Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Водова, Цепное правило для конических производных, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 509–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:48:46

Цепное правило для конических производных

И. Водова

Для все “хороших” определений дифференцируемости должно выполняться цепное правило. Показано, что цепное правило сохраняет силу для широкого класса определений дифференцируемости, если в качестве аппроксимирующих отображений (производных) рассматриваются не только непрерывные линейные отображения, но и положительно однородные отображения, удовлетворяющие некоторым топологическим условиям (которые выполняются для непрерывных линейных отображений). Для краткости такие производные называются коническими. Приводятся некоторые следствия для случая конического дифференцирования отображений нормированных пространств; в частности, для случая конического дифференцирования по Фреше и компактного конического дифференцирования.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm8896

Введение

Цепное правило занимает особое место среди всех “хороших” определений дифференцируемости. В работе мы покажем, что цепное правило выполняется для широкого класса определений дифференцируемости, если в качестве аппроксимирующих отображений (производных) рассматриваются не только непрерывные линейные отображения, но и положительно однородные отображения, удовлетворяющие некоторым топологическим условиям (которые выполняются для непрерывных линейных отображений). Для краткости такие производные будем называть коническими. Будут доказаны некоторые утверждения для случая конического дифференцирования отображений нормированных пространств; в частности, для случая конического дифференцирования Фреше и компактного конического дифференцирования.

1. Определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X – множество. Непустое множество $\mathfrak{x}$ подмножеств множества X называется *фильтром* в X , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\emptyset \notin \mathfrak{x}$;

- 2) $A_1 \in \mathfrak{x}, A_2 \supset A_1 \Rightarrow A_2 \in \mathfrak{x}$;
- 3) $A_1, A_2 \in \mathfrak{x} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{x}$.

Базис фильтра в X – это непустое множество $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$;
- 2) для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует $B_3 \in \mathfrak{B}$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{x}$ *порождается базисом фильтра* $\mathfrak{B}$, если он состоит из всех подмножеств множества X , содержащих некоторое множество из $\mathfrak{B}$.

Для заданного множества $A \subset X$ система всех подмножеств множества X , содержащих множество A , является фильтром. Такой фильтр обозначим через $[A]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X – множество, и пусть $F(X)$ – система всех фильтров в X . *Псевдотопологией* τ в X называется отображение

$$\tau: X \rightarrow 2^{F(X)}, \quad x \mapsto \tau(x),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $[x] \in \tau(x)$, где $[x] := [\{x\}] = \{A \subset X \mid x \in A\}$;
- 2) $\mathfrak{x} \in \tau(x), \mathfrak{y} \supset \mathfrak{x} \Rightarrow \mathfrak{y} \in \tau(x)$;
- 3) $\mathfrak{x} \in \tau(x), \mathfrak{y} \in \tau(x) \Rightarrow \mathfrak{x} \cap \mathfrak{y} \in \tau(x)$.

Если $\mathfrak{x} \in \tau(x)$, то будем говорить, что $\mathfrak{x}$ *сходится к x в τ* . Множество X , снабженное псевдотопологией τ , называется *псевдотопологическим пространством*.

Для заданной псевдотопологии τ в множестве X будем вместо $\mathfrak{x} \in \tau(x)$ писать $\mathfrak{x} \downarrow_x X$ или $\mathfrak{x} \downarrow_x \tau$. Для краткости будем писать $\mathfrak{x} \downarrow_x$, если это не ведет к разночтению. Множество всех сходящихся фильтров в X обозначим через $C(X)$.

Заметим, что в любом топологическом пространстве X можно определить псевдотопологию следующим образом:

$$\mathfrak{x} \downarrow_x \iff \mathfrak{x} \supset \text{Nb}_x(X),$$

где $\text{Nb}_x(X)$ – фильтр окрестностей точки x в X , и, следовательно, любое топологическое пространство является псевдотопологическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X – множество, и пусть τ_1 и τ_2 – две псевдотопологии в X . Будем говорить, что τ_1 *сильнее, чем τ_2* , если при всех $x \in X$ выполняется соотношение

$$\mathfrak{x} \downarrow_x \tau_1 \implies \mathfrak{x} \downarrow_x \tau_2.$$

Естественным образом определяются псевдотопологические векторные пространства (см. [1], [2]). В этих пространствах $\mathfrak{x} \downarrow_x$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{x} - x \downarrow_0$, где $\mathfrak{x} - x$ – фильтр, порожденный базисом фильтра $\{A - x \mid A \in \mathfrak{B}\}$, и где $\mathfrak{B}$ – базис фильтра, порождающий фильтр $\mathfrak{x}$, т.е. все сходящиеся фильтры однозначно определены фильтрами, сходящимися к нулю. В этом случае для фильтра $\mathfrak{x}$, сходящегося к нулю, будем писать просто $\mathfrak{x} \downarrow$.

Введем следующие обозначения: через $\mathfrak{r}$ обозначим фильтр окрестностей нуля на действительной прямой $\mathbb{R}$ с естественной топологией, а через $\mathfrak{r}^+$ обозначим фильтр $\mathfrak{r}$ в множестве положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$, порожденный базисом фильтра, состоящим из интервалов вида $(0, t)$, где $t > 0$. Также будем применять обозначения

$$I_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad I_\varepsilon^+ := \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t < \varepsilon\}.$$

Далее, если $\mathfrak{r}$ является фильтром в некотором векторном пространстве, то $\mathfrak{r}\mathfrak{r}$ обозначает фильтр, порожденный фильтром-базисом

$$\{I_\varepsilon A \mid A \in \mathfrak{r}, \varepsilon > 0\}, \quad \text{где} \quad I_\varepsilon A = \{tx \mid t \in I_\varepsilon, x \in A\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [2]. Пусть $\mathfrak{r}$ – фильтр в некотором векторном пространстве. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{r}$ является *уравновешенным*, если $\mathfrak{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1], [2]. Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{r}$ в псевдотопологическом векторном пространстве X является *ограниченным*, если фильтр $\mathfrak{r}\mathfrak{r}$ сходится к нулю.

Множество всех ограниченных фильтров в X обозначим через $V(X)$. Заметим, что $V(X) \supset C(X)$ (см., например, [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [1]. Каждой псевдотопологии τ в векторном пространстве X можно поставить в соответствие *ассоциированную псевдотопологию* $\tau^\#$ в X . Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{r}$ в X *сходится к нулю в $\tau^\#$* , если существует уравновешенный фильтр $\mathfrak{r}$ в X такой, что $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}$ сходится к нулю в псевдотопологии τ .

Заметим, что если X – топологическое векторное пространство, снабженное топологией τ , то $\tau = \tau^\#$.

