Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шумилова, Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 441–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:23:14

УДК 517.958

Об усреднении задачи вязкоупругости с долговременной памятью

В. В. Шумилова

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая малые колебания ε -периодического вязкоупругого материала с долговременной памятью. С помощью метода двухмасштабной сходимости строится система усредненных уравнений и доказывается сильная сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений допредельных задач к решению усредненной задачи по норме пространства L^2 .

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm8897

1. Введение. При исследовании различных физических процессов, протекающих в сильно неоднородных средах, часто возникает необходимость построения усредненных или эффективных моделей для этих сред. Среди множества моделей сильно неоднородных сред можно выделить модели вязкоупругих сред с периодической микроструктурой. Из последних, в свою очередь, можно выделить модели вязкоупругих материалов с мгновенной памятью, описываемые системой дифференциальных уравнений, и модели вязкоупругих материалов с долговременной памятью, описываемые системой интегро-дифференциальных уравнений.

Задачи усреднения моделей вязкоупругих материалов с мгновенной памятью рассматривались в ряде работ (см., например, [1]–[6]). При этом интересным оказался тот факт, что построенные усредненные модели описывались системами интегро-дифференциальных уравнений, а значит, соответствовали вязкоупругим материалам с долговременной памятью.

В данной работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая малые колебания ε -периодического вязкоупругого материала с долговременной памятью. При построении системы усредненных уравнений, которые также оказываются интегро-дифференциальными, используется метод двухмасштабной сходимости, введенный Нгуэтсенгом [7] и развитый в [8]–[11]. Кроме того, в работе доказывается сильная сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений допредельных задач к решению усредненной задачи по норме пространства L^2 .

2. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^3$, $Y = (0, 1)^3$ – ячейка периодичности в $\mathbb{R}^3$, $\rho(y)$ – Y -периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\rho(y) \in L_{\text{per}}^\infty(Y), \quad 1 \leq \rho(y) \leq \rho_0 \quad \forall y \in Y, \quad \rho_0 = \text{const} > 1.$$

Введем функцию

$$G(t) = - \sum_{n=1}^N C_n e^{-\gamma_n t}, \quad \gamma_n, C_n = \text{const} > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

и определим три системы Y -периодических коэффициентов

$$a_{ijkh}(y), b_{ijkh}(y), w_{ijkh}(y) \in L_{\text{per}}^\infty(Y), \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 3,$$

удовлетворяющих условиям симметрии

$$a_{ijkh}(y) = a_{jikh}(y) = a_{khij}(y) \quad (\text{аналогично для } b_{ijkh}(y) \text{ и } w_{ijkh}(y)),$$

а также условиям положительной определенности

$$(a_{ijkh}(y) - C_0 w_{ijkh}(y)) \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha_1 \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad b_{ijkh}(y) \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha_2 \xi_{ij} \xi_{ij}, \quad (2.1)$$

$$w_{ijkh}(y) \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha_3 \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad (2.2)$$

$$C_0 = \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\gamma_n}, \quad \alpha_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим следующую задачу вязкоупругости:

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i(x, t) & \text{в } \Omega \times (0, T); \\ u^\varepsilon(x, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in \Omega; \\ u^\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0; \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\rho^\varepsilon(x) = \rho(\varepsilon^{-1}x)$, $f_i(x, t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $i = 1, 2, 3$.

Будем предполагать, что уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkh}^\varepsilon(x) e_{kh}(u^\varepsilon) + b_{ijkh}^\varepsilon(x) e_{kh}(\partial_t u^\varepsilon) + d_{ijkh}^\varepsilon(x, t) * e_{kh}(u^\varepsilon),$$

где

$$e_{kh}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right), \quad g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(t-s) g_2(s) ds,$$

$$\partial_t u^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \quad a_{ijkh}^\varepsilon(x) = a_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x), \quad b_{ijkh}^\varepsilon(x) = b_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x),$$

$$d_{ijkh}^\varepsilon(x, t) = d_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x, t), \quad d_{ijkh}(y, t) = w_{ijkh}(y) G(t).$$

Таким образом, задача (2.3) представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений линейной вязкоупругости, дополненную однородными начальными и граничными условиями. При этом уравнение состояния содержит упругий

член, вязкоупругий член с мгновенной памятью и член с долговременной памятью, экспоненциально затухающей при $t \rightarrow +\infty$.

