Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Рузиев, О краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 74–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:58:33

УДК 517.956.6

О краевой задаче для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области

М. Х. Рузиев

В работе изучается краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения задачи устанавливается методом интегральных уравнений.

Библиография: 13 названий.

1. Введение и постановка задачи. Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ – область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ – полуплоскость $y > 0$, D^- – конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$,

$$I = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}.$$

В уравнении (1) предполагается, что m, β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения:

$$I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, y = 0\}, \quad I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\},$$

C_0 (C_1) – точки пересечения характеристики AC (BC) с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число.

Рассмотрим диффеоморфизм $q(x) \in C^1[c, 1]$, переводящий отрезок $[c, 1]$ в отрезок $[-1, c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(c) = c$, $q(1) = -1$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $q(x) = p - kx$, где

$$k = \frac{1+c}{1-c}, \quad p = \frac{2c}{1-c}, \quad p - k = -1, \quad p - kc = c.$$

Краевые задачи, называемые задачами Геллерстедта для обобщенного уравнения Трикоми, были изучены в работах [1], [2]. Обобщенная задача Геллерстедта для

одного частного случая уравнения Чаплыгина рассмотрена в работе [3]. Существование и единственность решения задачи Франкля для ряда уравнений смешанного типа доказаны в работах [4]–[7]. Для уравнения (1) в случае, когда $\beta_0 = -m/2$, задача с нелокальным граничным условием на характеристике, а также нелокальная задача с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках и с аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения изучены соответственно в работах [8], [9].

Отметим, что в задаче Геллерстедта значение искомой функции в гиперболической части смешанной области D задается на характеристиках EC_0 и EC_1 :

$$u|_{EC_0} = \psi_1(x), \quad u|_{EC_1} = \psi_2(x).$$

В данной работе решается задача, в которой характеристика EC_0 освобождена от краевого условия и это недостающее условие Геллерстедта заменено внутренне-краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения.

ЗАДАЧА А. Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$, где $\overline{D} = D \cup I_1 \cup AC \cup BC \cup I_2$;
- 2) $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [10] в области D^- ;
- 4) выполнено

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}; \quad (2)$$

- 5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_i(x), \quad \text{для всех } x \in \overline{I}_i, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{EC_1} = \psi(x), \quad c \leq x \leq \frac{c+1}{2}, \quad (4)$$

$$u(q(x), 0) = \mu u(x, 0) + f(x), \quad c \leq x \leq 1, \quad (5)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I \setminus \{c\}, \quad (6)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/(2(m + 2))$, $f(x)$, $\psi(x)$, $\tau_i(x)$ – заданные функции, причем

$$f(x) \in C[c, 1] \cap C^{1, \alpha_0}(c, 1), \quad f(c) = 0, \quad f(1) = 0,$$

$$\psi(x) \in C^1\left[c, \frac{c+1}{2}\right] \cap C^{1, \delta_0}\left(c, \frac{c+1}{2}\right), \quad \psi(c) = 0,$$

$\mu - \text{const}$, функции $\tau_i(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$ представимы в виде $\tau_i(x) = (1 - x^2)\tilde{\tau}_i(x)$ и они удовлетворяют условию Гёльдера на любых отрезках $[-N, -1]$, $[1, N]$, $N > 1$, и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\tau_i(x)| \leq M|x|^{-\delta}$, где δ , M – положительные постоянные.

Отметим, что условие (5) является внутренне-краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения [8], [9].

2. Единственность решения задачи А. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия $\tau_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Тогда задача А имеет только тривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы Дарбу [11; с. 34], дающей в области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) &= \tau(x), & x \in \bar{I}, \\ \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y &= \nu(x), & x \in I, \end{aligned}$$

из краевого условия (4) после несложных вычислений получим

$$\nu(x) = \gamma D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) + \Psi(x), \quad x \in (c, 1), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= -\gamma \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \right) (x-c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta} \psi \left(\frac{(x+c)}{2} \right), \\ \gamma &= 2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta) \frac{((m+2)/4)^{2\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}, \end{aligned}$$

$D_{c,x}^l$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, $\Gamma(z)$ – Гамма функция [10].

Равенство (7) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на интервал I из области D^- .