Пусть X и Y – множества, $f: X \rightarrow Y$ – отображение и $\mathfrak{r}$ – фильтр в X . Обозначим через $f(\mathfrak{r})$ фильтр в Y , порожденный базисом $\{f(A) \mid A \in \mathfrak{r}\}$. Пусть $\mathfrak{f}$ – фильтр в множестве $F(X, Y)$ всех отображений из X в Y . Через $\mathfrak{f}(\mathfrak{r})$ обозначим фильтр, порожденный базисом $\{F(A) \mid F \in \mathfrak{f}, A \in \mathfrak{r}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [3]. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями. Будем говорить, что задана *система фильтров $\mathcal{S}$ в $\mathcal{A}$* , если для любого топологического векторного пространства $X \in \mathcal{A}$ задано непустое множество $S(X)$ фильтров и одновременно для любых топологических векторных пространств $X, Y \in \mathcal{A}$ и для любого непрерывного линейного отображения $l: X \rightarrow Y$ выполняется импликация

$$\mathfrak{r} \in S(X) \implies l(\mathfrak{r}) \in S(Y).$$

Если для любого топологического векторного пространства $X \in \mathcal{A}$ все фильтры из $S(X)$ имеют вид $[A]$, где $A \subset X$, то будем говорить, что $\mathcal{S}$ является *системой множеств*.

Система фильтров $\mathcal{S}$ называется *линейной*, если для всех $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in S(X)$ и для всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется

$$a\mathfrak{r}_1 + b\mathfrak{r}_2 \in S(X) \quad \text{для любого} \quad X \in \mathcal{A}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1. Системы $F, B, C, C_0, C_0^\sharp, b, c$ определяются следующим образом:

- $F(X)$ – множество всех фильтров в X ;
- $B(X)$ – множество всех ограниченных фильтров в X ;
- $C(X)$ – множество всех сходящихся фильтров в X ;
- $C_0(X)$ – множество всех фильтров в X , сходящихся к нулю;
- $C_0^\sharp(X)$ – множество всех уравновешенных фильтров в X , сходящихся к нулю;
- $b(X)$ – множество всех ограниченных множеств в X ;
- $c(X)$ – множество всех секвенциально компактных множеств в X .

Каждая из этих систем фильтров является линейной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в подкатегории $\mathcal{A}$ категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}$. Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow Y$ является $\mathcal{S}$ -устойчивым, если $f(\mathcal{S}(X)) \subset \mathcal{S}(Y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в подкатегории $\mathcal{A}$ категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}$. Псевдотопология $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ сходимости на системе фильтров $\mathcal{S}$ в векторном пространстве $F(X, Y)$ всех отображений из X в Y определена следующим правилом: фильтр $\mathfrak{f}$ сходится к нулю в $F(X, Y)$ в псевдотопологии $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, если

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \downarrow \quad \forall \mathfrak{x} \in \mathcal{S}(X).$$

Обозначим псевдотопологическое пространство $F(X, Y)$, снабженное псевдотопологией $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, через $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X, Y)$.

В случае $\mathcal{S} = B$ (соответственно $\mathcal{S} = C$) псевдотопология $\mathcal{F}_B$ (соответственно $\mathcal{F}_C$) называется псевдотопологией Фрелихера–Бухера (соответственно псевдотопологией Майкла–Бастуани) и обозначается через FB (соответственно MB) (см., например, [1]–[3]). Заметим, что

$$\text{если } \mathfrak{f} \downarrow \text{FB, то } \mathfrak{f} \downarrow \text{MB,}$$

так как $B(X) \supset C(X)$ для любого X .

Заметим, что псевдотопология $\mathcal{F}_X$ сходимости на системе фильтров $\mathcal{S}(X) = \{X\}$ совпадает с топологией равномерной сходимости в векторном пространстве $F(X, Y)$.

Очевидно, что любой заданной системе фильтров $\mathcal{S}$ в подкатегории $\mathcal{A}$ категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями можно поставить в соответствие отображение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (X, Y) \mapsto \mathcal{F}_{\mathcal{S}}(X, Y).$$

Обратно, заданной подкатегории $\mathcal{A}$ категории топологических векторных пространств с непрерывными отображениями и заданному отображению $\tau: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (X, Y) \mapsto \tau(X, Y)$ (здесь через $\tau(X, Y)$ обозначено векторное пространство $F(X, Y)$, снабженное псевдотопологией τ) такому, что для любых других $X_1, Y_1 \in \mathcal{A}$ и любых непрерывных линейных отображений $u: X_1 \rightarrow X$ и $v: Y \rightarrow Y_1$ выполняется импликация

$$\mathfrak{f} \downarrow \tau(X, Y) \implies v \circ \mathfrak{f} \circ u \downarrow \tau(X_1, Y_1),$$

можно поставить в соответствие систему фильтров $\mathcal{S}_\tau$ в $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$\mathfrak{x} \in \mathcal{S}_\tau(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall Y \in \mathcal{A} \quad \forall f \downarrow \tau(X, Y) \quad f(\mathfrak{x}) \downarrow Y.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Система фильтров $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_{\mathcal{F}_S}$ называется *полнением* системы $\mathcal{S}$.

Легко видеть, что $\overline{\mathcal{S}} \supset \mathcal{S}$. Можно проверить, что $\overline{B} = B$, но $\overline{C} \neq C$.

Пусть X и Y – векторные пространства и $r: X \rightarrow Y$ – некоторое произвольное отображение. Через $r_{\mathbf{r}}$ обозначим фильтр, порожденный фильтром-базисом $\{\{r_t \mid |t| \leq \delta\} \mid \delta > 0\}$, где

$$r_t(h) := \frac{r(th)}{t}, \quad \text{если } t \neq 0, \quad r_0 := 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 [1]. Пусть τ – псевдотопология в $F(X, Y)$. Будем говорить, что отображение r является τ -малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \tau$.

Таким образом, отображение r является FB-малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{FB}$, а отображение r является MB-малым, если $r_{\mathbf{r}} \downarrow \text{MB}$ (см. [1], [2], [4]).

Подчеркнем, что условие $r_{\mathbf{r}} \downarrow \tau$ эквивалентно условию $r_t \xrightarrow{\tau} 0$ при $t \downarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть X, Y – топологические векторные пространства. Отображение $r: X \rightarrow Y$ называется *компактно малым*, если для любой сходящейся последовательности $\{h_n\}$ в X и любой монотонно сходящейся сверху к нулю последовательности $\{t_n\}$ в $\mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\frac{r(t_n h_n)}{t_n} \rightarrow 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть X, Y – нормированные пространства. Отображение $r: X \rightarrow Y$ называется *малым в смысле Фреше*, если

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

(предполагается, что $h \neq 0$).

