница в этом случае является достаточно широким. В настоящей статье мы выделяем заведомо не Лиевы алгебры Лейбница с характеристической последовательностью, равной $(n - m, m)$, и предлагаем описание таких алгебр. Более того, получены выражения изменений параметров в таблице умножения таких алгебр при изоморфизме, которые в дальнейшем могут быть использованы для полной классификации в фиксированной размерности и заданном значении m .

2. Предварительные сведения. В данном пункте мы приводим необходимые сведения и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[\cdot, \cdot]$ — умножение в L .

Для произвольной алгебры Лейбница L определим нижний центральный ряд

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1], \quad k \geq 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной*, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством, называется *индексом nilьпотентности* или *нильиндексом* алгебры L .

Заметим, что индекс nilьпотентности n -мерной nilьпотентной алгебры Лейбница не превышает $n + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть L — алгебра Лейбница размерности n . Алгебру L назовем *нуль-филиформной*, если $\dim L^i = (n + 1) - i$, $1 \leq i \leq n + 1$.

Нетрудно видеть, что определение нуль-филиформности алгебры L эквивалентно тому, что алгебра L имеет максимальный индекс nilьпотентности.

Следующая теорема утверждает, что в каждой размерности с точностью до изоморфизма существует единственная нуль-филиформная алгебра Лейбница.

ТЕОРЕМА 2.4 [7]. В любой n -мерной нуль-филиформной алгебре Лейбница L существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что умножение в алгебре L имеет вид

$$[e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

(отсутствующие произведения равны нулю).

Множество $R(L) = \{x \in L : [y, x] = 0 \text{ для любых } y \in L\}$ будем называть *правым аннулятором* алгебры L .

Пусть L — n -мерная nilьпотентная алгебра Лейбница и пусть x — произвольный элемент из множества $L \setminus [L, L]$. Для nilьпотентного оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора R_x . На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Последовательность $C(L) = \max_{x \in L \setminus L^2} C(x)$ назовем *характеристической последовательностью* алгебры L .

ПРИМЕР 1 [7]. Пусть L – n -мерная алгебра Лейбница. L абелева тогда и только тогда, когда $C(L) = (1, 1, \dots, 1)$.

ПРИМЕР 2 [7]. n -мерная алгебра Лейбница L нуль-филиформная тогда и только тогда, когда $C(L) = (n)$.

Определим понятие естественным образом градуированной алгебры.

Пусть L – конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $\text{gr}(L)_i := L^i / L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, где s – нильиндекс алгебры L , и обозначим $\text{gr } L = \text{gr}(L)_1 \oplus \text{gr}(L)_2 \oplus \dots \oplus \text{gr}(L)_{s-1}$. В силу того, что $[\text{gr}(L)_i, \text{gr}(L)_j] \subseteq \text{gr}(L)_{i+j}$, мы получим градуированную алгебру $\text{gr } L$. Градуировку, построенную таким образом, мы назовем *естественной градуировкой*. Если алгебра Лейбница G изоморфна алгебре $\text{gr } L$, то G называется *естественным образом градуированной алгеброй Лейбница*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Алгебра L называется *разложимой*, если существуют подалгебры M и N алгебры L такие, что $L = M \oplus N$ и $[M, N] = [N, M] = 0$.

3. Описание естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$, $m \geq 4$. Учитывая результаты работ [9], [10], в дальнейшем будем рассматривать n -мерные естественным образом градуированные алгебры Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$ при $m \geq 4$.

Из определения характеристической последовательности алгебры Лейбница вытекает существование такого базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}, f_1, \dots, f_m\}$, что матрица оператора правого умножения R_{e_1} имеет один из следующих двух видов:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \begin{pmatrix} J_{n-m} & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix}, \\ \text{II)} \quad & \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & J_{n-m} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad \text{где } n-m \geq m.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Алгебра Лейбница L называется *алгеброй типа I*, если существует элемент $e_1 \in L \setminus L^2$ такой, что оператор правого умножения R_{e_1} имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} J_{n-m} & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix};$$

если R_{e_1} имеет матрицу второго вида, то L называется *алгеброй типа II*.

Пусть M, N – нуль-филиформные алгебры Лейбница, $\dim M = n-m$, $\dim N = m$. Следовательно, $C(M) = (n-m)$, $C(N) = (m)$. Нетрудно показать, что разложимая алгебра $L = M \oplus N$ имеет характеристическую последовательность $C(L) = (n-m, m)$. В следующей теореме доказано, что разложимые алгебры Лейбница с характеристической последовательностью, равной $C(L) = (n-m, m)$, состоят только из прямой суммы двух нуль-филиформных алгебр Лейбница.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть L – алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$. L разложима тогда и только тогда, когда M и N – нуль-филиформные алгебры Лейбница с $\dim M = n - m$, $\dim N = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть L – разложимая алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n - m, m)$, т.е. существуют подалгебры M и N алгебры L такие, что $L = M \oplus N$ и $[M, N] = [N, M] = 0$. Тогда существует элемент $a \in L$ такой, что $a = x + y$, $x \in M$, $y \in N$, и матрица оператора правого умножения R_a имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{n-m} & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, существуют базисы $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}\} \subseteq M$, $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq N$ такие, что $ae_i = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - m - 1$, и $af_i = f_{i+1}$, $1 \leq i \leq m - 1$. Откуда следует, что

$$xe_i = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - m - 1, \quad yf_i = f_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m - 1.$$

Тогда матрица сужения оператора правого умножения на M (соответственно N) имеет вид (J_{n-m}) (соответственно (J_m)). Таким образом, из примера 2 следует, что M и N – нуль-филиформные алгебры.

