Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Мирошин, Представление рядом многократного интеграла специального вида, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 96–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:41:41

Представление рядом многократного интеграла специального вида

Р. Н. Мирошин

Многократные интегралы, обобщающие итерированные ядра линейных интегральных уравнений, представляются рядом, каждый член которого пропорционален произведению двух ортогональных функций в случае такого же представления самого ядра. Кроме интегральных уравнений эти интегралы находят применение в теории марковских процессов. Результаты иллюстрируются примерами.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm8895

Рассмотрим интеграл

$$\pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \prod_{k=1}^{m-1} \pi_1(x_{k+1}|a_k|x_k) dx_2 \dots dx_{m-1}, \quad (1)$$

в котором $x_1, \dots, x_m$ – вещественные переменные, Ω – интервал вещественной оси (не обязательно конечный), $a_1, \dots, a_{m-1}$ – параметры. Когда все $a_k = a$, т.е. все параметры равны между собой, интеграл (1) – итерированное ядро интегрального оператора

$$\int_{\Omega} \pi_1(y|a|x) f(x) dx, \quad (2)$$

действующего на функцию $f(x)$.

При различных a_k по аналогии с (2) $\pi_1(y|a_k|x)$ в (1) также будем называть *ядром*.

Частным случаем ядра является ядро, удовлетворяющее уравнению, известному в теории марковских случайных процессов как уравнение Колмогорова–Чепмена [1]:

$$\pi_1(z|(t, s)|x) = \int_{\Omega} \pi_1(z|(t, \tau)|y) \pi_1(y|(\tau, s)|x) dy, \quad (3)$$

где s, τ, t – неотрицательные вещественные числа, причем $s \leq \tau \leq t$. Когда ядро в (3) неотрицательно и нормировано, т.е.

$$\pi_1(z|(t, s)|x) \geq 0, \quad \int_{\Omega} \pi_1(z|(t, s)|x) dz = 1,$$

это ядро можно отождествить с плотностью вероятности перехода $\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow z)$ траектории некоторого марковского процесса, исходящей из точки x в момент времени s и попадающей в малую окрестность точки z к моменту времени t . Интеграл (1) в таком марковском случае представляет собой плотность распределения значения x_m процесса в момент времени t при условии, что его траектория в момент времени s исходила из точки x_1 и отслеживалась в моменты времени $t_1, \dots, t_{m-2}$, причем $s < t_1 < \dots < t_{m-2} < t$, а параметры a_k суть

$$a_1 = (s, t_1), \quad a_2 = (t_1, t_2), \quad \dots, \quad a_{m-1} = (t_{m-2}, t).$$

В силу (3) интеграл (1) сворачивается для марковского процесса к $\pi_{s \rightarrow t}(x_1 \rightarrow x_m)$.

Другой важный класс интегралов типа (1) используется для представления факториальных моментов числа нулей дифференцируемого случайного процесса ξ_t на конечном интервале времени (см. библиографию в [2]). Когда этот процесс – стационарный гауссовский марковский процесс первого порядка [3], т.е. марковским является вектор ξ_t, ξ'_t , где ξ'_t – производная процесса ξ_t , удалось свести многократный интеграл к однократному [3], [4] и с его помощью исследовать вопросы сходимости рядов Райса и Лонге-Хиггинса по упомянутым факториальным моментам [5], представляющих имеющие интерес в приложениях некоторые континуальные вероятности. При этом оказалось, что разработанный нами в [4] метод мало связан со спецификой данной конкретной задачи, и он был применен в [6] к другим ядрам, что расширило класс интегралов (1), допускающих указанное упрощение. Попутно выявился [6], [7] ряд решений уравнения Колмогорова–Чепмена (3), не известных ранее, и тем самым частично прояснилась поставленная в 1932 г. Бернштейном [8] проблема решения уравнения (3) без его линеаризации. В 1961 г. Сарманов [9] эту проблему решал путем разложения ядра в билинейный ряд по собственным его функциям при существенных ограничениях на ядро (главные из них – стационарность и обратимость плотности вероятности перехода по времени). В [10] мы, обращаясь к функциональным уравнениям, нашли плотность вероятности перехода в виде рядов, обобщающих билинейные, без ограничений Сарманова на ядро. Естественным образом в настоящей заметке мы распространяем наш метод на более общие ядра, а в одном из примеров рассматриваем, при каких условиях удовлетворяется уравнение (3), которое удобнее записать как

$$\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow z) = \int_{\Omega} \pi_{s \rightarrow \tau}(x \rightarrow y) \pi_{\tau \rightarrow t}(y \rightarrow z) dy. \quad (4)$$