Пусть X и Y – векторные пространства и $f: X \rightarrow Y$ – отображение. В дальнейшем $f(x+h)$ будем обозначать через $f_h(x)$, разность $f(x+h) - f(x)$ – через $\Delta f(x, h)$, а для фиксированного $t \in \mathbb{R}$ отображение из X в Y , определенное как

$$h \mapsto \Delta f(x, th),$$

будем обозначать через $\Delta f(x, t \cdot)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 [3]. Пусть X, Y – псевдотопологические пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение. Будем говорить, что f является *непрерывным в точке* $x \in X$, если

$$\mathfrak{x} \downarrow_x \implies f(\mathfrak{x}) \downarrow_{f(x)}.$$

Далее, пусть X и Y – псевдотопологические векторные пространства. Тогда f называется *равномерно непрерывным на множестве* $A \subset X$, если выполняется следующее условие:

$$\mathfrak{x} \downarrow X \implies \Delta f(A, \mathfrak{x}) \downarrow Y.$$

Пусть τ – псевдотопология в векторном пространстве $F(X, Y)$. Тогда отображение f называется *τ -непрерывным в точке* $x \in X$, если выполняется условие

$$\Delta f(x, \mathbf{r}^+ \cdot) \downarrow \tau,$$

и f называется *τ -глобально непрерывным* (соответственно *τ -глобально τ -непрерывным*), если отображение

$$Tf: X \rightarrow F(X, Y), \quad h \mapsto f_h,$$

непрерывно (соответственно τ -непрерывно) в нуле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть X, Y – топологические векторные пространства. Через $\mathcal{C}$ обозначим класс отображений, имеющих некоторые определенные свойства. Через $\mathcal{R}$ обозначим класс отображений, являющихся малыми в определенном смысле. Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow Y$ является *$(\mathcal{C}, \mathcal{R})$ -дифференцируемым в точке* $x \in X$, если существует отображение $l \in \mathcal{C}$, $l: X \rightarrow Y$, такое, что для всех $h \in X$ выполняется соотношение

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + r(h),$$

где $r: X \rightarrow Y$ принадлежит классу $\mathcal{R}$.

Отображение l называется *$\mathcal{R}$ -производной отображения* f в точке x и обозначается через $f'(x)$.

ТАБЛИЦА 1

	свойство 1	свойство 2
случай $\mathcal{F}_S$	$\mathcal{S}$ -устойчивость	$\mathcal{F}_S$ -глобальная непрерывность
случай $\mathcal{F}_S^\sharp$	$\mathcal{S}$ -устойчивость	$\mathcal{F}_S^\sharp$ -глобальная $\mathcal{F}_S^\sharp$ -непрерывность

В частных случаях будут использоваться следующие термины:

- если $\mathcal{C}$ обозначает класс всех непрерывных линейных отображений, то применяется термин “ *$\mathcal{R}$ -дифференцируемость*”;
- если $\mathcal{C}$ обозначает класс всех положительно однородных отображений, то применяется термин “*коническая $\mathcal{R}$ -дифференцируемость*”;
- если $\mathcal{S}$ обозначает систему фильтров, $\mathcal{R}$ обозначает класс всех $\mathcal{F}_S$ -малых (соответственно $\mathcal{F}_S^\sharp$ -малых) отображений и $\mathcal{C}$ обозначает класс всех положительно однородных отображений, удовлетворяющих свойству 1 и свойству 2 в таблице 1 для $\mathcal{F}_S$ (соответственно $\mathcal{F}_S^\sharp$), то применяется термин “*коническая $\mathcal{S}$ -дифференцируемость*” (соответственно “*коническая $\mathcal{S}^\sharp$ -дифференцируемость*”).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, любое положительно однородное отображение l конически $\mathcal{R}$ -дифференцируемо в точке $x = 0$ с $l'(0) = l$ для любого $\mathcal{R}$, и это же отображение конически $\mathcal{S}$ -дифференцируемо в нуле (соответственно $\mathcal{S}^\sharp$ -конически дифференцируемо в нуле) тогда и только тогда, когда l удовлетворяет свойству 1 и свойству 2 в таблице 1.

2. Цепное правило для конических производных

Цель этого раздела – обобщить цепное правило на случай конической производной от композиции двух отображений между топологическими векторными пространствами.

Сначала приведем теорему и лемму, которые понадобятся для доказательства нашего обобщенного правила для конических производных.

ТЕОРЕМА 1 [3]. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, $\mathcal{S}$ – система фильтров в $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{S} \supset C_0$ и ее пополнение $\bar{\mathcal{S}}$, линейно и псевдотопология τ – это $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ (соответственно $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^\sharp$). Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства. Отображение композиции

$$\text{comp}: \tau(X, Y) \times \tau(Y, Z) \rightarrow \tau(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

непрерывно в точке $(\tilde{f}, \tilde{g})$ тогда и только тогда, когда для любого $X \in \mathcal{A}$ выполняется условие $\tilde{f}(\mathcal{S}(X)) \subset \bar{\mathcal{S}}(X)$ и отображение $\tilde{g}$ удовлетворяет свойству 2 в таблице 1.

ЛЕММА 1 [3]. Пусть X, Y – топологические векторные пространства.

1. Пусть $\mathcal{S}(X)$ – произвольная система фильтров в X . Отображение $f: X \rightarrow Y$ является $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ -глобально непрерывным тогда и только тогда, когда

$$\forall \mathfrak{r}_2 \downarrow X \quad \forall \mathfrak{r}_1 \in \mathcal{S}(X): \quad \Delta f(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \downarrow Y.$$

2. Пусть $\mathcal{S}(X)$ – линейная система фильтров в X такая, что $C_0^\sharp \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^\sharp$ -глобально $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^\sharp$ -непрерывным тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{S}(X) \quad \forall \mathfrak{r}_1 \in \mathcal{S}(X) \quad \exists \eta \downarrow Y \quad \forall V \in \eta \quad \exists U_2 \in \mathfrak{r}_2 \quad \exists U_1 \in \mathfrak{r}_1: \\ \Delta f(U_1, \mathfrak{r}^+ U_2) \supset \mathfrak{r} V. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2 (Цепное правило для конических производных). Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, и пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{S} \supset C_0$ и ее пополнение $\bar{\mathcal{S}}$ линейно. Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства, а $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ – отображения. Если f конически $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ -дифференцируемо (соответственно конически $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^\sharp$ -дифференцируемо) в точке $x \in X$ и производная от f в точке x удовлетворяет свойству 1 в таблице 1, и если g конически $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ -дифференцируемо (соответственно конически $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}^\sharp$ -дифференцируемо) в точке $y = f(x) \in Y$ и производная от g в точке y удовлетворяет свойству 2

в таблице 1, то отображение $g \circ f$ конически $\mathcal{F}_S$ -дифференцируемо (соответственно конически $\mathcal{F}_S^\sharp$ -дифференцируемо) в точке $x \in X$ и имеет место соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эту теорему для псевдотопологии $\mathcal{F}_S$. Для случая псевдотопологии $\mathcal{F}_S^\sharp$ доказательство аналогично. Так как f является $\mathcal{F}_S$ -конически дифференцируемым в точке x и g является $\mathcal{F}_S$ -конически дифференцируемым в точке $y = f(x)$, то имеем

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + l(h) + r(h) & \forall h \in X, \\ g(y+k) &= g(y) + m(k) + s(k) & \forall k \in Y, \end{aligned}$$

где $l: X \rightarrow Y$ – положительно однородное отображение, $l(\mathcal{S}(X)) \subset \mathcal{S}(Y)$, $m: Y \rightarrow Z$ – положительно однородное $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывное отображение и отображения $r: X \rightarrow Y$ и $s: Y \rightarrow Z$ являются $\mathcal{F}_S$ -малыми.