Достаточность. Пусть M, N – нуль-филиформные алгебры Лейбница с $\dim M = n - m$, $\dim N = m$. Тогда существуют базисы $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}\}$, $\{f_1, \dots, f_m\}$ в M и N соответственно такие, что

$$\begin{aligned} e_i e_1 &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n - m - 1, \\ f_i f_1 &= f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m - 1. \end{aligned}$$

Возьмем элемент $a = e_1 + f_1 \in L = M \oplus N$. Рассмотрим

$$R_a(x) = [x, a] = [x, e_1 + f_1] = [x, e_1] + [x, f_1] = R_{e_1}(x) + R_{f_1}(x).$$

Очевидно, что $R_a(e_i) = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - m - 1$, и $R_a(f_i) = f_{i+1}$, $1 \leq i \leq m - 1$. Тогда матрица оператора R_a имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{n-m} & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix};$$

следовательно, $C(a) = (n - m, m)$.

Предположим, что существует $y \in L \setminus L^2$: $C(y) > C(a) = (n - m, m)$. Тогда $C(y) = (k_1, \dots, k_s)$ такая, что $k_1 > n - m$. Следовательно, существует $z \in L$:

$$[\dots \underbrace{[z, y], y], \dots, y]}_{k_1 \text{ раз}} \neq 0.$$

Так как нильиндекс L равен $n - m$, т.е. $L^{n-m} = \{0\}$, то $k_1 \leq n - m$ – противоречие. Если же $C(y) = (n - m, k_2, \dots, k_s)$, где $\sum_{p=2}^s k_p = m$, то $k_2 > m$ – противоречие. Следовательно, $C(L) = (n - m, m)$.

Теорема 3.2 дает нам классификацию естественным образом градуированных разложимых алгебр Лейбница с характеристической последовательностью, равной $(n - m, m)$, $m \geq 4$. В дальнейшем будем рассматривать неразложимые алгебры Лейбница и для удобства вместо произведения $[a, b]$ будем писать ab .

Пусть L – n -мерная неразложимая естественным образом градуированная алгебра Лейбница над полем F . Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n$.

Введем отображения $A_{i,j}, B_{i,j}: F^n \rightarrow F$ следующим образом:

$$A_{i,j}(x) = \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^l C_{j-1}^l x_{l+i}, \quad 2 \leq i+j \leq n,$$

$$B_{i,j}(x) = \sum_{l=0}^{m-i} (-1)^l C_{j-1}^l x_{l+i}, \quad 2 \leq i+j \leq n.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. Для произвольных $i, j \in \mathbb{N}$ верны следующие равенства:

$$A_{i,j}(x) - A_{i+1,j}(x) = A_{i,j+1}(x),$$

$$B_{i,j}(x) - B_{i+1,j}(x) = B_{i,j+1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по индукции и с использованием факта $C_{j-1}^l + C_{j-1}^{l-1} = C_j^l$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть L – алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n - m, m)$ типа I. Тогда существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}, f_1, \dots, f_m\}$ алгебры L , в котором таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} e_i e_1 &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n - m - 1, \\ f_i e_1 &= f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m - 1, \\ e_i f_j &= A_{i,j}(\alpha) e_{i+j} + A_{i,j}(\beta) f_{i+j}, & 1 \leq i \leq m - j, \\ f_i f_j &= A_{i,j}(\gamma) e_{i+j} + A_{i,j}(\delta) f_{i+j}, & 1 \leq i \leq m - j, \\ e_i f_j &= A_{i,j}(\alpha) e_{i+j}, & m - j + 1 \leq i \leq n - m - j, \\ f_i f_j &= B_{i,j}(\gamma) e_{i+j}, & m - j + 1 \leq i \leq \min\{m, n - m - j\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

(остальные произведения равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия

$$R_{e_1} = \begin{pmatrix} J_{n-m} & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix},$$

где $n - m \geq m$, следует, что существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}, f_1, \dots, f_m\}$ такой, что:

$$\begin{aligned} e_i e_1 &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n - m - 1, & & e_{n-m} e_1 &= 0, \\ f_i e_1 &= f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m - 1, & & f_m e_1 &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} L_i &= \langle e_i, f_i \rangle & \text{при} & & 1 \leq i \leq m, \\ L_i &= \langle e_i \rangle & \text{при} & & m+1 \leq i \leq n-m, \\ & & & & \langle e_2, \dots, e_{n-m} \rangle \in R(L). \end{aligned}$$

Рассмотрим умножение в L на элемент f_1 справа. Пусть

$$\begin{aligned} e_i f_1 &= \alpha_i e_{i+1} + \beta_i f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ e_i f_1 &= \alpha_i e_{i+1}, & m \leq i \leq n-m-1, \\ e_{n-m} f_1 &= 0, \\ f_i f_1 &= \gamma_i e_{i+1} + \delta_i f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ f_m f_1 &= \gamma_m e_{m+1}. \end{aligned}$$

Применяя тождество Лейбница для произведений

$$e_i f_j, \quad 1 \leq i \leq n-m, \quad \text{и} \quad f_i f_j, \quad 1 \leq i \leq m,$$

индукцией по j при любом значении i получим умножения справа на элемент f_j , $2 \leq j \leq m$.