В силу обозначения $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$ условие (5) перепишем в виде

$$\tau(q(x)) = \mu\tau(x) + f(x), \quad x \in [c, 1]. \quad (8)$$

Пусть D_R^+ – конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой $A_R B_R$ нормальной кривой:

$$x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = R^2, \quad -R \leq x \leq R, \quad 0 \leq y \leq \left(\frac{(m+2)R}{2} \right)^{2/(m+2)},$$

$A_R(-R, 0)$, $B_R(R, 0)$. В силу (2) для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $R_0 = R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$

$$|u(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in A_R B_R. \quad (9)$$

В силу принципа Хопфа [1; с. 2] функция $u(x, y)$ своего положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках (x_0, y_0) (в дальнейшем эти точки назовем *точками экстремума* функции $u(x, y)$) области $\bar{D}_R^+$ не достигает. Допустим, что функция $u(x, y)$ своего положительного максимума и отрицательного минимума в области $\bar{D}_R^+$ достигает в точке $(x_0, 0)$ интервалов $(-1, c) \cup (c, 1)$ оси $y = 0$. Здесь рассмотрим отдельно два случая: $x_0 \in (c, 1)$ или $x_0 \in (-1, c)$.

Случай 1. Допустим, что $x_0 \in (c, 1)$. Тогда в этой точке в случае положительного максимума (отрицательного минимума) [11; с. 74]

$$\nu(x_0) < 0 \quad (\nu(x_0) > 0). \quad (10)$$

Хорошо известно, что в точке положительного максимума (отрицательного минимума) функции $\tau(x)$ для операторов дробного дифференцирования имеет место следующее неравенство: $D_{c,x_0}^{1-2\beta}\tau(x) > 0$ ($D_{c,x_0}^{1-2\beta}\tau(x) < 0$). Отсюда в силу (7) (где $\Psi(x) \equiv 0$) имеем [11; с. 21]

$$\nu(x_0) = \gamma D_{c,x_0}^{1-2\beta}\tau(x) > 0 \quad (\nu(x_0) = \gamma D_{c,x_0}^{1-2\beta}\tau(x) < 0). \quad (11)$$

Неравенства (10) и (11) противоречат условию сопряжения (6); отсюда следует, что $x_0 \notin (c, 1)$.

Случай 2. Теперь допустим, что $x_0 \in (-1, c)$. Пусть $x_1 \in (c, 1)$ – решение уравнения $q(x_1) = x_0$. В этом случае из (8), (где $f(x) \equiv 0$) имеем

$$\tau(x_0) = \tau(q(x_1)) = \mu\tau(x_1). \quad (12)$$

Из равенства (12) следует, что $\tau(x_0) < \tau(x_1)$, так как $\mu \in (0, 1)$, и, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума. Покажем, что точка $E(c, 0)$ также не является точкой экстремума функции $u(x, y)$. Действительно, из равенства (8), где $f(x) \equiv 0$, имеем $\tau(q(c)) = \mu\tau(c)$. Отсюда в силу равенства $q(c) = c$ следует, что $\tau(c)(1 - \mu) = 0$, т.е. $\tau(c) = 0$, что и требовалось доказать. Таким образом, $(x_0, 0) \notin (-R, R)$. Пусть $R > R_0$. В силу принципа Хопфа и из предыдущих рассуждений следует, что $(x_0, y_0) \in A_R B_R$, и в силу (9) $|u(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Следовательно, $|u(x, y)| < \varepsilon$ для всех $(x, y) \in \overline{D}_R^+$. Отсюда в силу произвольности ε при $R \rightarrow \infty$ заключаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}^+$. Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) &= 0, & x \in \overline{I}, \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y &= 0, & x \in I. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13), в силу непрерывности решения в области $\overline{D}_R^+$ и условия сопряжения (6), восстанавливая искомую функцию $u(x, y)$ в области D^- как решение видоизмененной задачи Коши с однородными данными, получим, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}^-$. Теорема 1 доказана.

3. Существование решения задачи А.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия $q(x) = p - kx$, $\mu k^{1/2-3\alpha} < 1$, $0 < \mu < 1$, $\beta_0 > (1 - m)/3$, где $p = 2c/(1 - c)$, $k = (1 + c)/(1 - c)$, $\alpha = (1 - 2\beta)/4$. Тогда решение задачи А существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи Дирихле, удовлетворяющее условиям (3) и $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \overline{I}$, представимо в виде

$$u(x, y) = k_2(1 - \beta_0)y^{1-\beta_0} \int_{-1}^1 \tau(t)(r_0^2)^{\beta-1} dt + F_1(x, y), \quad (14)$$