Надо показать, что

$$(g \circ f)(x+h) = (g \circ f)(x) + (m \circ l)(h) + q(h) \quad \forall h \in X,$$

где $m \circ l: X \rightarrow Z$ – положительно однородное отображение и отображение $q: X \rightarrow Z$ является $\mathcal{F}_S$ -малым.

Взяв композицию отображений f и g и выполняя некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= (g \circ f)(x) + (m \circ l)(h) + \underbrace{m(l(h) + r(h)) - m(l(h)) + s(l(h) + r(h))}_{:=q(h)}. \end{aligned}$$

Отображение $m \circ l$ положительно однородно, так как композиция двух положительно однородных отображений является положительно однородным отображением. Остается показать, что q является $\mathcal{F}_S$ -малым, т.е.

$$q_t := \frac{q(t \cdot)}{t} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \downarrow 0.$$

Поскольку l и m положительно однородны, то имеем

$$\begin{aligned} q_t(h) &= \frac{m(l(th) + r(th)) - m(l(th)) + s(l(th) + r(th))}{t} \\ &= \frac{m(t \cdot l(h) + (t \cdot r(th))/t) - m(l(th)) + s(t \cdot l(h) + (t \cdot r(th))/t)}{t} \\ &= m(l(h) + r_t(h)) - m(l(h)) + s_t(l(h) + r_t(h)). \end{aligned}$$

Опуская аргументы, получим

$$q_t = m \circ (l + r_t) - m \circ l + s_t(l + r_t).$$

Но отображения m и l удовлетворяют условиям теоремы 1, а отображения r_t и s_t являются $\mathcal{F}_S$ -малыми. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} s_t \circ (l + r_t) &\rightarrow 0 & \text{при } t \downarrow 0, \\ m \circ (l + r_t) &\rightarrow m \circ l & \text{при } t \downarrow 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$q_t \rightarrow m \circ l - m \circ l + 0 = 0 \quad \text{при } t \downarrow 0.$$

Теорема доказана.

Нам понадобятся следующие леммы и некоторые следствия последней теоремы.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в подкатегории $\mathcal{A}$ категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, и пусть $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства. Если $f: X \rightarrow Y$ является $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывным и $\mathcal{S}$ -устойчивым и $g: Y \rightarrow Z$ является $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывным, то отображение $g \circ f: X \rightarrow Z$ также $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 достаточно показать, что

$$\forall \mathfrak{r}_2 \downarrow X \quad \forall \mathfrak{r}_1 \in \mathcal{S}(X): \quad \Delta(g \circ f)(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \downarrow Z.$$

Выберем $\mathfrak{r}_2 \downarrow X$ и $\mathfrak{r}_1 \in \mathcal{S}(X)$ произвольным образом. Из свойств отображения f следует, что

$$f(\mathfrak{r}_1) \in \mathcal{S}(Y) \quad \text{и} \quad \Delta f(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \downarrow Y.$$

В силу $\mathcal{F}_S$ -глобальной непрерывности отображения g имеем

$$\Delta g(f(\mathfrak{r}_1), \Delta f(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)) \downarrow Z,$$

т.е.

$$\forall W \in \text{Nb}_0(Z) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{r}_1 \quad \exists X_2 \in \mathfrak{r}_2: \quad \Delta g(f(X_1), \Delta f(X_1, X_2)) \subset W,$$

откуда следует, что

$$\forall W \in \text{Nb}_0(Z) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{r}_1 \quad \exists X_2 \in \mathfrak{r}_2 \quad \forall x_1 \in X_1 \quad \forall x_2 \in X_2:$$

$$\begin{aligned} \Delta g(f(x_1), \Delta f(x_1, x_2)) &= \Delta g(f(x_1), f(x_1 + x_2) - f(x_1)) \\ &= g(f(x_1) + f(x_1 + x_2) - f(x_1)) - g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_1 + x_2)) - g(f(x_1)) \\ &= \Delta(g \circ f)(x_1, x_2) \in W. \end{aligned}$$

Но это то же самое, что и

$$\Delta(g \circ f)(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \downarrow Z,$$

откуда следует, что $g \circ f$ является $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывным.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, и пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{S} \supset \mathcal{C}_0$ и ее пополнение $\bar{\mathcal{S}}$ линейно. Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства. Если $f: X \rightarrow Y$ конически $\mathcal{S}$ -дифференцируемо в точке x и $g: Y \rightarrow Z$ конически $\mathcal{S}$ -дифференцируемо в точке $y = f(x)$, то $g \circ f$ является конически $\mathcal{S}$ -дифференцируемым в точке x и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2 и леммы 2. .

Далее, проверим, какие отображения удовлетворяют условиям, налагаемым на конические производные в теореме 2.

ЛЕММА 3. Пусть X и Y – топологические векторные пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ равномерно непрерывно на X тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{F}_X$ -глобально непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f равномерно непрерывно на X , и пусть $\mathfrak{x} \downarrow X$ – фильтр. Из определения равномерной непрерывности следует, что

$$\Delta f(X, \mathfrak{x}) \downarrow Y,$$

т.е. в терминах окрестностей

$$\forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x}: \quad \Delta f(X, X_1) \subset V.$$

Однако имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x}: \quad \Delta f(X, X_1) \subset V \\ \iff \forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x} \quad \forall x_1 \in X_1 \quad \forall x \in X: \quad f(x + x_1) - f(x) \subset V \\ \iff \forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x} \quad \forall x_1 \in X_1: \quad (f_{x_1} - f)(X) \subset V \\ \iff f_{\mathfrak{x}} - f \downarrow \mathcal{F}_X(X, Y) \iff f_{\mathfrak{x}} \downarrow_f \mathcal{F}_X(X, Y) \iff Tf(\mathfrak{x}) \downarrow_{Tf(0)} \mathcal{F}_X(X, Y). \end{aligned} \quad (1)$$