Для $j = 2$ рассмотрим всевозможные значения i и получим следующие произведения:

- $1 \leq i \leq m-2$

$$\begin{aligned} e_i f_2 &= e_i(f_1 e_1) = (e_i f_1) e_1 - e_{i+1} f_1 = \alpha_i e_{i+2} + \beta_i f_{i+2} - (\alpha_{i+1} e_{i+2} + \beta_{i+1} f_{i+2}) \\ &= (\alpha_i - \alpha_{i+1}) e_{i+2} + (\beta_i - \beta_{i+1}) f_{i+2}; \end{aligned}$$

- $i = m-1$

$$\begin{aligned} e_{m-1} f_2 &= e_{m-1}(f_1 e_1) = (e_{m-1} f_1) e_1 - e_m f_1 \\ &= (\alpha_{m-1} e_m + \beta_{m-1} f_m) e_1 - \alpha_m e_{m+1} = (\alpha_{m-1} - \alpha_m) e_{m+1}. \end{aligned}$$

- $m \leq i \leq n-m-2$

$$e_i f_2 = e_i(f_1 e_1) = (e_i f_1) e_1 - e_{i+1} f_1 = \alpha_i e_{i+2} - \alpha_{i+1} e_{i+2} = (\alpha_i - \alpha_{i+1}) e_{i+2};$$

- $i = n-m-1$ или $i = n-m$

$$e_i f_2 = 0;$$

- $1 \leq i \leq m-2$

$$\begin{aligned} f_i f_2 &= f_i(f_1 e_1) = (f_i f_1) e_1 - f_{i+1} f_1 = \gamma_i e_{i+2} + \delta_i f_{i+2} - (\gamma_{i+1} e_{i+2} + \delta_{i+1} f_{i+2}) \\ &= (\gamma_i - \gamma_{i+1}) e_{i+2} + (\delta_i - \delta_{i+1}) f_{i+2}. \end{aligned}$$

- $i = m-1$

$$\begin{aligned} f_{m-1} f_2 &= f_{m-1}(f_1 e_1) = (f_{m-1} f_1) e_1 - f_m f_1 \\ &= (\gamma_{m-1} e_m + \delta_{m-1} f_m) e_1 - \gamma_m e_{m+1} = (\gamma_{m-1} - \gamma_m) e_{m+1}. \end{aligned}$$

- $i = m$

$$f_m f_2 = f_m(f_1 e_1) = (f_m f_1) e_1 - (f_m e_1) f_1 = \gamma_m e_{m+2}.$$

Таким образом, равенства (3.1) верны для $j = 2$.

Предположим, что равенства (3.1) верны для $j = q$ и докажем для $j = q + 1$.

Из тождества Лейбница следует, что

$$e_i f_{q+1} = e_i(f_q e_1) = (e_i f_q) e_1 - e_{i+1} f_q, \quad f_i f_{q+1} = f_i(f_q e_1) = (f_i f_q) e_1 - f_{i+1} f_q.$$

Используя лемму 3.3, при рассмотрении всех i получаем

- $1 \leq i \leq m - q - 1$

$$e_i f_{q+1} = A_{i,q+1}(\alpha) e_{i+q+1} + A_{i,q+1}(\beta) f_{i+q+1};$$

- $i = m - q$

$$e_{m-q} f_{q+1} = A_{m-q,q+1}(\alpha) e_{m+1};$$

- $m - q + 1 \leq i \leq n - m - q - 1$

$$e_i f_{q+1} = A_{i,q+1}(\alpha) e_{i+q+1};$$

- $i = n - m - q$

$$e_{n-m-q} f_{q+1} = A_{n-m-q,q}(\alpha) e_{n-m} e_1 = 0;$$

- $n - m - q + 1 \leq i \leq n - m$

$$e_i f_{q+1} = 0.$$

Аналогично, для произведений вида $f_i f_j$ получим

- $1 \leq i \leq m - q - 1$

$$f_i f_{q+1} = A_{i,q+1}(\gamma) e_{i+q+1} + A_{i,q+1}(\delta) f_{i+q+1};$$

- $i = m - q$

$$f_{m-q} f_{q+1} = B_{m-q,q+1}(\gamma) e_{m+1};$$

- $m - q + 1 \leq i \leq \min\{n - m - q - 1, m\}$

$$f_i f_{q+1} = B_{i,q+1}(\gamma) e_{i+q+1}.$$

Таким образом, из теоремы 3.4 получаем набор структурных констант, определяющих таблицу умножения алгебры:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{n-m-1},$$

$$\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{m-1},$$

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m,$$

$$\delta_1, \dots, \delta_{k-1}, \delta_k, \delta_{k+1}, \dots, \delta_{m-1}.$$

Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, $1 \leq k \leq m - 1$, где k – фиксированное число. Тогда для различных k получаем непересекающиеся классы. Действительно, размерности правых аннуляторов алгебр из этих классов будут отличаться.

Приведем следующие вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3.5 [11]. Для произвольного многочлена P степени меньше n имеет место следующее равенство:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i P(i) = 0.$$

ЛЕММА 3.6 [11]. Для произвольных $a, n \in \mathbb{N}$ имеет место следующее тождество:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_a^k C_{a+(n-k)-1}^{n-k} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть L – алгебра Лейбница типа I. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, $1 \leq k \leq m-1$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -1, & \beta_i &= 0, & 2 \leq i \leq k-1, \\ \beta_{k+t} &= C_{k+t-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_{k+t-2}^{k-1}, & 1 \leq t \leq m-k-1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\beta = \beta_k$ – фиксированное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, $1 \leq k \leq m-1$. Очевидно, что $f_i e_1 + e_1 f_i \in R(L)$, $1 \leq i \leq k-1$. Так как

$$f_i e_1 + e_1 f_i = f_{i+1} + A_{1,i}(\alpha) e_{i+1} + A_{1,i}(\beta) f_{i+1}$$

и $\langle e_2, \dots, e_{n-m} \rangle \in R(L)$, получаем, что $1 + A_{1,i}(\beta) = 0$.

При $i = 1$ имеем $1 + A_{1,1}(\beta) = 1 + \beta_1 = 0$ и, следовательно, $\beta_1 = -1$.

При $i > 1$ из равенства

$$1 + A_{1,i}(\beta) = 1 + \beta_1 + \sum_{l=1}^{i-1} (-1)^l C_{i-1}^l \beta_{l+1}$$

имеем

$$\sum_{l=1}^{i-1} (-1)^l C_{i-1}^l \beta_{l+1} = 0, \quad i > 2.$$

Откуда следует, что

$$\beta_i = (-1)^i \sum_{l=1}^{i-2} (-1)^l C_{i-1}^l \beta_{l+1}, \quad i > 2.$$

Из полученного соотношения индукцией по i покажем, что $\beta_i = 0$ для любых $2 \leq i \leq k-1$. Действительно, при $i = 2$ имеем $\beta_2 = 0$, а при $i = 3$ из равенства $-2\beta_2 + \beta_3 = 0$ следует, что $\beta_3 = 0$.

