Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, Наилучшие совместные приближения: нормы, сигнатуры и асимптотические направления, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 730–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:33:41

УДК 511

НАИЛУЧШИЕ СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ: НОРМЫ, СИГНАТУРЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Н. Г. Мошевитин

Получены результаты о распределении направлений наилучших совместных приближений в различных нормах.

Библиография: 17 названий.

1. Обозначения. Под *выпуклой симметричной лучевой функцией* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением понимается функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ со свойствами:

- 1) f непрерывна;
- 2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0 \iff x = 0$;
- 3) $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $f(tx) = tf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+$;
- 5) множество $B_f^1 = \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq 1\}$ выпукло и $0 \in \text{int } B_f^1$.

Согласно [1] в таком случае f задает какую-то другую норму в $\mathbb{R}^n$. Функция (или норма) f называется *строго выпуклой*, если множество B_f^1 является строго выпуклым, т.е. его граница ∂B_f^1 не содержит прямолинейных отрезков. Через $B_f^\lambda(a)$ будем обозначать множество

$$B_f^\lambda(a) = \{y \in \mathbb{R}^n : f(y - a) \leq \lambda\},$$

так что $B_f^1 = B_f^1(0)$.

Для вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ определим *f -наилучшее совместное приближение* (сокращенно *f -н.п.*) как целую точку $\tau = (p, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ такую, что $p \geq 1$ и $f(\alpha q - b) > f(\alpha p - a)$ для всех $(q, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}, 1 \leq q \leq p-1$, и для всех $(p, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}, b \neq a$. В случае, когда f такова, что $B_f^1 = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \max_j |y_j| \leq 1\}$, наше определение задает обычные наилучшие совместные приближения.

Все f -н.п. к набору α располагаются в виде последовательностей

$$\begin{aligned} \tau_\nu &= (p_\nu, a_\nu) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \quad p_\nu \in \mathbb{N}, \quad a_\nu = (a_{1,\nu}, \dots, a_{n,\nu}) \in \mathbb{Z}^n, \\ p_1 &< p_2 < \dots < p_\nu < \dots, \\ f(\alpha p_1 - a_1) &> f(\alpha p_2 - a_2) > \dots > f(\alpha p_\nu - a_\nu) > \dots, \end{aligned}$$

причем эти последовательности являются конечными или бесконечными в зависимости от того, имеет место принадлежность $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ или нет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00357 и № 00-15-96109.

Через $\xi_\nu = (\xi_{1,\nu}, \dots, \xi_{n,\nu})$ будем обозначать вектор отклонений $\xi_{j,\nu} = \alpha_j p_\nu - a_{j,\nu}$. Положим $\Xi_\nu = (\Xi_{1,\nu}, \dots, \Xi_{n,\nu})$, $\Xi_{j,\nu} = \xi_{j,\nu} / f(\xi_\nu)$, так что $\Xi_\nu \in B_f^1$. Для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, также будем использовать обозначение $\Xi(\xi) = \xi / f(\xi) \in B_f^1$. Кроме того, для целочисленного вектора $\zeta = (p, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ будем пользоваться обозначением $\xi^\alpha(\zeta) = (p\alpha_1 - a_1, \dots, p\alpha_n - a_n) \in \mathbb{R}^n$.

В настоящей работе мы устанавливаем несколько простых общих фактов о поведении величин Ξ_ν . Но прежде всего мы приведем некоторые простые результаты, касающиеся *порядка* наилучших приближений.

2. Порядок наилучших приближений. Из теоремы Минковского о выпуклом теле, примененной к цилиндру

$$\Omega_\nu = \{z = (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < p_{\nu+1}, f(\alpha x - y) < f(\xi_\nu)\}, \quad (1)$$

следует, что для всякого ν выполнено

$$f(\xi_\nu) \leq C_1(f) p_{\nu+1}^{-1/n} \quad (2)$$

с константой $C_1(f) = 2/(\text{Vol } B_f^1)^{1/n}$. С другой стороны, мы отметим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 3$, то

$$f(\xi_\nu) p_{\nu+1} \rightarrow +\infty, \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\Lambda^2 \in \mathbb{Z}^{s+1}$ – произвольная двумерная подрешетка и $\det_2 \Lambda^2$ – ее двумерный фундаментальный объем. Тогда множество решеток $\{\Lambda^2 \subset \mathbb{Z}^{s+1} : \det_2 \Lambda^2 \leq \gamma\}$ конечно для любого положительного γ .