Будем говорить, что вектор-функция u^ε такая, что

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad (2.4)$$

$$\partial_t u^\varepsilon \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad \partial_{tt} u^\varepsilon \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \quad (2.5)$$

есть решение задачи (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \partial_{tt} u^\varepsilon \cdot v \, dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) \, dx + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\partial_t u^\varepsilon) e_{ij}(v) \, dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u^\varepsilon)) e_{ij}(v) \, dx \\ & = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.6)$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и начальным условиям

$$u^\varepsilon(0) = \partial_t u^\varepsilon(0) = 0. \quad (2.7)$$

Следует отметить, что из включений (2.4), (2.5), в частности, следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега $u^\varepsilon \in C(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ и $\partial_t u^\varepsilon \in C(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ (см. [12; гл. 3]). Стало быть, начальные условия (2.7) имеют смысл.

3. Существование и единственность решения. Перейдем к доказательству существования и единственности решения задачи (2.3) для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Пусть $\{w^l(x)\}_{l \in \mathbb{N}}$ – ортогональный базис в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ будем искать по методу Галеркина приближенное решение $u_m^\varepsilon(x, t)$ задачи в виде

$$u_m^\varepsilon(x, t) = \sum_{l=1}^m g_{lm}(t) w^l(x), \quad (3.1)$$

где функции $g_{lm}(t)$ удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} \rho^\varepsilon w^l \cdot w^r \, dx \right) g_{lm}'' + \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) \, dx \right) g_{lm} \\ & \quad + \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) \, dx \right) g_{lm}' \\ & \quad + \sum_{l=1}^m \left(\int_{\Omega} w_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) \, dx \right) (G(t) * g_{lm}) \\ & = \int_{\Omega} f \cdot w^r \, dx, \quad 1 \leq r \leq m, \end{aligned} \quad (3.2)$$

и однородным начальным условиям

$$g_{rm}(0) = g_{rm}'(0) = 0, \quad 1 \leq r \leq m. \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_r(t) &= \int_{\Omega} f \cdot w^r dx, & R_{rl}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} \rho^{\varepsilon} w^l \cdot w^r dx, & A_{rl}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} a_{ijkh}^{\varepsilon} e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx, \\ B_{rl}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} b_{ijkh}^{\varepsilon} e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx, & W_{rl}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} w_{ijkh}^{\varepsilon} e_{kh}(w^l) e_{ij}(w^r) dx. \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (3.2) можно записать в виде

$$\sum_{l=1}^m R_{rl}^{\varepsilon} g_{lm}'' + \sum_{l=1}^m B_{rl}^{\varepsilon} g_{lm}' + \sum_{l=1}^m A_{rl}^{\varepsilon} g_{lm} + \sum_{l=1}^m W_{rl}^{\varepsilon} (G(t) * g_{lm}) = F_r, \quad 1 \leq r \leq m. \quad (3.4)$$

Продолжим вектор-функцию $f(x, t)$ нулем при $t < 0$ и $t > T$ и применим преобразование Лапласа $g(t) \rightarrow \hat{g}(\lambda)$ к системе интегро-дифференциальных уравнений (3.4). Учитывая (3.3), получаем

$$\sum_{l=1}^m (\lambda^2 R_{rl}^{\varepsilon} + \lambda B_{rl}^{\varepsilon} + A_{rl}^{\varepsilon} + \hat{G}(\lambda) W_{rl}^{\varepsilon}) \hat{g}_{lm}(\lambda) = \hat{F}_r(\lambda), \quad 1 \leq r \leq m, \quad (3.5)$$

где $\hat{g}_{lm}(\lambda)$ и $\hat{F}_r(\lambda)$ есть изображения Лапласа функций $g_{lm}(t)$ и $F_r(t)$ соответственно,

$$\hat{G}(\lambda) = - \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda + \gamma_n}.$$

Систему уравнений (3.5) можно также записать в виде

$$\sum_{l=1}^m Z_{rl}^{\varepsilon}(\lambda) q_{lm}(\lambda) = \hat{F}_r(\lambda), \quad 1 \leq r \leq m, \quad (3.6)$$

где $Z_{rl}^{\varepsilon}(\lambda)$ – многочлены степени $N + 2$,

$$q_{lm}(\lambda) = \frac{\hat{g}_{lm}(\lambda)}{S(\lambda)}, \quad S(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda + \gamma_n).$$