Предположим, что $\beta_i = 0$ для $i = q < k-1$. Тогда из

$$\sum_{l=1}^q (-1)^l C_q^l \beta_{l+1} = \sum_{l=1}^{q-1} (-1)^l C_q^l \beta_{l+1} + (-1)^q \beta_{q+1} = 0$$

следует, что $\beta_{q+1} = 0$.

Таким образом, получили $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \dots, \beta_{k-1} = 0$.

Теперь рассмотрим произведения $e_i f_{k+1}, 1 \leq i \leq m - k - 1$.

Из условия $f_{k+1} \in R(L)$ следует $e_1 f_{k+1} = 0$ и $A_{1,k+1}(\alpha) e_{k+2} + A_{1,k+1}(\beta) f_{k+2} = 0$.

Поэтому

$$\begin{cases} A_{1,k+1}(\alpha) = 0, \\ A_{1,k+1}(\beta) = 0. \end{cases}$$

Так как

$$A_{1,k+1}(\beta) = \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \beta_{l+1} = \beta_1 + 0 + \dots + 0 + (-1)^{k-1} k \beta_k + (-1)^k \beta_{k+1},$$

то $\beta_{k+1} = k\beta + (-1)^k$.

Аналогично, рассматривая произведения вида $e_i f_{k+1}, 2 \leq i \leq m - k - 1$, имеем $A_{i,k+1}(\beta) = 0$. Докажем по индукции следующую зависимость:

$$\beta_{k+t} = C_{k+t-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_{k+t-2}^{k-1}, \quad 1 \leq t \leq m - k - 1.$$

Основание индукции нами было получено ранее. Из условия

$$A_{i,k+1}(\beta) = \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \beta_{l+i}$$

следует, что

$$\beta_{k+i} = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_k^l \beta_{l+i}, \quad 2 \leq i \leq m - k - 1.$$

Предположим, что равенство $\beta_{k+i} = C_{k+i-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_{k+i-2}^{k-1}$ верно для любых $1 \leq i \leq q - 1$ ($2 \leq q \leq m - k - 1$), и докажем для $i = q$. Из равенства $A_{i,k+1}(\beta) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \beta_{l+q} &= \sum_{l=0}^{k-q-1} (-1)^l C_k^l \beta_{l+q} + (-1)^{k-q} C_k^{k-q} \beta_k \\ &+ \sum_{l=k-q+1}^{k-1} (-1)^l C_k^l \beta_{l+q} + (-1)^k \beta_{k+q} = 0. \end{aligned}$$

Из равенства $A_{i,k+1}(\beta) = 0$ получаем

$$\sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \beta_{l+q} = (-1)^{k-q} C_k^{k-q} \beta + \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^{l+k} C_k^{l+k} \beta_{k+(l+q)} + (-1)^k \beta_{k+q} = 0.$$

Используя лемму 3.6 в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} \beta_{k+q} &= (-1)^{k+1} \left[(-1)^{k-q} C_k^{k-q} \beta + (-1)^k \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^l C_k^{l+k} (C_{k+l+q-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_{k+l+q-2}^{k-1}) \right] \\ &= (-1)^{1-q} C_k^{k-q} \beta - \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^l (C_k^{k+l} C_{k+l+q-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_k^{k+l} C_{k+l+q-2}^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1-q} C_k^{k-q} \beta - \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^l C_k^{k+l} C_{k+l+q-1}^{k-1} \beta - (-1)^k \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^l C_k^{k+l} C_{k+l+q-2}^{k-1} \\
&= -\beta \sum_{l=-q}^{-1} (-1)^l C_k^{k+l} C_{k+l+q-1}^{k-1} - (-1)^k \sum_{l=1-q}^{-1} (-1)^l C_k^{k+l} C_{k+l+q-2}^{k-1} \\
&= -\beta \sum_{l=1}^q (-1)^l C_k^{k-l} C_{k-l+q-1}^{k-1} - (-1)^k \sum_{l=1}^{q-1} (-1)^l C_k^{k-l} C_{k-l+q-2}^{k-1} \\
&= \beta C_{k+q-1}^{k-1} - \beta \sum_{l=0}^q (-1)^l C_k^l C_{k-l+q-1}^{k-1} + (-1)^k C_{k+q-2}^{k-1} - (-1)^k \sum_{l=0}^{q-1} (-1)^l C_k^l C_{k-l+q-2}^{k-1} \\
&= \beta C_{k+q-1}^{k-1} + (-1)^k C_{k+q-2}^{k-1},
\end{aligned}$$

получим $\beta_{k+q} = \beta C_{k+q-1}^{k-1} + (-1)^k C_{k+q-2}^{k-1}$. Значит, для $i = q$ формула (3.2) также верна.

Теорема 3.7 показывает, что константы $\beta_{k+1}, \dots, \beta_{m-1}$ выражаются через β_k . В последующих теоремах показано, что константы $\alpha_i, \gamma_i, \delta_i, i \geq k+1$, также линейно выражаются через $\alpha_i, \gamma_i, \delta_i, 1 \leq i \leq k$.

Приведем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3.8. Для произвольных $i, k, l \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$C_{k+i}^l - \sum_{p=0}^{i-1} (-1)^p C_{k+i}^{k+p} C_{k+p}^l C_{k-l+p-1}^{k-l-1} = (-1)^i C_{k+i}^l C_{k-l+i-1}^{k-l-1}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по индукции и с использованием леммы 3.6.