где

$$r_0^2 = (x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2},$$

$$F_1(x, y) = k_2(1 - \beta_0)y^{1-\beta_0} \left[\int_{-\infty}^{-1} \tau_1(t)(r_0^2)^{\beta-1} dt + \int_1^{\infty} \tau_2(t)(r_0^2)^{\beta-1} dt \right],$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m + 2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1 - \beta)}{\Gamma(2 - 2\beta)}.$$

Дифференцируя (14) по y и учитывая равенства

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^{1-\beta_0} \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\} \\ &= \frac{m + 2}{2} y^{-\beta_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x - t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= k_2(1 - \beta_0) \frac{\partial}{\partial y} y^{1-\beta_0} \int_{-1}^c \tau(t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} dt \\ &+ k_2(1 - \beta_0) \frac{m + 2}{2} y^{-\beta_0} \int_c^1 \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x - t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\} dt \\ &+ \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Во втором интеграле равенства (15) выполнив операцию интегрирования по частям, с учетом $\tau(c) = 0$, $\tau(1) = 0$ после несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= k_2(1 - \beta_0)^2 y^{-\beta_0} \int_{-1}^c \tau(t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} dt \\ &+ k_2(1 - \beta_0)(\beta - 1) \frac{4}{m + 2} y^{m+2-\beta_0} \int_{-1}^c \tau(t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-2} dt \\ &- k_2(1 - \beta_0) \frac{m + 2}{2} y^{-\beta_0} \int_c^1 \tau'(t)(x - t) \left[(x - t)^2 + \frac{4}{(m + 2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} dt \\ &+ \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16)$$

Умножая обе части равенства (16) на y^{β_0} , затем переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получим

$$\begin{aligned} \nu(x) &= k_2(1 - \beta_0)^2 \int_{-1}^c \tau(t)(x - t)^{2\beta-2} dt \\ &- k_2(1 - \beta_0) \frac{m + 2}{2} \left[\int_c^x \tau'(t)(x - t)^{2\beta-1} dt - \int_x^1 \tau'(t)(t - x)^{2\beta-1} dt \right] + \Phi(x), \end{aligned} \quad (17)$$

$x \in (c, 1)$, где

$$\Phi(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = k_2(1 - \beta_0)^2 \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{\tau_1(t) dt}{(x - t)^{2-2\beta}} + \int_1^{\infty} \frac{\tau_2(t) dt}{(t - x)^{2-2\beta}} \right).$$

Это есть второе функциональное соотношение между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, принесенными на интервал I из верхней полуплоскости. Далее, в интеграле с пределом $(-1, c)$ сделав замену переменного интегрирования $t = q(s) = p - ks$, с учетом равенства (8) из (17) имеем

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -k_2(1 - \beta_0)^2 \int_c^1 (x - q(s))^{2\beta-2} (\mu\tau(s) + f(s)) q'(s) ds \\ & - k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} \left[\int_c^x \tau'(t)(x - t)^{2\beta-1} dt - \int_x^1 \tau'(t)(t - x)^{2\beta-1} dt \right] + \Phi(x), \end{aligned} \quad (18)$$

$x \in (c, 1)$. С учетом (6), исключая функцию $\nu(x)$ из (7) и (18), получим

$$\begin{aligned} & \gamma D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) + \Psi(x) \\ & = -k_2(1 - \beta_0) \frac{m+2}{2} \left[\int_c^x \tau'(t)(x - t)^{2\beta-1} dt - \int_x^1 \tau'(t)(t - x)^{2\beta-1} dt \right] \\ & \quad - k_2(1 - \beta_0)^2 \int_c^1 (x - q(s))^{2\beta-2} (\mu\tau(s) + f(s)) q'(s) ds + \Phi(x), \end{aligned} \quad (19)$$

$x \in (c, 1)$. Применив оператор $\Gamma(1 - 2\beta) D_{c,x}^{2\beta-1}$ к обеим частям равенства (19) и выполнив некоторые преобразования, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\tau(x) - \lambda \int_c^1 \left(\frac{x - c}{t - c} \right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t) dt}{t - x} = -\lambda \mu \int_c^1 \left(\frac{x - c}{c - q(s)} \right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s) q'(s) ds}{x - q(s)} + F_0(x), \quad (20)$$