Последняя эквивалентность следует из определения Tf , т.е. $Tf(\mathfrak{x}) := f_{\mathfrak{x}}$, и из того, что

$$\forall x \in X \quad Tf(0)(x) = f_0(x) = f(0 + x) = f(x).$$

Однако $\mathfrak{x} \downarrow X$ – произвольный фильтр, и, следовательно, (1) эквивалентно непрерывности отображения $Tf: X \rightarrow \mathcal{F}_X(X, Y)$, $h \mapsto f_h$, в нуле, а это по определению значит, что f является $\mathcal{F}_X(X, Y)$ -глобально непрерывным.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, $X, Y \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение. Если f равномерно непрерывно на X , то оно $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ -глобально непрерывно, где $\mathcal{S}$ – произвольная система фильтров в $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 3 и из того, что псевдотопология $\mathcal{F}_X$ является наиболее сильной псевдотопологией среди псевдотопологий $\mathcal{F}_S$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая подкатегория категории топологических векторных пространств с непрерывными линейными отображениями, и пусть $\mathcal{S}$ – система фильтров в $\mathcal{A}$ такая, что $\mathcal{S} \supset \mathcal{C}_0$ и ее пополнение $\bar{\mathcal{S}}$ линейно. Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ – топологические векторные пространства. Если $f: X \rightarrow Y$ конически $\mathcal{F}_S$ -дифференцируемо в точке $x \in X$ и $g: Y \rightarrow Z$ конически $\mathcal{F}_S$ -дифференцируемо в точке $y = f(x)$, $f'(x)$ является $\mathcal{S}$ -устойчивым и отображение $g'(y)$ равномерно непрерывно, то отображение $g \circ f$ конически $\mathcal{F}_S$ -дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 вытекает, что $g'(y)$ является $\mathcal{F}_S$ -глобально непрерывным отображением, и, следовательно, условия теоремы 2 выполнены.

Ниже приведем некоторые следствия из теоремы 2; сначала рассмотрим случай конически ФВ-дифференцируемых отображений, а затем случай конически МВ-дифференцируемых отображений.

2.1. Цепное правило для конически ФВ-дифференцируемых отображений. Приведем лемму, показывающую для каких отображений $f: X \rightarrow Y$ выполняется условие В-устойчивости.

ЛЕММА 5. Пусть X, Y – топологические векторные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – положительно однородное отображение. Отображение f непрерывно в точке $0 \in X$ тогда и только тогда, когда f переводит ограниченные фильтры в X в ограниченные фильтры в Y (т.е. f является В-устойчивым).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем импликацию “ $\Rightarrow$ ”. Разобьем доказательство на три этапа.

1. Покажем, что $f(0) = 0$. Действительно, f – положительно однородное отображение, т.е.

$$\forall a > 0 \quad f(0) = f(a \cdot 0) = a \cdot f(0),$$

но это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $f(0) = 0$.

2. Если фильтр $\mathfrak{r}\mathfrak{f}$ сходится к нулю, то фильтр $\mathfrak{r}^+\mathfrak{f}$ тоже сходится к нулю. Действительно, так как $\mathfrak{r}\mathfrak{f} \downarrow$, то имеем

$$\forall U \in \text{Nb}_0(X) \quad \exists \delta > 0 \quad \exists \tilde{X} \in \mathfrak{r}: \quad I_\delta \tilde{X} \subset U.$$

Таким образом, условие $I_\delta^+ \tilde{X} \subset U$ также выполняется, откуда следует, что $\mathfrak{r}^+\mathfrak{f} \downarrow$.

3. Пусть $\mathfrak{r} \in \text{B}(X)$ – ограниченный фильтр, и пусть $V \in \text{Nb}_0(Y)$ – окрестность нуля в Y (без потери общности считаем, что она уравновешенная). На шаге 2 было показано, что $\mathfrak{r}^+\mathfrak{f} \downarrow$. Но так как отображение f является положительно однородным и непрерывным в точке $0 \in X$ и $f(0) = 0$ в силу 1, то имеем

$$f(\mathfrak{r}^+\mathfrak{f}) = \mathfrak{r}^+ f(\mathfrak{f}) \downarrow.$$

Следовательно,

$$\exists \delta > 0 \quad \exists \tilde{X} \in \mathfrak{x}: \quad I_{\delta}^{+} f(\tilde{X}) \subset V,$$

но так как V – уравновешенная окрестность и $I_1 I_{\delta}^{+} = I_{\delta}$, то

$$I_{\delta} f(\tilde{X}) \subset V,$$

т.е.

$$\mathbf{r}f(\mathfrak{x}) \downarrow Y,$$

откуда следует, что $f(\mathfrak{x})$ – ограниченный фильтр в Y .

Теперь, докажем импликацию “ $\Leftarrow$ ”.

Пусть $\mathfrak{x}$ – произвольный фильтр в X такой, что $\mathfrak{x} \downarrow$. Надо показать, что $f(\mathfrak{x})$ сходится к $f(0) = 0$. Как и выше, разобьем доказательство на три шага.

1. Так как $\mathfrak{x}$ – это фильтр в топологическом векторном пространстве X , то имеем

$$\mathfrak{x} \downarrow \iff \mathfrak{x} \supset \text{Nb}_0(X).$$

Легко видеть, что

$$f(\mathfrak{x}) \supset f(\text{Nb}_0(X)).$$

Следовательно, применяя определение псевдотопологии, достаточно показать, что $f(\text{Nb}_0(X)) \downarrow$.

2. Покажем, что

$$\mathbf{r}f(\text{Nb}_0(X)) \subset f(\mathbf{r}\text{Nb}_0(X)).$$

Действительно, возьмем $A \in \mathbf{r}f(\text{Nb}_0(X))$. Тогда существует $\delta > 0$ и существует $U \in \text{Nb}_0(X)$ (без потери общности U – уравновешенная окрестность) такая, что $A \supset I_{\delta} f(U)$. Однако выполняется соотношение

$$I_{\delta} f(U) = I_{\delta}^{+} I_1 f(U) = I_1 f(I_{\delta}^{+} U) = I_1 f(I_{\delta}^{+} I_1 U) = I_1 f(I_{\delta} U) \supset f(I_{\delta} U).$$

Таким образом, имеем

$$A \supset f(I_{\delta} U),$$

откуда следует, что $A \in f(\mathbf{r}\text{Nb}_0(X))$.

3. Так как фильтр окрестностей нуля $\text{Nb}_0(X)$ ограниченный и так как отображение f является В-устойчивым, то имеем

$$f(\text{Nb}_0(X)) = f(\mathbf{r}\text{Nb}_0(X)) \supset \mathbf{r}f(\text{Nb}_0(X)) \downarrow.$$

Наконец, из определения псевдотопологии следует, что

$$f(\text{Nb}_0(X)) \downarrow,$$

что и требовалось доказать.

Применяя предыдущую лемму и лемму 4, получаем такое следствие теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X, Y, Z – топологические векторные пространства, $f: X \rightarrow Y$ конически FB-дифференцируемо в точке $x \in X$, $g: Y \rightarrow Z$ конически FB-дифференцируемо в точке $y = f(x)$, и пусть $f'(x)$ непрерывна в точке $0 \in X$ и $g'(y)$ равномерно непрерывна. Тогда отображение $g \circ f$ конически FB-дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

2.2. Цепное правило для конически МВ-дифференцируемых отображений.