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть L – алгебра Лейбница типа I. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, $1 \leq k \leq m-1$. Тогда

$$\alpha_{k+t} = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \alpha_{l+1}, \quad 1 \leq t \leq m-k-1. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что $e_1 f_{k+t} = 0$ при $1 \leq t \leq m-k-1$. Тогда

$$A_{1,k+t}(\alpha) = \sum_{l=0}^{k+t-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l \alpha_{l+1} = 0,$$

откуда имеем

$$\alpha_{k+t} = (-1)^{k+t} \sum_{l=0}^{k+t-2} (-1)^l C_{k+t-1}^l \alpha_{l+1}, \quad 1 \leq t \leq m-k-1.$$

Используя полученные соотношения, индуктивно докажем равенства (3.4).

При $t = 1$ очевидно, что

$$\alpha_{k+1} = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_k^l \alpha_{l+1}.$$

Пусть для $t \leq q < m - k - 1$ верны равенства (3.4), докажем для $t = q + 1$.

В силу соотношений

$$\begin{aligned}\alpha_{k+t} &= (-1)^{k+t} \sum_{l=0}^{k+t-2} (-1)^l C_{k+t-1}^l \alpha_{l+1}, \\ \alpha_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \alpha_{l+1}, \quad t \leq q,\end{aligned}$$

и равенства (3.3) из цепочки равенств

$$\begin{aligned}\alpha_{k+q+1} &= (-1)^{k+q+1} \sum_{l=0}^{k+q-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} \\ &= (-1)^{k+q+1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} + \sum_{l=k}^{k+q-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} \right) \\ &= (-1)^{k+q+1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} + \sum_{l=0}^{q-1} (-1)^{l+k} C_{k+q}^{l+k} \alpha_{l+k+1} \right) \\ &= (-1)^{k+q+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} \\ &\quad + (-1)^{k+q+1} \sum_{l=0}^{q-1} (-1)^{l+k} C_{k+q}^{k+l} \left((-1)^{k+1} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p C_{k+l}^p C_{k-p+l-1}^{k-p-1} \alpha_{p+1} \right) \\ &= (-1)^{k+q+1} \left[\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+q}^l \alpha_{l+1} - \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p C_{k+q}^{k+p} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+p}^l C_{k-l+p-1}^{k-l-1} \alpha_{l+1} \right] \\ &= (-1)^{k+q+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left[C_{k+q}^l - \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p C_{k+q}^{k+p} C_{k+p}^l C_{k-l+p-1}^{k-l-1} \right] \alpha_{l+1} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+q}^l C_{k-l+q-1}^{k-l-1} \alpha_{l+1}\end{aligned}$$

заключаем, что для $t = q + 1$ равенства (3.4) имеют место; таким образом, доказана теорема 3.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Из теоремы 3.9 мы получили зависимость структурных констант $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{m-1}$ через $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. В случае $n - m > m$ параметры $\alpha_m, \dots, \alpha_{n-m-1}$ находятся при рассмотрении равенств $e_i f_{k+t} = 0$ при $1 \leq i \leq n - 2m$, $1 \leq t \leq m - k$. Таким образом, соотношения (3.4) продолжают до случая $m - k \leq t \leq n - m - k - 1$, т.е.

$$\alpha_{k+t} = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \alpha_{l+1}, \quad 1 \leq t \leq n - m - k - 1.$$

Рассмотрев тождества $f_1 f_{k+t} = 0$, $1 \leq t \leq m - k$, аналогично теореме 3.9 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть L – алгебра Лейбница типа I. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, $1 \leq k \leq m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \gamma_{l+1}, & 1 \leq t \leq m-k, \\ \delta_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \delta_{l+1}, & 1 \leq t \leq m-k-1.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Из теоремы 3.11 имеем зависимость δ_{k+t} через константы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$. Рассмотрев условие $f_i f_1 + f_1 f_i \in R(L)$, $1 \leq i \leq m$, нетрудно видеть, что все нечетные δ_i линейно выражаются через четные, т.е. число свободных параметров уменьшается в два раза.

Пусть L – естественным образом градуированная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$ типа II.

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть L – алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$ типа II. Тогда в L существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, \dots, f_{n-m}\}$ такой, что умножение в алгебре имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}e_i e_1 &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ f_i e_1 &= f_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-m-1, \\ e_i f_j &= A_{i,j}(\alpha) e_{i+j} + A_{i,j}(\beta) f_{i+j}, & 1 \leq i \leq m-j, \\ f_i f_j &= A_{i,j}(\gamma) e_{i+j} + A_{i,j}(\delta) f_{i+j}, & 1 \leq i \leq m-j, \\ e_i f_j &= B_{i,j}(\beta) f_{i+j}, & m-j+1 \leq i \leq \min\{m, n-m-j\}, \\ f_i f_j &= A_{i,j}(\delta) f_{i+j}, & m-j+1 \leq i \leq n-m-j\end{aligned} \quad (3.5)$$

(остальные произведения равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывается аналогично теореме 3.4.

Таким образом, мы получили набор структурных констант, задающих алгебру:

$$\begin{aligned}\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{m-1}, \\ \beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m, \\ \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{m-1}, \\ \delta_1, \dots, \delta_{k-1}, \delta_k, \delta_{k+1}, \dots, \delta_{m-1}, \\ \delta_m, \delta_{m+1}, \dots, \delta_{n-m-1}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть L – алгебра Лейбница типа II. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $1 \leq k \leq m-1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -1, & \beta_i &= 0, & 2 \leq i \leq k-1, \\ \beta_{k+t} &= C_{k+t-1}^{k-1} \beta + (-1)^k C_{k+t-2}^{k-1}, & 1 \leq t \leq m-k,\end{aligned}$$

где $\beta = \beta_k$ – фиксированное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3.7.