Пусть ядро имеет представление

$$\pi_1(x_{k+1}|a_k|x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(a_k) u_n(x_{k+1}) v_{f_{a_k}(n)}(x_k). \quad (5)$$

Здесь функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$ вещественной переменной x ортонормированы в Ω , т.е.

$$\int_{\Omega} u_m(x) v_n(x) dx = \delta_{mn}, \quad (6)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера ($\delta_{nn} = 1$ и $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$), $f_{a_k}(n)$ – целочисленная монотонно растущая функция от n .

Очевидно, имеет место рекуррентное соотношение, следующее из вида подынтегральной функции в (1) как произведения ядер:

$$\pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) = \int_{\Omega} \pi_{m-2}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_2|x_2) \pi_1(x_2|a_1|x_1) dx_2, \quad (7)$$

наличием которого объясняется специфичность интеграла (1).

При $m = 3$ имеем из (7)

$$\pi_2(x_3|a_2, a_1|x_1) = \int_{\Omega} \pi_1(x_3|a_2|x_2) \pi_1(x_2|a_1|x_1) dx_2. \quad (8)$$

Подставив в (8) вместо π_1 представление (5) и переставив интегрирование по x_1 и суммирование, находим, что

$$\pi_2(x_3|a_2, a_1|x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(a_2) b_m(a_1) u_n(x_3) v_{f_{a_1}(m)}(x_1) K_{mn}, \quad (9)$$

где в силу (6)

$$K_{mn} \equiv \int_{\Omega} u_m(x_2) v_{f_{a_2}(n)}(x_2) dx_2 = \delta_{mf_{a_2}(n)}. \quad (10)$$

Вследствие (10) одна из сумм в (9) пропадает, и мы имеем

$$\pi_2(x_3|a_2, a_1|x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{f_{a_2}(n)}(a_1) b_n(a_2) u_n(x_3) v_{f_{a_1}(f_{a_2}(n))}(x_1). \quad (11)$$

Чтобы избежать многоэтажных индексов, усовершенствуем обозначения, положив

$$\varphi_n(a_1, a_2) = f_{a_1}(f_{a_2}(n)), \dots, \varphi_n(a_1, \dots, a_m) = f_{a_1}(f_{a_2}(\dots f_{a_m}(n) \dots)), \quad (12)$$

а также при $k + 1 \leq m - 2$

$$q_n(a_2) = f_{a_2}(n), \dots, q_n(a_{k+1}, \dots, a_{m-1}) = f_{a_{k+1}}(f_{a_{k+2}}(\dots f_{a_{m-1}}(n) \dots)). \quad (13)$$

В этих обозначениях формула (11) запишется в виде

$$\pi_2(x_3|a_2, a_1|x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{q_n(a_2)}(a_1) b_n(a_2) u_n(x_3) v_{\varphi(a_1, a_2)}(x_1). \quad (14)$$

Индукцией по m , пользуясь рекуррентной формулой (7) и опираясь на (14), в обозначениях (12), (13) получаем

$$\begin{aligned} & \pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(a_{m-1}) \left[\prod_{k=1}^{m-2} b_{q_n(a_{k+1}, \dots, a_{m-1})} \right] u_n(x_3) v_{\varphi_n(a_1, \dots, a_{m-1})}(x_1). \end{aligned} \quad (15)$$

В частности, если $f_{a_i}(n) = n$, то формула (15) упрощается, представляя собой билинейный ряд:

$$\pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_m) v_n(x_1) \prod_{k=1}^{m-1} b_n(a_k). \quad (16)$$