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений (3.6) для неизвестных $q_{lm}(\lambda)$. В силу невырожденности матрицы $R^{\varepsilon} = \{R_{rl}^{\varepsilon}\}$ определитель $D^{\varepsilon}(\lambda)$ матрицы системы (3.6) есть многочлен степени $(N + 2)m$ (см. [13; гл. 6]). Решая систему (3.6), например, методом Крамера, при $D^{\varepsilon}(\lambda) \neq 0$ получаем

$$q_{rm}(\lambda) = \frac{1}{D^{\varepsilon}(\lambda)} \sum_{l=1}^m P_{rl}^{\varepsilon}(\lambda) \hat{F}_l(\lambda), \quad r = 1, \dots, m,$$

где $P_{rl}^{\varepsilon}(\lambda)$ – многочлены самой большой степени $(N + 2)(m - 1)$.

Таким образом, решение системы (3.5) имеет вид

$$\hat{g}_{rm}(\lambda) = \sum_{l=1}^m \hat{Q}_{rl}^{\varepsilon}(\lambda) \hat{F}_l(\lambda), \quad r = 1, \dots, m,$$

где

$$\widehat{Q}_{rl}^\varepsilon(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{D^\varepsilon(\lambda)} P_{rl}^\varepsilon(\lambda), \quad r, l = 1, \dots, m,$$

есть рациональные дроби, причем степень числителя не менее, чем на 2, меньше степени знаменателя. Следовательно, функции $\widehat{Q}_{rl}^\varepsilon(\lambda)$ обладают оригиналами $Q_{rl}^\varepsilon(t)$, которые можно вычислить посредством их разложения на простейшие дроби (см. [14; с. 47], а также [15; с. 166]). Отсюда следует, что существует единственное решение

$$g_{rm}(t) = \sum_{l=1}^m Q_{rl}^\varepsilon(t) * F_l(t), \quad r = 1, \dots, m,$$

системы уравнений (3.4) с начальными условиями (3.3).

Таким образом, для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует единственная функция u_m^ε вида (3.1), удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \partial_{tt} u_m^\varepsilon \cdot w^r dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(w^r) dx + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\partial_t u_m^\varepsilon) e_{ij}(w^r) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij}(w^r) dx \\ & = \int_{\Omega} f \cdot w^r dx, \quad 1 \leq r \leq m, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и начальным условиям

$$u_m^\varepsilon(x, 0) = \partial_t u_m^\varepsilon(x, 0) = 0.$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые априорные оценки для u_m^ε и $\partial_t u_m^\varepsilon$. С этой целью умножим (3.7) на $g'_{rm}(t)$ и просуммируем по $r = 1, \dots, m$. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \partial_{tt} u_m^\varepsilon \cdot \partial_t u_m^\varepsilon dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) dx + \int_{\Omega} b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\partial_t u_m^\varepsilon) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) dx \\ & = \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u_m^\varepsilon dx, \end{aligned} \quad (3.8)$$

откуда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \partial_{tt} u_m^\varepsilon \cdot \partial_t u_m^\varepsilon dx + \int_{\Omega} a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) dx + \int_{\Omega} (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) dx \\ & \leq \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u_m^\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & (d_{ijkh}^\varepsilon * e_{kh}(u_m^\varepsilon)) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) \\ & \geq -C_0 w_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{C_n}{\gamma_n} w_{ijkh}^\varepsilon (e^{-\gamma_n t} * e_{kh}(\partial_t u_m^\varepsilon)) (e^{-\gamma_n t} * e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon)) \right), \end{aligned}$$

поэтому из (3.9) следует, что

$$\frac{1}{2} \partial_t z^\varepsilon \leq \int_{\Omega} f \cdot \partial_t u_m^\varepsilon dx, \quad \partial_t z^\varepsilon \leq \int_{\Omega} |f|^2 dx + z^\varepsilon,$$

где

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(t) = & \int_{\Omega} (\rho^\varepsilon |\partial_t u_m^\varepsilon|^2 + (a_{ijkh}^\varepsilon - C_0 w_{ijkh}^\varepsilon) e_{kh}(u_m^\varepsilon) e_{ij}(u_m^\varepsilon)) dx \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\gamma_n} \int_{\Omega} w_{ijkh}^\varepsilon (e^{-\gamma_n t} * e_{kh}(\partial_t u_m^\varepsilon)) (e^{-\gamma_n t} * e_{ij}(\partial_t u_m^\varepsilon)) dx. \end{aligned}$$

Теперь, используя неравенства Гронуолла и Корна, из последнего неравенства получаем следующие оценки:

$$\|u_m^\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|_3, \quad \|\partial_t u_m^\varepsilon\|_2 \leq C \|f\|_3, \quad (3.10)$$

где

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}, \quad \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}, \quad \|\cdot\|_3 \equiv \|\cdot\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

а C обозначает различные положительные константы, не зависящие от ε и m .