Применяя такие же рассуждения, как для типа I, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть L – алгебра Лейбница типа II. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $1 \leq k \leq m-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \alpha_{l+1}, & 1 \leq t \leq m-k-1, \\ \gamma_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \gamma_{l+1}, & 1 \leq t \leq m-k-1, \\ \delta_{k+t} &= (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \delta_{l+1}, & 1 \leq t \leq m-k.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. В случае, если $m \leq k \leq n-m-1$, все фиксированные константы α_i , γ_i , $1 \leq i \leq m-1$, и β_i , $1 \leq i \leq m$, остаются как параметры. Поэтому достаточно найти зависимость только для δ_i , $k+1 \leq i \leq n-m-1$, через δ_i , $1 \leq i \leq k$. В теореме 3.14 δ_{k+t} , $1 \leq t \leq m-k$, линейно выражаются через $\delta_1, \dots, \delta_k$ при $1 \leq k \leq m-1$. Мы можем продолжить соотношение для δ_{k+t} из теоремы 3.14 в границах $1 \leq k \leq n-m-1$. Таким образом, получим

$$\delta_{k+t} = (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_{k+t-1}^l C_{k-l+t-2}^{k-l-1} \delta_{l+1}, \quad 1 \leq t \leq n-m-k-1.$$

Более того, как и в замечании 3.12 заключаем, что нечетные δ_i выражаются через четные.

4. О преобразованиях естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$, $m \geq 4$. Пусть L – n -мерная естественным образом градуированная алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $C(L) = (n-m, m)$, $m \geq 4$ типа I и $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-m}, f_1, \dots, f_m\}$ – базис в L . Тогда из теоремы 3.4 заключаем, что умножение в L определяется равенствами (3.1). Таким образом, задача классификации сводится к задаче нахождения структурных констант α_i , β_i , γ_i и δ_i для $1 \leq i \leq k$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть L – алгебра Лейбница типа I и пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $1 \leq k \leq m-1$. Тогда $e'_i = A_i e_i + B_i f_i$, $f'_i = C_i e_i + D_i f_i$, $2 \leq i \leq k$, где

$$\begin{aligned}A_2 &= A_1^2 + A_1 B_1 \alpha_1 + B_1^2 \gamma_1, & B_2 &= B_1^2 \delta_1, \\ C_2 &= A_1 C_1 + B_1 C_1 \alpha_1 + B_1 D_1 \gamma_1, & D_2 &= A_1 D_1 - B_1 C_1 + B_1 D_1 \delta_1, \\ A_i &= A_{i-1}(A_1 + B_1 \alpha_{i-1}) + B_{i-1} B_1 \gamma_{i-1}, \\ B_i &= B_{i-1}(A_1 + B_1 \delta_{i-1}) = B_1 \prod_{l=1}^{i-2} (A_1 + B_1 \delta_{l+1}), \\ C_i &= C_{i-1}(A_1 + B_1 \alpha_{i-1}) + D_{i-1} B_1 \gamma_{i-1}, \\ D_i &= D_{i-1}(A_1 + B_1 \delta_{i-1}) = D_1 \prod_{l=1}^{i-2} (A_1 + B_1 \delta_{l+1}).\end{aligned} \tag{4.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим общую замену базисных элементов. Известно, что для естественным образом градуированных алгебр Лейбница достаточно рассмотреть замену в виде

$$e'_1 = A_1 e_1 + B_1 f_1, \quad f'_1 = C_1 e_1 + D_1 f_1.$$

Доказательство утверждения завершается применением произведений $e'_i e'_1 = e'_{i+1}$ и $f'_i f'_1 = f'_{i+1}$.

При общей замене базисных элементов появляются новые константы $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$, которые необходимо выразить через первоначальные $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть L – алгебра Лейбница типа I и пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $1 \leq k \leq m-1$. Тогда при общей замене базиса параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $1 \leq i \leq k$, примут вид

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= \frac{(A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))D_{i+1} - B_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ \beta'_i &= \frac{A_{i+1}B_i(C_1 + \delta_i D_1) - (A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ \gamma'_i &= \frac{(C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))D_{i+1} - D_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ \delta'_i &= \frac{A_{i+1}D_i(C_1 + \delta_i D_1) - (C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ \alpha'_k &= \frac{(A_k C_1 + D_1(\alpha_k A_k + \gamma_k B_k))(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - (B_k C_1 + D_1(\beta_k A_k + \delta_k B_k))C_{k+1}}{A_{k+1}D_{k+1} - B_{k+1}C_{k+1} + \beta_k B_1(A_{k+1}C_k - A_k C_{k+1})}, \\ \beta'_k &= \frac{A_{k+1}(C_1 C_k + D_1(\beta_k A_k + \delta_k B_k)) - (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)(A_k C_1 + D_1(\alpha_k A_k + \gamma_k B_k))}{A_{k+1}D_{k+1} - B_{k+1}C_{k+1} + \beta_k B_1(A_{k+1}C_k - A_k C_{k+1})}, \\ \gamma'_k &= \frac{(C_1 C_k + D_1(\alpha_k C_k + \gamma_k D_k))(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - (C_1 D_k + D_1(\beta_k C_k + \delta_k D_k))C_{k+1}}{A_{k+1}D_{k+1} - B_{k+1}C_{k+1} + \beta_k B_1(A_{k+1}C_k - A_k C_{k+1})}, \\ \delta'_k &= \frac{A_{k+1}(C_1 D_k + D_1(\beta_k C_k + \delta_k D_k)) - (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)(C_k C_1 + D_1(\alpha_k C_k + \gamma_k D_k))}{A_{k+1}D_{k+1} - B_{k+1}C_{k+1} + \beta_k B_1(A_{k+1}C_k - A_k C_{k+1})}, \end{aligned}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i удовлетворяют равенствам (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что

$$\begin{aligned} e_i &= A_i e_i + B_i f_i, & 1 \leq i \leq k, \\ f_i &= C_i e_i + D_i f_i, & 1 \leq i \leq k, \end{aligned}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i определяются тождествами (4.1).