ЛЕММА 6. Пусть X и Y – топологические векторные пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно МВ-глобально непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что из непрерывности следует МВ-глобальная непрерывность.

Пусть f непрерывно, $\mathfrak{x}_1 \in C(X)$ – произвольный сходящийся фильтр в X и $\mathfrak{x}_2$ – фильтр, сходящийся в X к нулю. Тогда существует $\tilde{x}_1 \in X$ такая, что $\mathfrak{x}_1 \downarrow_{\tilde{x}_1} X$ и, следовательно,

$$\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \downarrow_{\tilde{x}_1} X.$$

Из непрерывности f следует, что

$$f(\mathfrak{x}_1) \downarrow_{f(\tilde{x}_1)} Y \quad \text{и} \quad f(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) \downarrow_{f(\tilde{x}_1)} Y,$$

т.е. в терминах окрестностей имеем

$$\forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X'_1 \in \mathfrak{x}_1 \quad \exists X_2 \in \mathfrak{x}_2: \quad f(X'_1 + X_2) - f(\tilde{x}_1) \subset V, \quad (2)$$

$$\forall V \in \text{Nb}_0(Y) \quad \exists X''_1 \in \mathfrak{x}_1: \quad f(X''_1) - f(\tilde{x}_1) \subset V. \quad (3)$$

Возьмем множество $X_1 := X'_1 \cap X''_1$. Из определения фильтра следует, что $X_1 \in \mathfrak{x}_1$, и так как $X_1 \subset X'_1$ и $X_1 \subset X''_1$, то

$$f(X_1 + X_2) - f(\tilde{x}_1) \subset V, \quad (4)$$

$$f(X_1) - f(\tilde{x}_1) \subset V. \quad (5)$$

Пусть $W \in \text{Nb}_0(Y)$ – произвольная окрестность нуля в Y . Без потери общности предположим, что W – уравновешенная окрестность. Тогда существует окрестность $V \in \text{Nb}_0(Y)$ такая, что

$$V - V \subset W.$$

Из (2)–(5) получим

$$\exists X_1 \in \mathfrak{x}_1 \quad \exists X_2 \in \mathfrak{x}_2: \quad f(X_1 + X_2) - f(X_1) \subset f(\tilde{x}_1) + V - f(\tilde{x}_1) - V = V - V \subset W,$$

тогда

$$\forall x_1 \in X_1 \quad \forall x_2 \in X_2: \quad f(x_1 + x_2) - f(x_1) \in W$$

и, таким образом, f МВ-глобально непрерывно.

Теперь докажем, что из МВ-глобальной непрерывности следует непрерывность.

Пусть f МВ-глобально непрерывно. Выберем произвольную точку $x \in X$ и предположим, что $\mathfrak{x} \downarrow_x X$ – фильтр в X , сходящийся к x . Пусть $\text{Nb}_0(X)$ – фильтр окрестностей нуля в X (известно, что $\text{Nb}_0(X) \downarrow X$). Из сходимости фильтра $\mathfrak{x}$ имеем

$$\forall U \in \text{Nb}_0(X) \quad \exists X'_1 \in \mathfrak{x}: \quad X'_1 - x \subset U$$

и, следовательно,

$$f(X'_1) \subset f(x + U). \quad (6)$$

Покажем, что

$$f(\mathfrak{x}) \downarrow_{f(x)}.$$

Пусть $W \in \text{Nb}_0(Y)$ – произвольная окрестность нуля в Y . Так как f МВ-глобально непрерывно, то имеем

$$\exists X''_1 \in \mathfrak{x}_1 \quad \exists U \in \text{Nb}_0(X) \quad \forall x_1 \in X''_1 \quad \forall u \in U: \quad f(x_1 + u) - f(x_1) \in W,$$

т.е.

$$\exists X''_1 \in \mathfrak{x}_1 \quad \exists U \in \text{Nb}_0(X) \quad \forall x_1 \in X''_1: \quad f(x_1 + U) - f(x_1) \subset W.$$

Однако x лежит в X''_1 и, следовательно,

$$f(x + U) - f(x) \subset W. \quad (7)$$

Возьмем $X_1 := X'_1 \cap X''_1$. Так как $X_1 \subset X'_1$, из (6) следует, что

$$f(X_1) \subset f(x + U). \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим

$$f(X_1) - f(x) \subset f(x + U) - f(x) \subset W.$$

Это означает, что f непрерывно в точке x . Непрерывность отображения f следует из произвольности выбора точки x .

Теперь приведем лемму, показывающую, для каких отображений f из X в Y выполняется условие С-устойчивости.

ЛЕММА 7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение между топологическими векторными пространствами X и Y . Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда f С-устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство импликации “ $\Rightarrow$ ” тривиально. Доказательство импликации “ $\Leftarrow$ ” дано в [5].

Применяя предыдущую лемму и лемму 6, можно сформулировать другое следствие из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X , Y и Z – топологические векторные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ – отображения. Если f конически МВ-дифференцируемо в точке $x \in X$ с непрерывной производной $f'(x)$ и g конически МВ-дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$ с непрерывной производной $g'(y)$, то отображение $g \circ f$ конически МВ-дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

2.3. Связь между $\mathcal{F}_S$ -глобальной непрерывностью и S -устойчивостью.

Представляется интересным вопрос, как связаны между собой свойство 1 и свойство 2 в таблице 1. Следующий пункт специально посвящен изучению связей между FB-глобальной непрерывностью и В-устойчивостью и между MB-глобальной непрерывностью и С-устойчивостью.

ЛЕММА 8. Пусть X, Y – топологические векторные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – положительно однородное FB-глобально непрерывное отображение. Тогда f является В-устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C(X) \subset V(X)$, то из FB-глобальной непрерывности следует MB-глобальная непрерывность. Из леммы 6 следует, что MB-глобальная непрерывность эквивалентна непрерывности, а из непрерывности следует непрерывность в нуле. Применяя лемму 5, получим, что отображение f является В-устойчивым.

Условие положительной однородности можно опустить в случае, когда Y является локально выпуклым топологическим векторным пространством.

ЛЕММА 9. Пусть X – топологическое векторное пространство, Y – локально выпуклое топологическое векторное пространство, и $f: X \rightarrow Y$ является FB-глобально непрерывным отображением. Тогда f является В-устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [3].

ЛЕММА 10. Пусть X, Y – топологические векторные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение. Отображение f является MB-глобально непрерывным тогда и только тогда, когда f является С-устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 6 и леммы 7.