Кроме того, из (3.8), (3.10) и неравенства Корна следует оценка

$$\|\nabla \partial_t (u_m^\varepsilon)_i\|_3 \leq C \|f\|_3. \quad (3.11)$$

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (2.3) допускает единственное решение u^ε , удовлетворяющее условиям (2.4), (2.5). Более того, имеют место оценки

$$\|u^\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|_3, \quad \|\partial_t u^\varepsilon\|_2 \leq C \|f\|_3, \quad \|\nabla \partial_t u_i^\varepsilon\|_3 \leq C \|f\|_3, \quad (3.12)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (3.10), (3.11) следует, что последовательности u_m^ε и $\partial_t u_m^\varepsilon$ равномерно ограничены по m (и ε) в $L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$ и $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$ соответственно. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $u_{m'}^\varepsilon$ такую, что при $m' \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_{m'}^\varepsilon &\rightarrow u^\varepsilon && \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)); \\ \partial_t u_{m'}^\varepsilon &\rightarrow \partial_t u^\varepsilon && \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что $u^\varepsilon(0) = \partial_t u^\varepsilon(0) = 0$ (см. [12; гл. 3]). Более того, переходя в (3.10), (3.11) к пределу при $m' \rightarrow \infty$, сразу получаем оценки (3.12).

Теперь умножим (3.7) на произвольную функцию $\psi(t) \in C^1[0,T]$ и проинтегрируем по $t \in [0,T]$. Затем в полученном тождестве проинтегрируем по частям первый интеграл в левой части и перейдем к пределу при $m' \rightarrow \infty$. В результате заключаем, что u^ε удовлетворяет интегральному тождеству (2.6). Кроме того, из (2.6) следует, что $\partial_{tt} u^\varepsilon \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ (см. [12; гл. 3]).

Из оценок (3.12), в частности, вытекает, что $u^\varepsilon \equiv 0$ при $f \equiv 0$. Это означает единственность решения u^ε задачи (2.3) при фиксированном $\varepsilon > 0$, и теорема доказана.

Следует отметить, что если $f(x, t) \in H^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, то для решения u^ε задачи (2.3) имеют место также следующие оценки:

$$\|\partial_{tt} u^\varepsilon\|_2 \leq C \|f\|_{H^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}, \quad \|\nabla \partial_{tt} u_i^\varepsilon\|_2 \leq C \|f\|_{H^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}. \quad (3.13)$$

4. Двухмасштабная сходимость. Напомним определение и основные свойства двухмасштабной сходимости.

Рассмотрим последовательность функций $u^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$, равномерно ограниченную в $L^2(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $u^\varepsilon(x)$ слабо двухмасштабно сходится к функции $u(x, y) \in L^2(\Omega \times Y, dx \times dy)$, $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(\varepsilon^{-1}x) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) \varphi(x) \psi(y) dx dy$$

для любых пробных функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi(y) \in C_{\text{per}}^\infty(Y)$.

Понятие слабой двухмасштабной сходимости является обобщением понятия слабой сходимости: обычный слабый предел получается из слабого двухмасштабного предела усреднением по периоду, т.е.

$$\text{если } u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y), \quad \text{то } u^\varepsilon(x) \rightharpoonup \int_Y u(x, y) dy \quad \text{в } L^2(\Omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $u^\varepsilon(x)$ сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x, y)$, $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) v^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} \int_Y u(x, y) v(x, y) dx dy, \quad (4.1)$$

как только $v^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, y)$.

Нам потребуются следующие свойства двухмасштабной сходимости, доказательства которых можно найти в работах [7]–[11].

(i) Если $a \in L_{\text{per}}^\infty(Y)$ и $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то $a(\varepsilon^{-1}x) u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} a(y) u(x, y)$.

(ii) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} \int_Y |u(x, y)|^2 dx dy.$$

(iii) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y |u(x, y)|^2 dx dy,$$

то $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$.