Все осуществленные операции законны, если ряды сходятся равномерно, а представление (5) при $f_{a_i}(n) = n$ для ядра можно получить применением к ядру прямого и обратного интегрального преобразования, одного к переменной x_k , другого к переменной x_{k+1} , если эта пара преобразований определена в интервале Ω аналитическими формулами (например, преобразование Фурье при $\Omega = (-\infty, \infty)$ и $\Omega = [0, \infty)$ или преобразование Канторовича–Лебедева при $\Omega = [0, \infty)$ [11]). Кроме того, для $f_{a_i}(n) = n$ представление (5) в виде конечной суммы приводит к представлению (16) тоже в виде конечной суммы с тем же самым числом членов.

Формулы (15), (16) – наш конечный результат. Нижеследующие примеры к ним подобраны таким образом, чтобы ядро имело простую аналитическую форму (т.е. ряд в правой части (5) суммировался бы к простой функции), а для марковских процессов – чтобы оно включало в себя известное представление для гауссовского процесса частным случаем.

ПРИМЕР 1. Ядро $\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y)$ – решение уравнения Колмогорова–Чепмена (4) тогда, когда выполняется равенство [7]

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(s, t) u_n(z) v_{f_{st}(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\tau, t) b_{f_{\tau t}(n)}(s, \tau) u_n(z) v_{f_{s\tau}(f_{\tau t}(n))}(x), \quad (17)$$

получаемое подстановкой ряда (5) в левую часть (11). Здесь $a_1 = (s, \tau)$, $a_2 = (\tau, t)$ и убраны в аргументах функций и индексах скобки и запятые там, где от этого не страдает смысл. Приравнивание коэффициентов в левой и правой частях (17) при линейно независимых функциях $u_n(z)$ приводит к функциональному уравнению для неизвестных функций $f_{st}(n)$ и $b_n(s, t)$. Как его решать в общем виде, пока не ясно, но легко найти частные решения. Именно, предполагая, что

$$f_{s\tau}(f_{\tau t}(n)) = f_{st}(n), \quad (18)$$

упрощаем упомянутое функциональное уравнение:

$$b_n(s, t) = b_{f_{\tau t}(n)}(s, \tau) b_n(\tau, t), \quad (19)$$

т.е. разбиваем его на два: (18) и (19), – первое из которых содержит только одну неизвестную функцию $f_{st}(n)$. Если эта функция пропорциональна n (еще одно предположение), т.е. $f_{st}(n) = A(s, t) \cdot n$, где $A(s, t)$ – целочисленная функция, то из (18) следует уравнение для $A(s, t)$:

$$A(s, t) = A(s, \tau) \cdot A(\tau, t), \quad s \leq \tau \leq t. \quad (20)$$

Решение уравнения (20), отличное от тождественного нуля, хорошо известно (см., например, [12]):

$$A(s, t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(s)}, \quad s \leq t. \quad (21)$$

Здесь $\gamma(t)$ – произвольная, не обращающаяся в нуль функция и такая, что $A(s, t)$ – целочисленна (например, $\gamma(t) = M^{[t+1]}$, где M – целое число, а $[t]$ – целая часть t).

Теперь решаем уравнение (19), полагая

$$b_n(s, t) = \exp\{-g(n)B(s, t)\}, \quad (22)$$

где $B(s, t) \geq 0$, а неотрицательная функция $g(n)$ – однородная функция степени ν , т.е. при $k > 0$

$$g(k \cdot n) = k^\nu \cdot g(n). \quad (23)$$

Подставив (22), (23) в (19), убеждаемся, что $B(s, t)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$[A(\tau, t)]^\nu B(s, \tau) + B(\tau, t) - B(s, t) = 0, \quad s \leq \tau \leq t,$$

из которого получаем [6], [7], что

$$B(s, t) = \alpha(t)\gamma^\mu(t) - \alpha(s)\gamma^{\mu-\nu}(s)\gamma^\nu(t),$$

где $\alpha(t) \geq 0$ – произвольная непрерывная вещественная функция, μ – вещественное число, $\gamma(t)$ – та же, что и в (21). В силу неотрицательности $B(s, t)$ функция $h(t) = \alpha(t)\gamma^{\mu-\nu}$ должна быть функцией неубывающей.