Применяя предыдущие леммы, легко получить

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X, Y – топологические векторные пространства, пусть f конически FB-дифференцируемо в точке x (соответственно конически MB-дифференцируемо в точке x), и пусть $f'(x)$ является FB-глобально непрерывным (соответственно MB-глобально непрерывным). Тогда f конически В-дифференцируемо (соответственно конически С-дифференцируемо) в точке x .

2.4. Цепное правило для отображений между нормированными пространствами. В этом пункте полученные выше результаты применяются для изучения отображений между нормированными пространствами. Приводятся необходимые леммы и формулируются одно следствие теоремы 2, связанное с цепным правилом для конически компактно дифференцируемых отображений, и одно следствие теоремы 2, связанное с цепным правилом для конически Фреше-дифференцируемых отображений.

ЛЕММА 11 [4]. Пусть X, Y – нормированные пространства и $g: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение. Отображение g является MB-малым тогда и только тогда, когда g компактно мало.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если X, Y – произвольные топологические векторные пространства, то выполняется только импликация “ $\Rightarrow$ ”.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, и пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ конически компактно дифференцируемо в точке $x \in X$ с непрерывной производной $f'(x)$. Пусть отображение $g: Y \rightarrow Z$ конически компактно дифференцируемо в точке $y = f(x)$ и $g'(y)$ непрерывна. Тогда отображение $g \circ f$ конически компактно дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 3 и леммы 11.

ЛЕММА 12. Пусть X – нормированное пространство. Фильтр $\mathfrak{x}$ в X является ограниченным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{x}$ содержит ограниченное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [2].

ЛЕММА 13. Пусть X, Y – нормированные пространства, и пусть $r: X \rightarrow Y$ – отображение. Отображение r является ФВ-малым тогда и только тогда, когда r малое в смысле Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [2].

ЛЕММА 14. Пусть X, Y – нормированные пространства, и пусть $f: X \rightarrow Y$ – некоторое отображение. Отображение f является ФВ-глобально непрерывным тогда и только тогда, когда f равномерно непрерывно на каждом ограниченном подмножестве множества X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем импликацию “ $\Rightarrow$ ”.

По определению нужно показать, что для всех ограниченных множеств $A \subset X$ и для всех $\mathfrak{x} \downarrow X$ фильтров, сходящихся к нулю в X , выполняется соотношение

$$\Delta f(A, \mathfrak{x}) \downarrow Y,$$

которое в терминах окрестностей можно записать следующим образом:

$$\forall A \in \mathfrak{b}(X) \quad \forall W \in \text{Nb}_0(Y) \quad \forall \mathfrak{x} \downarrow X \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x} \quad \forall x_1 \in X_1 \quad \forall a \in A: \quad \Delta f(a, x_1) \in W. \quad (9)$$

Пусть A – произвольное ограниченное подмножество множества X . В силу леммы 12 фильтр $[A]$ ограничен. Из ФВ-глобальной непрерывности отображения f следует, что

$$\forall W \in \text{Nb}_0(Y) \quad \forall \mathfrak{x} \downarrow X \quad \exists A_1 \in [A] \quad \exists X_1 \in \mathfrak{x} \quad \forall a_1 \in A \quad \forall x_1 \in X_1: \quad \Delta f(a_1, x_1) \in W.$$

Но из определения фильтра $[A]$ следует, что $A_1 \supset A$ и, таким образом, условие (9) выполняется.

Теперь, докажем импликацию “ $\Leftarrow$ ”. Пусть f равномерно непрерывно на всех ограниченных подмножествах множества X . Пусть $W \in \text{Nb}_0(Y)$, $\mathfrak{x}_1 \downarrow X$ и $\mathfrak{x}_2 \in \mathfrak{B}(X)$ – произвольная окрестность нуля в Y , сходящийся фильтр в X и ограниченный фильтр в X соответственно. Тогда в силу леммы 12 существует ограниченное подмножество $A \subset X$ такое, что $A \in \mathfrak{x}_2$. Из равномерной непрерывности отображения f на этом ограниченном множестве $A \subset X$ следует, что

$$\exists X_1 \in \mathfrak{x}_1 \quad \forall x_1 \in X_1 \quad \forall a \in A: \quad \Delta f(a, x_1) \in W,$$

но W , $\mathfrak{x}_1$ и $\mathfrak{x}_2$ были выбраны произвольно, и, следовательно, f является $\mathcal{F}\mathcal{B}$ -глобально непрерывным.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $x \in X$ и отображение $f'(x)$ непрерывно в точке $0 \in X$. Пусть отображение $g: Y \rightarrow Z$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $y = f(x)$ и $g'(y)$ равномерно непрерывно на всех ограниченных подмножествах множества Y . Тогда отображение $g \circ f$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2, леммы 5, леммы 13 и леммы 14.

В случае отображений между нормированными пространствами $\mathcal{B}$ -устойчивость эквивалентна $\mathcal{b}$ -устойчивости.

ЛЕММА 15. Пусть X, Y – нормированные пространства и $f: X \rightarrow Y$ – отображение. Тогда f $\mathcal{b}$ -устойчиво (т.е. f переводит ограниченные множества в ограниченные множества) тогда и только тогда, когда f является $\mathcal{B}$ -устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем импликацию “ $\Rightarrow$ ”.

Пусть $\mathfrak{x}$ – ограниченный фильтр в X . Тогда в силу леммы 12 существует ограниченное множество $A \in \mathfrak{x}$. Но по предположению его образ $f(A)$ является ограниченным множеством в Y и фильтр $f(\mathfrak{x})$ содержит это множество. Следовательно, применяя еще раз лемму 12, получим, что $f(\mathfrak{x})$ также является ограниченным фильтром в Y .

Теперь докажем импликацию “ $\Leftarrow$ ”.

Пусть $A \subset X$ – ограниченное множество. Тогда фильтр $[A]$ также является ограниченным, так как он содержит множество A . По предположению $f([A])$ – ограниченный фильтр, следовательно, должно существовать ограниченное множество $B \in f([A])$. Но всякое множество из фильтра $f([A])$ содержит множество $f(A)$. Следовательно, $f(A)$ также является ограниченным подмножеством множества X .

Применяя теорему 13, лемму 14 и лемму 15, получаем такое следствие теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $x \in X$ такой, что $f'(x)$ переводит систему ограниченных подмножеств множества X в систему ограниченных подмножеств множества Y . Пусть отображение $g: Y \rightarrow Z$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $y = f(x)$ и $g'(y)$ равномерно непрерывно на всех ограниченных подмножествах множества Y . Тогда отображение $g \circ f$ конически Фреше-дифференцируемо в точке $x \in X$ и выполняется соотношение

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

2.5. Пример. Приведем пример, показывающий, что условие $\mathcal{F}\mathcal{S}$ -глобальной непрерывности отображения g' в теореме 2 является необходимым. Именно, приведем пример двух конически Фреше-дифференцируемых отображений таких, что их композиция не является конически Фреше-дифференцируемым отображением из-за

того, что производная второго отображения не является равномерно непрерывной на некотором ограниченном множестве.