$x \in (c, 1)$, где

$$\begin{aligned} F_0(x) = & -\lambda \int_c^1 \left(\frac{x - c}{c - q(s)} \right)^{1-2\beta} \frac{f(s) q'(s) ds}{x - q(s)} \\ & + \frac{\Gamma^2(1 - 2\beta)}{\Gamma^2(1 - \beta)} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \pi \lambda D_{c,x}^{2\beta-1} [\Phi(x) - \Psi(x)], \end{aligned}$$

$$F_0(x) \in C[c, 1] \cap C^{0, \bar{\gamma}}(c, 1), \quad \bar{\gamma} > 1 - \beta, \quad \lambda = \frac{\cos \beta \pi}{\pi(1 + \sin \beta \pi)}.$$

Интегральный оператор правой части (20) не является регулярным, так как подынтегральное выражение, когда $x = c$, $s = c$, имеет изолированную особенность первого порядка, и поэтому это слагаемое в (20) выделено отдельно.

Временно считая правую часть уравнения (20) известной функцией, перепишем его в виде

$$\tau(x) - \lambda \int_c^1 \left(\frac{x - c}{t - c} \right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t) dt}{t - x} = g_0(x), \quad x \in (c, 1), \quad (21)$$

где

$$g_0(x) = -\lambda\mu \int_c^1 \left(\frac{x-c}{c-q(s)} \right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)q'(s)ds}{x-q(s)} + F_0(x). \quad (22)$$

Полагая $(x-c)^{2\beta-1}\tau(x) = \rho(x)$, $(x-c)^{2\beta-1}g_0(x) = g_1(x)$, уравнение (21) запишем в виде

$$\rho(x) - \lambda \int_c^1 \frac{\rho(t)dt}{t-x} = g_1(x), \quad x \in (c, 1). \quad (23)$$

Решение уравнения (23) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на $(c, 1)$ и ограниченных при $x \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow c$ могущих обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$. В этом классе индекс уравнения (23) равен нулю, а его решение методом Карлемана–Векуа [12] находится в явном виде:

$$\rho(x) = \frac{1 + \sin \beta\pi}{2} g_1(x) + \frac{\cos \beta\pi}{2\pi} \left(\frac{1-x}{x-c} \right)^{(1-2\beta)/4} \int_c^1 \frac{g_1(t)dt}{((1-t)/(t-c))^{(1-2\beta)/4}(t-x)}.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, получим

$$\tau(x) = \cos^2 \pi\alpha g_0(x) + \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \int_c^1 \left(\frac{(1-x)(x-c)^3}{(1-t)(t-c)^3} \right)^\alpha \frac{g_0(t)dt}{t-x}, \quad (24)$$

где $\alpha = (1-2\beta)/4$. Теперь, подставляя (22) в (24), после некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\lambda\mu \cos^2 \pi\alpha \int_c^1 \left(\frac{x-c}{c-q(t)} \right)^{4\alpha} \frac{\tau(t)q'(t)dt}{x-q(t)} \\ & - \lambda\mu \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} (1-x)^\alpha (x-c)^{3\alpha} \\ & \times \int_c^1 \frac{\tau(s)q'(s)ds}{(c-q(s))^{4\alpha}} \int_c^1 \left(\frac{t-c}{1-t} \right)^\alpha \frac{dt}{(t-q(s))(t-x)} + F_1(x), \end{aligned} \quad (25)$$

$x \in (c, 1)$, где

$$F_1(x) = \cos^2 \pi\alpha F_0(x) + \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \int_c^1 \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^\alpha \left(\frac{x-c}{t-c} \right)^{3\alpha} \frac{F_0(t)dt}{t-x}.$$

Уравнение (25) в силу $q(x) = p - kx$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \lambda\mu k^{1-4\alpha} \cos^2 \pi\alpha \int_c^1 \left(\frac{x-c}{t-c} \right)^{4\alpha} \frac{\tau(t)dt}{x+kt-p} \\ & + \lambda\mu k^{1-4\alpha} \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} (1-x)^\alpha (x-c)^{3\alpha} \\ & \times \int_c^1 \frac{\tau(s)ds}{(s-c)^{4\alpha}} \int_c^1 \left(\frac{t-c}{1-t} \right)^\alpha \frac{dt}{(t-x)(t+ks-p)} + F_1(x), \end{aligned} \quad (26)$$

$x \in (c, 1)$. В (26) вычислим внутренний интеграл:

$$A(x, s) = \int_c^1 \left(\frac{t-c}{1-t} \right)^\alpha \frac{dt}{(t-x)(t+ks-p)}.$$