Таким образом, некоторые частные решения уравнения Колмогорова–Чепмена (4) имеют вид

$$\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-g(n)B(s, t)\} u_n(y) v_{A(s, t)n}(x), \quad s \leq t, \quad (24)$$

с определенными выше $g(n)$, $B(s, t)$ и $A(s, t)$.

Гауссовский марковский процесс с нулевым средним, нормированной корреляционной функцией $R \equiv R(s, t)$ и с начальной плотностью распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

имеет плотность вероятности перехода (формула Мелера [13; с. 194, (22)])

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2 + y^2 - 2Rxy}{2(1-R^2)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n u_n(x) v_n(y), \quad (25)$$

где

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x), \quad v_n(x) = H_n(x),$$

$A(s, t) = 1$, $H_n(x)$ – полином Эрмита, $\Omega = (-\infty, \infty)$, $\nu = 1$, $g(n) = n$, $R \equiv R(s, t) = \exp\{-B(s, t)\}$, $\gamma(t) = 1$, т.е. ряд (25) – частный случай ряда (24).

Несколько других примеров для марковских процессов рассмотрены в [7] и (в стационарном случае) в [9]. Примеры отличаются друг от друга различными $u_n(x)$, $v_n(x)$, Ω и $g(n)$.

ПРИМЕР 2. Возьмем $u_n(x) = (2/\pi) \sin nx$, $v_n(x) = \sin nx$. Очевидно,

$$\int_0^\pi u_n(x) v_m(x) dx = \delta_{mn},$$

поэтому функция (см. [11; с. 56, № 1.462])

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sin^2 \frac{x+y}{2} + \operatorname{sh}^2 t}{\sin^2 \frac{x-y}{2} + \operatorname{sh}^2 t} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n|t|} \frac{\sin nx \sin ny}{n} \quad (26)$$

удовлетворяет равенству (5) с $a = |t|$, $b_0 = 0$, $nb_n = \exp(-2n|t|)$, $f_a(n) = n$, так что интеграл (1) с ядром (26) представим рядом (16).

ПРИМЕР 3. Пусть $p_n(x)$ – ортонормированный в интервале Ω с весом $w(x)$ полином степени n , т.е.

$$\int_{\Omega} w(x) p_n(x) p_m(x) dx = \delta_{mn}.$$

Если ядром взять

$$\pi_1(x|y) = w(x) \frac{q_n}{q_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}, \quad (27)$$

то согласно формуле Кристоффеля–Дарбу [11; с. 1038, № 8.902]

$$\pi_1(x|y) = w(x) \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y),$$

где q_n – коэффициент при x^n в $p_n(x)$. Это пример ядра (5), но с конечной суммой, если положить в (5) $u_k(x) = w(x)p_k(x)$, $v_k(x) = p_k(x)$, $f_a(k) = k$, $b_k = 1$ при $k = 0, \dots, n$ и $b_k = 0$ при $k > n$. Согласно (16)

$$\begin{aligned} \pi_{m-1}(x_m|x_1) &= w(x) \sum_{k=0}^n p_k(x_m)p_k(x_1) \\ &= w(x) \frac{q_n}{q_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x_m)p_n(x_1) - p_n(x_m)p_{n+1}(x_1)}{x_m - x_1}, \end{aligned}$$

т.е. итерированное ядро совпадает с (27).

ПРИМЕР 4. Рассмотрим следующее ядро, представимое билинейным рядом по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ (см. [11; с. 956, № 8.355]), ортонормированным с весом $w(x)$:

$$\pi_1(y|\alpha|x) \equiv \Gamma(\alpha, x) \gamma(\alpha, y) x^{-\alpha} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\alpha) u_n(x) v_n(y), \quad (28)$$

где $\operatorname{Re} \alpha > 0$,

$$u_n(x) = L_n^\alpha(x), \quad v_n(x) = \frac{n!}{\Gamma(\alpha + n + 1)} L_n^\alpha(x) x^\alpha e^{-x}, \quad b_n(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{n + 1},$$

$w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $f_\alpha(n) = n$, $\Omega = (0, \infty)$, а $\Gamma(\alpha, x)$ и $\gamma(\alpha, x)$ – неполные гамма-функции. Этот пример демонстрирует, что параметр может входить также и в $u_n(x)$ и $v_n(x)$ (ранее эту возможность мы не оговаривали). Ряд (28) совпадает с рядом (5), а потому итерированное ядро (1) имеет вид (16).