2) Рассмотрим двумерную решетку $\Lambda_\nu^2 = \langle \tau_\nu, \tau_{\nu+1} \rangle_{\mathbb{Z}}$. Из условия $\text{conv}(0, \tau_\nu, \tau_{\nu+1}) \subset \Omega_\nu$ следует

$$\frac{1}{2} \det_2 \Lambda_\nu^2 = \text{vol}_2(\text{conv}(0, \tau_\nu, \tau_{\nu+1})) \ll f(\xi_\nu) p_{\nu+1}.$$

3) Из условия $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \geq 3$ следует (см. [2, утверждение 2]), что последовательность наилучших приближений не лежит асимптотически ни на какой двумерной решетке, и легко видеть, что ни при каком конечном ν_0 не может выполняться

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \tau_\nu \subset \bigcup_{n=1}^{\nu_0} \Lambda_\nu^2.$$

Предложение 1 вытекает из 1)–3).

Следующее утверждение (фактически доказанное Хинчиным [3], [4]) показывает, что в соотношении (3) никакой определенной скорости стремления к бесконечности величины $f(\xi_\nu) p_{\nu+1}$ установить нельзя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для произвольной функции $\psi(y) \uparrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$, сколь угодно медленно монотонно возрастающей к бесконечности, найдется набор $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathbb{Z}}(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = n + 1$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_s$ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$) такой, что

$$f(\xi_\nu) p_{\nu+1} = O(\psi(p_{\nu+1})), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Соотношение (4) показывает, что при $n \geq 2$ найдутся наборы α , для которых из оценок (2), (3) точной будет являться нижняя оценка. Подобного рода результаты связаны с наличием вырождений. Отметим, что факт вырождения *размерности* отмечался в [5], [2]. Вырождения для задачи о линейных формах (на самом деле связанные с сингулярными системами Хинчина [3], [4]) рассматривались автором в [6], в [7] имеется обзор близких результатов и приложений. Результаты об общих законах аппроксимации имеются в [8].

При $n = 1$ предложение 1 не имеет места и для всех ν выполнено

$$C_2(f)p_{\nu+1}^{-1} \leq f(\xi_\nu) \leq C_1(f)p_{\nu+1}^{-1}$$

(см. [9]).

3. Последовательные приближения.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено $\Xi_{\nu+1} \notin \text{int } B_f^1(\Xi_\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1 обобщает теорему Роджерса о сигнатурах для обычных н.п. из [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению f -н.п. в цилиндре Ω_ν (см. (1)) ненулевых целых точек нет. Точка

$$\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = (p_{\nu+1} - p_\nu, a_{1,\nu+1} - a_{1,\nu}, \dots, a_{n,\nu+1} - a_{n,\nu})$$

лежит вне цилиндра Ω_ν , но $0 < p_{\nu+1} - p_\nu < p_{\nu+1}$, так что условие $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu \notin \Omega$ равносильно тому, что

$$\xi_{\nu+1} \notin \text{int } B_f^{f(\xi_\nu)}(\xi_\nu) \quad (5)$$

(надо рассмотреть параллельную проекцию цилиндра Ω на плоскость координат $y_1, \dots, y_n$ вдоль его оси). Замечая, что $0 \in \partial S_f^{f(\xi_\nu)}(\xi_\nu)$, в силу выпуклости видим, что

$$\xi_{\nu+1} \frac{f(\xi_\nu)}{f(\xi_{\nu+1})} \notin \text{int } B_f^{f(\xi_\nu)}(\xi_\nu).$$

Последнее соотношение равносильно утверждению теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что соотношение (5) несколько более общее, чем заключение теоремы 1.

4. Строго выпуклые нормы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть норма f строго выпукла. Тогда найдется $\delta = \delta(f) > 0$ такое, что для каждого набора $\alpha \notin \mathbb{Q}^n$ найдется бесконечно много ν таких, что $\Xi_{\nu+1} \notin B_f^{1+\delta}(\Xi_\nu)$.*

Напомним, что набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется *плохо приближаемым*, если с некоторой постоянной $D(\alpha) > 0$ выполнено неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} \min_{a_j \in \mathbb{Z}} |p\alpha_j - a_j| \geq D(\alpha)p^{-1/n} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