Рассмотрим гильбертово пространство ℓ^2 с обычным базисом векторов $e_1 := (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0, \dots)$ и т.д. Введем обозначение

$$a_j := \frac{\sqrt{2}}{2} e_j + \frac{\sqrt{2}}{2} e_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что a_j лежит в S^1 для всех $j \in \mathbb{N}$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ возьмем $b_j \in S^1 \cap (\text{lin}\{e_j, e_{j+1}\})$, где через $\text{lin } A$ обозначено векторное подпространство, порожденное множеством A и такое, что $\|a_j - b_j\| = 1/j$.

Шар $B_{1/k}(a_k)$ — это множество всех элементов x пространства ℓ^2 таких, что $\|x - a_k\| \leq 1/k$, т.е.

$$B_{1/k}(a_k) := \left\{ x \in \ell^2 \mid \|x - a_k\| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию g на S^1 , определенную следующим правилом:

$$g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 1 - k\|x - a_k\|, & \text{если } x \in B_{1/k}(a_k) \cap S^1 \text{ при некотором } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь определим отображения f и φ следующими формулами:

$$f: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{b_k}{k}, & \text{если } x = \frac{a_k}{k}, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi: \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = s \cdot g(y), \quad \text{если } x = s \cdot y \text{ для некоторых } s \geq 0, y \in S^1,$$

т.е. φ является положительно однородной функцией, порожденный отображением g .

Покажем, что оба отображения f и φ конически ФВ-дифференцируемы в точке $x = 0$, но их композиция $\varphi \circ f$ не является конически ФВ-дифференцируемой в точке $x = 0$.

Сначала напомним, что мы имеем дело с нормированными пространствами. Следовательно, ФВ-малость эквивалентна малости в смысле Фреше. Поэтому вместо конической ФВ-дифференцируемости будем рассматривать коническую дифференцируемость по Фреше.

1. Покажем, что отображение f конически Фреше-дифференцируемо в точке $x = 0$ и имеет коническую производную $f'(0) = \text{id}$.

Так как $f(0) = 0$, то для любой $h \in \ell^2$ можно написать

$$f(0 + h) = f(0) + \text{id}(h) + r(h),$$

где

$$r(h) = \begin{cases} \frac{b_k - a_k}{k}, & \text{если } h = \frac{a_k}{k}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как всякое линейное отображение положительно однородно и тождественное преобразование линейно, то остается доказать, что отображение $r: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ является малым в смысле Фреше.

Имеем

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \begin{cases} \frac{\|(b_k - a_k)/k\|}{\|a_k/k\|} = \|b_k - a_k\| = \frac{1}{k} = \|h\|, & \text{если } h = \frac{a_k}{k}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

2. Покажем, что отображение φ конически Фреше-дифференцируемо в точке $x = 0$ и имеет коническую производную $\varphi'(0) = \varphi$.

Так как φ по построению является положительно однородной функцией, то имеем $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi(0 + h) = \varphi(0) + \varphi(h) + 0.$$

Очевидно, что 0 является малым в смысле Фреше, и, таким образом, φ конически Фреше-дифференцируемо в нуле и имеет производную φ .

3. Покажем, что отображение $\varphi \circ f$ не является конически Фреше-дифференцируемым в точке $x = 0$ с производной $\varphi'(0) \circ f'(0)$.

Действительно,

$$(\varphi \circ f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \frac{a_k}{k} \text{ для некоторых } k \in \mathbb{N}, \\ \varphi(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если бы φ было производной от $\varphi \circ f$ в 0, то должно было бы выполняться соотношение

$$(\varphi \circ f)(0 + h) = 0 + \varphi(h) + r(h) \quad \forall h \in \ell^2,$$

где r мало. Но

$$r(h) = (\varphi \circ f)(h) - \varphi(h) = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & \text{если } h = \frac{a_k}{k}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

так что отображение r не является малым в смысле Фреше. Действительно,

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \begin{cases} 1, & \text{если } h = \frac{a_k}{k}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и из определения точек a_k следует, что

$$\left\| \frac{a_k}{k} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

но

$$\frac{\|r(a_k/k)\|}{\|a_k/k\|} = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, видно, что ФВ-цепное правило в этом случае не выполняется. Конечно, это обусловлено тем, что отображение $\varphi'(0) = \varphi$ не является равномерно непрерывным на некотором ограниченном множестве (см. следствие 7).

Действительно, отображение $\varphi'(0)$ не является равномерно непрерывным на единичной сфере S^1 . Проверим это. Нужно показать, что выполняется следующее соотношение:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in S^1: \quad \|x - y\| < \delta \wedge \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \varepsilon.$$

Определим

$$k_0 := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\delta} < k \right\}.$$

По построению точки $x = a_{k_0}$ и $y = b_{k_0}$ удовлетворяют условиям

$$\|x - y\| < \delta \quad \text{и} \quad \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq 1,$$

следовательно, указанное выше соотношение выполняется для $\varepsilon = 1$.

Таблица 2. Условия на конические производные, достаточные для справедливости цепного правила

X, Y, Z	Дифференцируемость	Условие на $f'(x)$	Условие на $g'(f(x))$
Топологические векторные пространства	ФВ	непрерывность в нуле	ФВ-глобальная непрерывность
	МВ	непрерывность	непрерывность
Нормированные пространства	Фреше	непрерывность в нуле	равномерная непрерывность на всех ограниченных подмножествах множества Y
	компактная	непрерывность	непрерывность

3. Заключение

Подытожим наши наиболее важные результаты относительно конических производных. В приведенной таблице 2 отображение $f: X \rightarrow Y$ (соответственно $g: Y \rightarrow Z$) конически дифференцируемо в точке $x \in X$ (соответственно в точке $y = f(x) \in Y$); предполагается, что их производные $f'(x)$ и $g'(f(x))$ имеют свойства, соответствующие рассматриваемому типу дифференцируемости. Эти производные $f'(x)$ и $g'(f(x))$

также должны удовлетворять дополнительным свойствам, для того чтобы для них выполнялось цепное правило. Эти свойства указаны в таблице 2.

Автор выражает благодарность профессору В. И. Авербуху за полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Псевдотопологии и дифференцирование”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1972, № 2, 3–9.
- [2] A. Frölicher, W. Bucher, *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture Notes in Math., **30**, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [3] В. И. Авербух, “О непрерывности компонирования”, *Math. Nachr.*, **75** (1976), 153–183.
- [4] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Различные определения производной в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **23**:4(142) (1968), 67–116.
- [5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 á 4*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

И. Водова

Silesian University in Opava, Чехия

E-mail: JirinaVodova@seznam.cz,

Jirina.Vodova@math.slu.cz

Поступило

20.08.2010

Исправленный вариант

07.05.2012