ПРИМЕР 5. Ядро

$$\pi_1(y|a_k|x) = \frac{e^{-y}}{1-a_k} \left(\frac{xa_k}{y} \right)^{-\alpha/2} \exp\left(-a_k \frac{x+y}{1-a_k}\right) I_\alpha\left(2\sqrt{xya_k}\right)$$

где $|a_k| < 1$, разлагается в билинейный ряд [11; с. 1052, № 8.976(1)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-y} y^\alpha \frac{L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)} a_k^n. \quad (29)$$

Здесь $I_\alpha(z)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента. Ряд (29) совпадает с рядом (5) при $f_a(n) = n$, $u_n(x) = L_n^\alpha(x)$, $v_n(y) = e^{-y} y^\alpha L_n^\alpha(y)$, $\Omega = [0, \infty)$, $b_n(a_k) = a_k^n n! / \Gamma(n+\alpha+1)$. Поэтому интеграл (1) можно записать в виде (16).

Аналогичные примеры можно привести с другими билинейными рядами, просуммированными к простым функциям (см. [13; с. 227] – билинейный ряд по полиномам Гегенбауэра и [13; с. 233] – билинейный ряд по полиномам Лежандра).

Автор выражает благодарность рецензенту за конструктивную критику работы и за указание других представлений ядер в виде билинейного ряда, которые могут, тем самым, служить дополнительными иллюстративными примерами к формулам (15), (16). Это вероятность перехода марковского процесса рождения и гибели [14] и следствия формулы операторной факторизации [15], частными случаями которой являются ядра (25), (28) и (29).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедический словарь*, Большая Российская энциклопедия, М., 2003.
- [2] Р. Н. Мирошин, *Пересечения кривых гауссовскими процессами*, Изд-во Ленинград. ун-та, Л., 1981.
- [3] Р. Н. Мирошин, “Марковские и возвратные стационарные гауссовские процессы второго порядка”, *ТВП*, **24**:4 (1979), 847–853.
- [4] Р. Н. Мирошин, “Об одном классе многократных интегралов”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 390–401.
- [5] Р. Н. Мирошин, “Сходимость рядов Лонге-Хиггинса для стационарных гауссовских марковских процессов первого порядка”, *ТВП*, **26**:1 (1981), 101–120.
- [6] Р. Н. Мирошин, “О многократных интегралах специального вида”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 401–410.
- [7] Р. Н. Мирошин, “О некоторых решениях интегрального уравнения Колмогорова–Чепмена”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., астроном.*, 2007, № 4, 22–29.
- [8] С. Н. Бернштейн, “О зависимостях между случайными величинами”, *Собрание сочинений*. Т. 4. *Теория вероятностей. Математическая статистика* (1911–1946), Наука, М., 1964, 235–255.
- [9] С. О. Сарманов, “Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям”, *Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию*, Тр. МИАН СССР, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 238–261.
- [10] Р. Н. Мирошин, “О решении интегрального уравнения Колмогорова–Чепмена в виде ряда”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., астроном.*, 2009, № 2, 72–76.

- [11] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.
- [12] Р. Н. Мирошин, *Случайные процессы и поля*, НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2003.
- [13] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1970.
- [14] P.-A. Lee, “Markov processes and a multiple generating function of product for generation function of product for generalized Laguerre polynomials”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:11 (1997), L373–L377.
- [15] А. В. Ниукканен, “Новый метод в теории гипергеометрических рядов и специальных функций математической физики”, *УМН*, **43**:3 (1988), 191–192.

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: miroshin-roman1938@yandex.ru

Поступило

27.05.2010

Исправленный вариант

10.01.2012