(iv) Если $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и предельная функция $u(x, y)$ является достаточно гладкой, например, $u(x, y) \in L^2(\Omega, C_{\text{per}}(Y))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x) - u(x, \varepsilon^{-1}x)|^2 dx = 0.$$

(v) Пусть $u^\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} (|u^\varepsilon|^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2) dx < C,$$

где $C > 0$ не зависит от ε . Тогда, с точностью до выделения подпоследовательности, $u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u(x)$ и $\nabla u^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)$, где $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R})$.

5. Исходная задача в образах Лапласа. Применим преобразование Лапласа $g(t) \rightarrow \hat{g}(\lambda)$ к тождеству (2.6). В результате приходим к следующей задаче: для фиксированного λ такого, что $\text{Re } \lambda > \lambda_0 > 0$, где λ_0 достаточно велико, найти $u^\varepsilon(\lambda) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon u^\varepsilon \cdot v dx + \int_{\Omega} q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (5.1)$$

где

$$q_{ijkh}^\varepsilon(x, \lambda) = q_{ijkh}(\varepsilon^{-1}x, \lambda), \quad q_{ijkh}(y, \lambda) = a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) + d_{ijkh}(y, \lambda),$$

$$d_{ijkh}(y, \lambda) = w_{ijkh}(y)G(\lambda), \quad G(\lambda) = - \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda + \gamma_n}.$$

Здесь и далее в некоторых случаях (если это не вызывает недоразумений) аргумент λ и значок $\hat{}$ в обозначениях изображений Лапласа для простоты записи опускаются.

Используя свойства двухмасштабной сходимости, исследуем асимптотическое поведение решения u^ε задачи (5.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Полагая в (5.1) $v = u^\varepsilon$ и применяя неравенство Корна, получим следующие оценки, равномерные по ε :

$$\int_{\Omega} |u^\varepsilon|^2 dx \leq C, \quad \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε . Из этих оценок и свойства (v) двухмасштабной сходимости непосредственно следует, что без ограничения общности можно считать, что

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2} u(x), \quad u(x) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (5.2)$$

$$\nabla u^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y), \quad u_1(x, y) \in L^2(\Omega, \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3). \quad (5.3)$$

Кроме того, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Имеет место слабая сходимост*

$$q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) \rightharpoonup q_{ijkh}^0 e_{kh}(u) \quad \text{в } L^2(\Omega). \quad (5.4)$$

Здесь

$$q_{ijkh}^0(\lambda) = \int_Y (q_{ijkh} + q_{ijlm} e_{lm}^y(Q^{kh})) dy, \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 3, \quad (5.5)$$

а вектор-функции $Q^{kh}(y, \lambda) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ есть решения периодических задач

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (q_{ijkh} + q_{ijlm} e_{lm}^y(Q^{kh})) = 0, \quad y \in Y. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (5.1) пробную функцию

$$v = \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x), \quad w(y) \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^3, \quad \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

и перейдем к двухмасштабному пределу согласно соотношениям (5.2), (5.3). В результате, учитывая произвольность выбора функции $\varphi(x)$, приходим к следующей периодической задаче для $u_1(x, y)$:

$$\int_Y q_{ijkh}(e_{kh}(u) + e_{kh}^y(u_1))e_{ij}^y(w) dy = 0. \quad (5.7)$$

Будем искать решение в виде

$$u_1(x, y, \lambda) = Q^{kh}(y, \lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, \lambda), \quad x \in \Omega, \quad y \in Y, \quad (5.8)$$

где $Q^{kh}(y, \lambda) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3$. После подстановки (5.8) в (5.7) получаем

$$\int_Y (q_{ijkh} + q_{ijlm}e_{lm}^y(Q^{kh}))e_{ij}^y(w) dy = 0.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, приходим к выводу, что $Q^{kh}(y, \lambda)$ есть решения задач (5.6). Далее, из свойств двухмасштабной сходимости имеем

$$\begin{aligned} q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) &\xrightarrow{2} q_{ijkh}(e_{kh}(u) + e_{kh}^y(u_1)), \\ q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) &\rightharpoonup \int_Y q_{ijkh}(e_{kh}(u) + e_{kh}^y(u_1)) dy \quad \text{в } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (5.5) и (5.8) получаем

$$\int_Y q_{ijkh}(e_{kh}(u) + e_{kh}^y(u_1)) dy = q_{ijkh}^0 e_{kh}(u),$$

что и требовалось доказать.