Разлагая рациональный множитель подынтегрального выражения на простые дроби и выполнив несложные вычисления, получим

$$A(x, s) = \frac{1}{x + ks - p} \left[-\pi \operatorname{ctg} \pi \alpha \frac{(x - c)^\alpha}{(1 - x)^\alpha} - \Gamma(-\alpha) \Gamma(1 + \alpha) - \frac{1 - c}{1 + ks - p} \Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 - \alpha) F\left(1 - \alpha, 1, 2; \frac{1 - c}{1 + ks - p}\right) \right], \quad (27)$$

где $F(a, b, c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [10]. Подставляя (27) в (26), после несложных вычислений получим следующее интегральное уравнение:

$$\tau(x) = \lambda \int_c^1 \frac{K(x, s) \tau(s) ds}{x + ks - p} + F_1(x), \quad x \in (c, 1), \quad (28)$$

где

$$K(x, s) = -\mu k^{1-4\alpha} \frac{\sin 2\pi\alpha}{2\pi} \frac{(1 - x)^\alpha (x - c)^{3\alpha}}{(s - c)^{4\alpha}} \times \left[\Gamma(-\alpha) \Gamma(1 + \alpha) + \frac{1 - c}{1 + ks - p} \Gamma(1 + \alpha) \Gamma(1 - \alpha) F\left(1 - \alpha, 1, 2; \frac{1 - c}{1 + ks - p}\right) \right].$$

Используя формулу Больца [10; с. 11] для гипергеометрической функции $F(1 - \alpha, 1, 2; (1 - c)/(1 + ks - p))$ и в силу формул $F(a, b, b; z) = (1 - z)^{-a}$ [10; с. 13], $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi/\sin(\pi z)$ [10; с. 5], функцию $K(x, s)$ запишем в виде

$$K(x, s) = \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \left(\frac{1 - x}{1 - (p - ks)} \right)^\alpha \left(\frac{x - c}{s - c} \right)^{3\alpha} \quad (29)$$

В силу (29) равенство (28) перепишем в виде

$$\tau(x) = -\lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \times \int_c^1 \left(\frac{1 - x}{1 - (p - ks)} \right)^\alpha \left(\frac{x - c}{s - c} \right)^{3\alpha} \frac{\tau(s) ds}{(p - ks) - x} + F_1(x), \quad x \in (c, 1). \quad (30)$$

В (30) выделяя характеристическую часть, получим

$$\tau(x) = -\lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \int_c^1 \left(\frac{x - c}{s - c} \right)^{3\alpha} \frac{\tau(s) ds}{(p - ks) - x} + R_1[\tau] + F_1(x), \quad (31)$$

где

$$R_1[\tau] = -\lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \int_c^1 \left(\frac{x - c}{s - c} \right)^{3\alpha} \frac{\tau(s)}{(p - ks) - x} \left[\left(\frac{1 - x}{1 - (p - ks)} \right)^\alpha - 1 \right] ds$$

– регулярный оператор.

Уравнение (31) запишем в виде

$$\tau(x) = \lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \int_c^1 \left(\frac{x - c}{s - c} \right)^{3\alpha} \frac{\tau(s) ds}{(s - c)(k + (x - c)/(s - c))} + R_1[\tau] + F_1(x). \quad (32)$$

После замены переменных $x = c + (1 - c)e^{-\xi}$, $s = c + (1 - c)e^{-t}$ и введения обозначения $\rho(\xi) = \tau(c + (1 - c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}$ равенство (32) примет вид

$$\rho(\xi) = \lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \int_0^\infty \frac{\rho(t) dt}{ke^{(\xi-t)/2} + e^{-(\xi-t)/2}} + R_2[\rho(\xi)] + F_2(\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (33)$$

где

$$R_2[\rho(\xi)] = R_1[\tau(c + (1 - c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}], \quad F_2(\xi) = F_1(c + (1 - c)e^{-\xi})e^{(3\alpha-1/2)\xi}.$$

Отметим, что в силу условия $\beta_0 > (1 - m)/3$ имеет место неравенство $3\alpha - 1/2 < 0$.