При $1 \leq i \leq k-1$ имеем

$$\begin{aligned} e'_i f'_1 &= (A_i e_i + B_i f_i)(C_1 e_1 + D_1 f_1) \\ &= (A_i C_1 + \alpha_i A_i D_1 + \gamma_i B_i D_1)e_{i+1} + (B_i C_1 + \beta_i A_i D_1 + \delta_i B_i D_1)f_{i+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$e'_i f'_1 = \alpha'_i e'_{i+1} + \beta'_i f'_{i+1} = \alpha'_i (A_{i+1} e_{i+1} + B_{i+1} f_{i+1}) + \beta'_i (C_{i+1} e_{i+1} + D_{i+1} f_{i+1}).$$

Таким образом, получаем систему равенств

$$\begin{aligned} A_{i+1}\alpha'_i + C_{i+1}\beta'_i &= A_i C_1 + \alpha_i A_i D_1 + \gamma_i B_i D_1, \\ B_{i+1}\alpha'_i + D_{i+1}\beta'_i &= B_i C_1 + \beta_i A_i D_1 + \delta_i B_i D_1, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= \frac{(A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))D_{i+1} - (B_i C_1 + D_1(\beta_i A_i + \delta_i B_i))C_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, \\ \beta'_i &= \frac{(B_i C_1 + D_1(\beta_i A_i + \delta_i B_i))A_{i+1} - (A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}. \end{aligned}$$

Аналогично, рассмотрев равенства

$$\begin{aligned} f'_i f'_1 &= (C_i e_i + D_i f_i)(C_1 e_1 + D_1 f_1) \\ &= (C_i C_1 + \alpha_i C_i D_1 + \gamma_i D_i D_1)e_{i+1} + (D_i C_1 + \beta_i C_i D_1 + \delta_i D_i D_1)f_{i+1}, \\ f'_i f'_1 &= \gamma'_i e'_{i+1} + \delta'_i f'_{i+1} = \gamma'_i (A_{i+1}e_{i+1} + B_{i+1}f_{i+1}) + \delta'_i (C_{i+1}e_{i+1} + D_{i+1}f_{i+1}), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} A_{i+1}\gamma'_i + C_{i+1}\delta'_i &= C_i C_1 + \alpha_i C_i D_1 + \gamma_i D_i D_1, \\ B_{i+1}\gamma'_i + D_{i+1}\delta'_i &= D_i C_1 + \beta_i C_i D_1 + \delta_i D_i D_1 \\ \gamma'_i &= \frac{(C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))D_{i+1} - (D_i C_1 + D_1(\beta_i C_i + \delta_i D_i))C_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, \\ \delta'_i &= \frac{(D_i C_1 + D_1(\beta_i C_i + \delta_i D_i))A_{i+1} - (C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}. \end{aligned}$$

Для $i = k$ также верны соотношения

$$\begin{aligned} e'_k &= A_k e_k + B_k f_k, \\ f'_k &= C_k e_k + D_k f_k. \end{aligned}$$

Применив тождество Лейбница для e'_{k+1} , f'_{k+1} , найдем константы α'_k , β'_k , γ'_k , δ'_k :

$$\begin{aligned} e'_{k+1} &= e'_k e'_1 = A_{k+1}e_{k+1} + (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)f_{k+1}, \\ f'_{k+1} &= f'_k e'_1 = C_{k+1}e_{k+1} + (D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k)f_{k+1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$e'_k f'_1 = (A_k C_1 + \alpha_k A_k D_1 + \gamma_k B_k D_1)e_{k+1} + (B_k C_1 + \beta_k A_k D_1 + \delta_k B_k D_1)f_{k+1}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} e'_k f'_1 &= \alpha'_k e'_{k+1} + \beta'_k f'_{k+1} = \alpha'_k (A_{k+1}e_{k+1} + (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)f_{k+1}) \\ &\quad + \beta'_k (C_{k+1}e_{k+1} + (D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k)f_{k+1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_{k+1}\alpha'_k + C_{k+1}\beta'_k = A_k C_1 + \alpha_k A_k D_1 + \gamma_k B_k D_1,$$

$$(B_{k+1} + \beta_k A_k B_1) \alpha'_k + (D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) \beta'_k = B_k C_1 + \beta_k A_k D_1 + \delta_k B_k D_1,$$

откуда получаем

$$\alpha'_k = \frac{(A_k C_1 + D_1(\alpha_k A_k + \gamma_k B_k))(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - (B_k C_1 + D_1(\beta_k A_k + \delta_k B_k))C_{k+1}}{A_{k+1}(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - C_{k+1}(B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)},$$

$$\beta'_k = \frac{A_{k+1}(B_k C_1 + D_1(\beta_k A_k + \delta_k B_k)) - (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)(A_k C_1 + D_1(\alpha_k A_k + \gamma_k B_k))}{A_{k+1}(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - C_{k+1}(B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)}.$$

Аналогично, рассмотрев произведение $f'_k f'_1$, получаем следующие тождества:

$$\gamma'_k = \frac{(C_1 C_k + D_1(\alpha_k C_k + \gamma_k D_k))(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - (C_1 D_k + D_1(\beta_k C_k + \delta_k D_k))C_{k+1}}{A_{k+1}(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - C_{k+1}(B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)},$$

$$\delta'_k = \frac{A_{k+1}(C_1 D_k + D_1(\beta_k C_k + \delta_k D_k)) - (B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)(C_k C_1 + D_1(\alpha_k C_k + \gamma_k D_k))}{A_{k+1}(D_{k+1} + \beta_k B_1 C_k) - C_{k+1}(B_{k+1} + \beta_k A_k B_1)}.$$

Применяя рассуждения для алгебр Лейбница типа II как и для типа I, мы получим следующие результаты.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Пусть L – алгебра Лейбница типа II. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $m \leq k \leq n - m - 1$. Тогда при общей замене базиса получаем зависимость

$$\begin{aligned} e'_i &= A_i e_i + B_i f_i, & 1 \leq i \leq m, \\ f'_i &= C_i e_i + D_i f_i, & 1 \leq i \leq m, \\ f'_{m+1} &= (\beta_m B_1 C_m + D_{m+1}) f_{m+1}, \\ f'_i &= \left[\beta_m B_1 C_m \prod_{l=m+1}^{i-1} (A_1 + B_1 \delta_l) + D_i \right] f_i, & m+2 \leq i \leq n-m, \end{aligned}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i определяются равенствами (4.1).