6. Усредненная задача в образах Лапласа. Подставим в (5.1) пробную функцию $v(x) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, не зависящую от ε . Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя соотношения (5.2)–(5.4), получаем

$$\lambda^2 \tilde{\rho} \int_\Omega u \cdot v dx + \int_\Omega q_{ijkh}^0 e_{kh}(u) e_{ij}(v) dx = \int_\Omega f \cdot v dx, \quad (6.1)$$

где

$$\tilde{\rho} \equiv \int_Y \rho(y) dy.$$

Из (6.1) следует, что

$$\lambda^2 \tilde{\rho} \int_\Omega u_i v_i dx - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh}^0 \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right) v_i dx = \int_\Omega f_i v_i dx.$$

Таким образом, усредненная задача в образах Лапласа записывается в следующем виде:

$$\lambda^2 \tilde{\rho} u_i(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh}^0(\lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, \lambda) \right) + f_i(x, \lambda), \quad x \in \Omega. \quad (6.2)$$

7. Усредненная задача в первоначальных переменных. Выполним обратное преобразование Лапласа в задаче (5.6). Пусть $Q^{kh}(y, t)$ – оригинал вектор-функции $Q^{kh}(y, \lambda)$. Нетрудно видеть, что $Q^{kh}(y, t)$ зависит от функции Дирака $\delta(t)$. Представим $Q^{kh}(y, t)$ в следующем виде:

$$Q^{kh}(y, t) = Z^{kh}(y)\delta(t) + W^{kh}(y, t). \quad (7.1)$$

Покажем, что вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ можно выбрать не зависящими от $\delta(t)$. Действительно, сначала определим $Z^{kh}(y) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ как решение периодической задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(b_{ijkh} + b_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh})) = 0, \quad y \in Y. \quad (7.2)$$

Далее обозначим $D^{kh}(y) = W^{kh}(y, 0)$ и определим вектор-функцию $D^{kh}(y) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3$ как решение периодической задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(b_{ijlm}e_{lm}^y(D^{kh}) + a_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh}) + a_{ijkh}) = 0, \quad y \in Y. \quad (7.3)$$

Тогда из (5.6) следует, что $W^{kh}(y, t) \in L^2(0, T; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}^3)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{ijlm}e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm}e_{lm}^y(\partial_t W^{kh}) + d_{ijlm} * e_{lm}^y(W^{kh})) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y_j}(d_{ijkh} + d_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh})), \quad y \in Y, \end{aligned} \quad (7.4)$$

и начальному условию

$$W^{kh}(y, 0) = D^{kh}(y), \quad y \in Y. \quad (7.5)$$

Существование и единственность решения для задач (7.2) и (7.3) доказываются с помощью леммы Лакса–Мильграма, а для задачи (7.4), (7.5) – с помощью аппроксимации по методу Галеркина.

Далее, из (7.1) и (5.5) имеем

$$\begin{aligned} Q^{kh}(y, \lambda) &= Z^{kh}(y) + W^{kh}(y, \lambda), \\ q_{ijkh}^0(\lambda) &= \int_Y (a_{ijkh} + a_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh})) dy + \lambda \int_Y (b_{ijkh} + b_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh})) dy \\ &+ \int_Y (a_{ijlm}e_{lm}^y(W^{kh}) + \lambda b_{ijlm}e_{lm}^y(W^{kh}) + d_{ijlm}e_{lm}^y(W^{kh})) dy \\ &+ \int_Y (d_{ijkh} + d_{ijlm}e_{lm}^y(Z^{kh})) dy. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Пусть $u(x, t)$ – оригинал вектор-функции $u(x, \lambda)$, а $q_{ijkh}^0(t)$ – оригиналы коэффициентов $q_{ijkh}^0(\lambda)$, $1 \leq i, j, k, h \leq 3$. Тогда из (6.2) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh}^0(t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h} \right) + f_i(x, t) \quad \text{в } \Omega \times (0, T).$$

Учитывая (7.6), окончательно сформулируем усредненную задачу в первоначальных переменных в следующем виде: найти $u \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ такую, что