Введем обозначение

$$M(\zeta) = \lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \frac{1}{ke^{\zeta/2} + e^{-\zeta/2}}. \quad (34)$$

В силу (34) уравнение (33) запишем в виде

$$\rho(\xi) = \int_0^\infty M(\xi - t)\rho(t) dt + R_2[\rho(\xi)] + F_2(\xi), \quad \xi \in (0, \infty). \quad (35)$$

Уравнение (35) есть интегральное уравнение Винера–Хопфа [13; с. 55]. Функции $M(\xi)$, $F_2(\xi)$ имеют показательный порядок убывания на бесконечности, причем $M'(\xi) \in C(0, \infty)$, $F_2(\xi) \in H^{\alpha_1}(0, \infty)$. Следовательно, $M(\xi)$, $F_2(\xi) \in L_2 \cap H^{\alpha_1}$, а решение уравнения (35) ищется в классе $\{0\}$ [13; с. 12].

Уравнение (35) с помощью преобразования Фурье, подобно известному характеристическому особому интегральному уравнению с ядром Коши, приводится к краевой задаче Римана и, тем самым, решается в квадратурах.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки справедливы лишь в одном частном случае – когда индекс этих уравнений равен нулю. Вычислим индекс выражения $1 - M^\wedge(\xi)$, где

$$M^\wedge(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi t} M(t) dt = \lambda \mu k^{1-3\alpha} \cos(\pi\alpha) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t} dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}}. \quad (36)$$

С помощью теории вычетов найдем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t} dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}} = \frac{\pi e^{-i\xi \ln k}}{\sqrt{k} \operatorname{ch}(\pi\xi)}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в равенство (36) и учитывая, что

$$\pi \lambda \cos(\pi\alpha) = \pi \frac{\cos(\beta\pi)}{\pi(1 + \sin(\beta\pi))} \cos(\alpha\pi) = \sin(\alpha\pi),$$

имеем

$$M^\wedge(\xi) = \mu k^{1/2-3\alpha} \sin(\pi\alpha) \frac{e^{-i\xi \ln k}}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}.$$

В силу условия $\mu k^{1/2-3\alpha} < 1$ и так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M^\wedge(\xi)) &= \operatorname{Re}\left(\mu k^{1/2-3\alpha} \sin(\pi\alpha) \frac{e^{-i\xi \ln k}}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}\right) \\ &= \mu k^{1/2-3\alpha} \sin(\pi\alpha) \cos(\xi \ln k) \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\xi)} < \mu k^{1/2-3\alpha} < 1, \end{aligned}$$

то

$$\operatorname{Re}(1 - M^\wedge(\xi)) > 0.$$

Следовательно, индекс уравнения (35)

$$\chi = -\operatorname{Ind}(1 - M^\wedge(\xi)) = 0,$$

т.е. изменение аргумента выражения $1 - M^\wedge(\xi)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю [13; с. 56]. Отсюда и из единственности решения задачи А вытекает однозначная разрешимость уравнения (35), а значит, и задачи А. Тем самым, доказана теорема 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Gellerstedt, “Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ ”, *Arkiv Mat. Astron. Fys. A*, **26**:3 (1937), 1–32.
- [2] Ю. М. Крикунов, “Об одной задаче Геллерстедта”, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, № 6, 56–59.
- [3] И. Е. Солодовников, “Обобщенная задача Геллерстедта для одного частного случая уравнения $k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$ ”, Тр. сем. по краев. задачам, **10**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1973, 130–139.
- [4] А. В. Бицадзе, “Об одной задаче Франкля”, *Докл. АН СССР*, **109**:6 (1956), 1091–1094.
- [5] Ю. Девингаль, “О сущестовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля”, *Изв. вузов. Матем.*, 1958, № 2, 39–51.
- [6] В. И. Жегалов, “Задача Франкля со смещением”, *Изв. вузов. Матем.*, 1979, № 9, 11–20.
- [7] Н. Ю. Капустин, К. Б. Сабитов, “О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа”, *Докл. АН СССР*, **317**:5 (1991), 1048–1052.
- [8] М. С. Салахитдинов, М. Мирсабуров, “Задача с нелокальным граничным условием на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 748–760.
- [9] М. Мирсабуров, М. Х. Рузиев, “Задача с нелокальными условиями на линии вырождения и на параллельных характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа”, *Узбекск. матем. журн.*, 2009, № 3, 107–116.
- [10] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, М., 1985.
- [11] М. С. Салахитдинов, М. Мирсабуров, *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами*, Изд-во НУУЗ, Ташкент, 2005.
- [12] Н. И. Мухелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые из приложения к математической физике*, Наука, М., 1968.
- [13] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.

М. Х. Рузиев

Институт математики и информационных технологий НАН
Узбекистана, г. Ташкент
E-mail: mrusiev@mail.ru

Поступило

28.12.2009

Исправленный вариант

21.05.2011