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть L – алгебра Лейбница типа II. Пусть $f_k \notin R(L)$ и $f_{k+1} \in R(L)$, где $m \leq k \leq n - m - 1$. Тогда при $k = m$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= \frac{(A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))D_{i+1} - B_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \beta'_i &= \frac{A_{i+1}B_i(C_1 + \delta_i D_1) - (A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \gamma'_i &= \frac{(C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))D_{i+1} - D_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \delta'_i &= \frac{A_{i+1}D_i(C_1 + \delta_i D_1) - (C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))B_{i+1}}{A_{i+1}D_{i+1} - B_{i+1}C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \beta'_m &= \frac{\beta A_m D_1 + B_m(C_1 + \delta_m D_1)}{\beta B_1 C_m + D_{m+1}}, & \delta'_m = \frac{\beta C_m D_1 + D_m(C_1 + \delta_m D_1)}{\beta B_1 C_m + D_{m+1}}. \end{aligned}$$

При $m + 1 \leq k \leq n - m - 1$ имеем

$$\begin{aligned}\alpha'_i &= \frac{(A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))D_{i+1} - B_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1} D_{i+1} - B_{i+1} C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \beta'_i &= \frac{A_{i+1} B_i (C_1 + \delta_i D_1) - (A_i C_1 + D_1(\alpha_i A_i + \gamma_i B_i))B_{i+1}}{A_{i+1} D_{i+1} - B_{i+1} C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \gamma'_i &= \frac{(C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))D_{i+1} - D_i C_{i+1}(C_1 + \delta_i D_1)}{A_{i+1} D_{i+1} - B_{i+1} C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \delta'_i &= \frac{A_{i+1} D_i (C_1 + \delta_i D_1) - (C_i C_1 + D_1(\alpha_i C_i + \gamma_i D_i))B_{i+1}}{A_{i+1} D_{i+1} - B_{i+1} C_{i+1}}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \beta'_m &= \frac{B_m (C_1 + \delta_m D_1)}{D_{m+1}}, & \delta'_m = \frac{D_m (C_1 + \delta_m D_1)}{D_{m+1}}, \\ \delta'_i &= \frac{D_i (C_1 + D_1 \delta_i)}{D_{i+1}}, & m+1 \leq i \leq n-m-1.\end{aligned}$$

5. Заключение. Следует отметить, что задача классификации состоит из следующих этапов: описания алгебр, удовлетворяющих заданным условиям, т.е. нахождения таблицы умножения алгебр с наименьшим числом параметров; нахождения соотношений, устанавливающих изменение параметров в новом базисе (при общей замене базиса); исследования данных соотношений для параметров и нахождения попарно не изоморфных алгебр с заданными условиями. Результаты данной работы завершают первые два этапа классификации естественным образом градуированных алгебр Лейбница с характеристической последовательностью равной $(n-m, m)$. Имеющиеся классификации для $m=2$ и $m=3$ ([9], [12]) показывают, что в общем случае (т.е. при любых значениях m) классификация является необозримой. Однако при фиксированных значениях n и m ее можно получить, при этом существенно будут использоваться результаты данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. L. Loday, "Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz", *Enseign. Math.* (2), **39**:3-4 (1993), 269-293.
- [2] Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964.
- [3] А. И. Мальцев, "О разрешимых алгебрах Ли", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **9**:5 (1945), 329-356.
- [4] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, "Naturally graded quasi-filiform Lie algebras", *J. Algebra*, **256**:1 (2002), 211-228.
- [5] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, J. Reyes, "Maximum length filiform Lie algebras", *Extracta Math.*, **16**:3 (2001), 405-421.
- [6] M. Goze, Y. Khakimjanov, *Nilpotent Lie Algebras*, Math. Appl., **361**, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1996.
- [7] Ш. А. Аюпов, Б. А. Омиров, "О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница", *Сиб. матем. журн.*, **42**:1 (2001), 18-29.
- [8] Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov, "On Leibniz algebras", *Algebra and Operators Theory* (Tashkent, 1997), Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1998, 1-12.
- [9] L. M. Camacho, J. R. Gómez, A. R. González, B. A. Omirov, "Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras", *J. Symbolic Comput.*, **44**:5 (2009), 527-539.

- [10] L. M. Camacho, J. R. Gómez, A. J. González, B. A. Omirov, “The classification of naturally graded p -filiform Leibniz algebras”, *Comm. Algebra*, **39**:1 (2011), 153–168.
- [11] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, М., 1967.
- [12] J. M. Cabezas, L. M. Camacho, J. R. Gómez, B. A. Omirov, “A class of Leibniz algebras in arbitrary finite dimension”, 2010 (to appear).

К. К. Масутова

Институт математики и информационных
технологий АН РУз., Ташкент, Узбекистан
E-mail: kamilyam81@mail.ru

Поступило

25.06.2010

Исправленный вариант

28.12.2012

Б. А. Омиров

Институт математики и информационных
технологий АН РУз., Ташкент, Узбекистан
E-mail: omirovb@mail.ru

А. Х. Худойбердиев

Институт математики и информационных
технологий АН РУз., Ташкент, Узбекистан
E-mail: khabror@mail.ru