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t) & \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u(0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0, \end{cases} \quad (7.7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \alpha_{ijkh} \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \beta_{ijkh} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_h \partial t} + g_{ijkh}(t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \\ \alpha_{ijkh} &= \int_Y (a_{ijkh} + a_{ijlm} e_{lm}^y(Z^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y(D^{kh})) dy, \\ \beta_{ijkh} &= \int_Y (b_{ijkh} + b_{ijlm} e_{lm}^y(Z^{kh})) dy, \\ g_{ijkh}(t) &= \int_Y (a_{ijlm} e_{lm}^y(W^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y(\partial_t W^{kh}) + d_{ijlm} * e_{lm}^y(W^{kh})) dy \\ &\quad + \int_Y (d_{ijkh} + d_{ijlm} e_{lm}^y(Z^{kh})) dy, \end{aligned}$$

а $Z^{kh}(y)$, $D^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ – решения периодических задач (7.2), (7.3) и (7.4), (7.5) соответственно.

Теперь запишем коэффициенты $q_{ijkh}(y, \lambda)$ в виде

$$q_{ijkh}(y, \lambda) = a_{ijkh}(y) - C_0 w_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) + w_{ijkh}(y) \sum_{n=1}^N \frac{C_n \lambda}{\gamma_n(\lambda + \gamma_n)}.$$

Очевидно, что для любого $\lambda > 0$ в силу условий (2.1) и (2.2) имеем

$$q_{ijkh}(y, \lambda) \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha_1 \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}.$$

Тогда из формулы

$$q_{ijkh}^0(\lambda) \xi_{ij} \xi_{kh} = \inf_{w \in C_{\text{per}}^\infty(Y)^3} \int_Y q_{ijkh}(y, \lambda) (\xi_{ij} + e_{ij}(w)) (\xi_{kh} + e_{kh}(w)) dy$$

(см. [11]) следует, что при $\lambda > 0$ коэффициенты $q_{ijkh}^0(\lambda)$ удовлетворяют условиям симметрии и положительной определенности вида (2.2), поэтому существует единственное решение усредненной задачи (7.7).

8. Сильная двухмасштабная сходимость. Перейдем к доказательству сильной двухмасштабной сходимости в соотношении (5.2). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u^\varepsilon(x, \lambda)$ – решение задачи (5.1). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u^\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow u(x, \lambda) \quad \text{в } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (8.1)$$

$$e(u^\varepsilon(x, \lambda)) \xrightarrow{2} e(u(x, \lambda)) + e_y(u_1(x, y, \lambda)), \quad (8.2)$$

где $u(x, \lambda)$ – решение усредненной задачи (6.2),

$$u_1(x, y, \lambda) = Q^{kh}(y, \lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_h}(x, \lambda),$$

а $Q^{kh}(y, \lambda)$ – решения периодических задач (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (5.1) в качестве пробной функцию $v(x) = u^\varepsilon(x)$ и перейдем к нижнему пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lambda^2 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(u^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot u(x) dx. \quad (8.3)$$

Теперь возьмем в интегральном тождестве (6.1) пробную функцию $v(x) = u(x)$. Имеем

$$\lambda^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} q_{ijkh}^0 e_{kh}(u) e_{ij}(u) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot u(x) dx. \quad (8.4)$$

С другой стороны, по свойствам (i), (ii) двухмасштабной сходимости

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 dx \geq \tilde{\rho} \int_{\Omega} |u|^2 dx,$$

а также (см. [11; лемма 9.7])

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} q_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^\varepsilon) e_{ij}(u^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} q_{ijkh}^0 e_{kh}(u) e_{ij}(u) dx.$$

Поскольку правые части (8.3) и (8.4) равны, в каждом неравенстве должно выполняться равенство. Следовательно, с учетом того, что

$$\int_{\Omega} q_{ijkh}^0 e_{kh}(u) e_{ij}(u) dx \leq \int_{\Omega} \int_Y q_{ijkh}(e_{kh}(u) + e_{kh}^y(u_1))(e_{ij}(u) + e_{ij}^y(u_1)) dx dy$$

(см. [11; лемма 9.7]), утверждение теоремы следует из (4.1) и свойств (i), (iii) двухмасштабной сходимости.

Возвращаясь к первоначальным переменным x и t , из оценок (3.12) получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightarrow u & * \text{-слабо в } L^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ \partial_t u^\varepsilon &\rightarrow \partial_t u & * \text{-слабо в } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Более того, если $f(x, t) \in H^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, то из оценок (3.13) мы видим, что

$$u^\varepsilon \in C^1(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$$

(см. [12; гл. 3]). В этом случае из теоремы 2 следует более точный результат о сходимости решений допредельных задач (2.3) к решению усредненной задачи (7.7).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ – решение задачи (2.3) и $v^\varepsilon(x, t) = \partial_t u^\varepsilon(x, t)$. Тогда для всех $t \in [0, T]$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad v^\varepsilon(x, t) \rightarrow v(x, t) \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad (8.5)$$

$$e(u^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(u(x, t)) + e_y(u_1(x, y, t)), \quad e(v^\varepsilon(x, t)) \xrightarrow{2} e(v(x, t)) + e_y(v_1(x, y, t)). \quad (8.6)$$

Здесь $u(x, t)$ – решение усредненной задачи (7.7),

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \partial_t u(x, t), \quad v_1(x, y, t) = \partial_t u_1(x, y, t), \\ u_1(x, y, t) &= Z^{kh}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + W^{kh}(y, t) * \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \end{aligned}$$

а вектор-функции $Z^{kh}(y)$ и $W^{kh}(y, t)$ есть решения периодических задач (7.2) и (7.4), (7.5) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что сходимость в (8.1) влечет за собой сходимость в (8.5). Для этого введем обозначения

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t) &= \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t)|^2 dx, & w(t) &= \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx, \\ w^\varepsilon(\lambda) &= \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, \lambda)|^2 dx, & w(\lambda) &= \int_{\Omega} |u(x, \lambda)|^2 dx. \end{aligned}$$

Теперь, используя (8.1), имеем

$$w^\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} w^\varepsilon(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} w(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = w(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

что сразу дает соотношения (8.5). Аналогично, с помощью (8.2) и свойства (iii) двухмасштабной сходимости доказываются соотношения (8.6). Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3 для всех $t \in [0, T]$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)|^2 dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v^\varepsilon(x, t) - v(x, t)|^2 dx = 0.$$

Более того, если функции u_1 и v_1 являются достаточно гладкими (например, $u_1, v_1 \in L^2(\Omega, C_{\text{per}}^1(Y)^3)$ для всех $t \in [0, T]$), то согласно свойству (iv) двухмасштабной сходимости из теоремы 3 следует, что для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(u^\varepsilon(x, t)) - e(u(x, t)) - e_y(u_1(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 dx &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |e(v^\varepsilon(x, t)) - e(v(x, t)) - e_y(v_1(x, \varepsilon^{-1}x, t))|^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Автор благодарит рецензента за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Математические задачи механики композиционных материалов, Наука, М., 1984.
- [2] Э. Санчес-Паленсиа, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.
- [3] Z. Abdessamad, I. Kostin, G. Panasenko, V. P. Smyshlyaev, “Homogenization of thermo-viscoelastic Kelvin–Voigt model”, *Compt. Rend. Méc.*, **335**:8 (2007), 423–429.
- [4] Z. Abdessamad, I. Kostin, G. Panasenko, V. P. Smyshlyaev, “Memory effect in homogenization of a viscoelastic Kelvin–Voigt model with time-dependent coefficients”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **19**:9 (2009), 1603–1630.
- [5] R. P. Gilbert, A. Panchenko, X. Xie, “Homogenization of a viscoelastic matrix in linear frictional contact”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **28**:3 (2005), 309–328.
- [6] А. С. Шамаев, В. В. Шумилова, “Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью”, *Докл. РАН*, **436**:2 (2011), 199–202.
- [7] G. Nguetseng, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**:3 (1989), 608–623.
- [8] G. Allaire, “Homogenization and two-scale convergence”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:6 (1992), 1482–1518.
- [9] D. Lukkassen, G. Nguetseng, P. Wall, “Two-scale convergence”, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **2**:1 (2002), 35–86.
- [10] В. В. Жиков, “Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости”, *Матем. сб.*, **191**:7 (2000), 31–72.
- [11] В. В. Жиков, “Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 81–148.
- [12] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.
- [13] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [14] В. А. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Справочная математическая библиотека, Физматгиз, М., 1961.
- [15] Г. Дёч, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. С приложением таблиц, составленных Р. Гершелем*, Физико-математическая библиотека инженера, Наука, М., 1971.

В. В. Шумилова

Институт проблем механики

им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

E-mail: v.v.shumilova@mail.ru

Поступило

19.05.2011

Исправленный вариант

16.01.2013