(О существовании такого рода наборов см. [8], [11], [12].) Легко видеть, что набор α плохо приближаем тогда и только тогда, когда для каждой нормы f выполнено

$$\min_{a \in \mathbb{Z}^n} f(p\alpha - a) \geq D_1(f, \alpha)p^{-1/n} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть набор α плохо приближаем и норма f строго выпукла. Тогда найдутся постоянные $w = w(D, f) \in \mathbb{N}$ и $\delta = \delta(D, f) > 0$, обладающие следующим свойством: для любого $\nu \geq 1$ найдется натуральное j из интервала $\nu \leq j \leq \nu + w$, для которого выполнено

$$\Xi_{j+1} \notin B_f^{1+\delta}(\Xi_j). \quad (7)$$

Теорема 2 показывает, что для строго выпуклой нормы условие $\theta_{\nu+1} \notin \text{int } B_f^1(\theta)$ для последовательности $\theta_\nu \in B_f^1$, вообще говоря, не является достаточным для существования α такого, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\theta_\nu - \Xi_\nu) = 0.$$

Теорема 3 утверждает, что для плохо приближаемых наборов чисел те j , для которых выполнено (7), появляются регулярно. По-видимому, результат теоремы 3 не связан со свойством плохо приближаемости набора α , и справедлива более сильная форма теоремы 2, но в настоящей работе это не доказано. Доказательство теорем 2, 3 проведено в п. 5. Из результатов п. 6 следует, что теорема 2 становится неверной для нестрого выпуклых норм.

5. Две леммы. В [13] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для всякой нормы f с постоянной $h = 2^{n+1}$ выполнено $p_{\nu+h} \geq 2p_\nu \forall \nu$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого набора $\alpha \notin \mathbb{Q}^n$ для всех $\nu, j > 1$ выполнено

$$f(\xi_{\nu+jh}) \leq C_1 p_\nu^{-1/n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j/n}.$$

Следствие 1 очевидно, и мы его не доказываем.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если набор α плохо приближаем, то найдется постоянная $h^* = h^*(f, \alpha) \in \mathbb{N}$ такая, что

$$f(\xi_{\nu+h^*}) < \frac{1}{2} f(\xi_\nu) \quad \forall \nu \geq 1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) и условия плохо приближаемости (6) следует

$$D_1 p_\nu^{-1/n} \leq f(\xi_\nu) \leq C_1 p_\nu^{-1/n},$$

а по лемме 1 p_ν экспоненциально возрастают. Из сказанного выше вытекает соотношение (8).

ЛЕММА 2. Пусть норма f строго выпукла. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $\theta \in \partial B_f^1(0)$ и для любого $\xi \in B_f^1(0) \setminus B_f^1(\theta)$ такого, что

$$\Xi(\xi) \in \partial B_f^1(0) \cap (B_f^{1+\delta}(\theta) \setminus B_f^1(\theta)),$$

выполнено $f(\xi) > 1 - \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \partial B_f^1(\theta) \cap \partial B_f^1(0)$. В силу строгой выпуклости интервал $(0; \eta) \subset \text{int } B_f^1(\theta)$. Если $\Xi \in \partial B_f^1(0) \setminus B_f^1(\theta)$ лежит в малой δ -окрестности точки η , то по непрерывности отрезок $[0; \Xi]$ пересекается с $\partial B_f^1(\theta)$ в некоторой точке $\zeta(\Xi) = [0; \Xi] \cap (\partial B_f^1(\theta) \setminus \{0\})$, причем $\zeta(\Xi) \rightarrow \eta$ при $\Xi \rightarrow \eta$. Ясно, что если $\xi \in B_f^1(0) \setminus B_f^1(\theta)$, то ξ лежит между $\Xi(\xi)$ и $\zeta(\Xi(\xi))$, и лемма доказана.

6. Доказательство теорем 2 и 3. Докажем теорему 2.

Если утверждение теоремы 2 не выполнено, то для любого $\delta > 0$

$$\Xi_{\nu+1} \in B_f^{1+\delta}(\Xi_\nu) \quad \text{при } \nu \geq \nu_0(\delta).$$

Теперь из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$f(\xi_{\nu+1}) \geq (1 - \varepsilon)f(\xi_\nu) \quad \text{при } \nu \geq \nu_0(\varepsilon),$$

т.е.

$$f(\xi_{\nu_0+j}) \geq (1 - \varepsilon)^j f(\xi_{\nu_0}). \quad (9)$$

Но из следствия 1 леммы 1 имеем

$$f(\xi_{\nu_0+j}) \leq C_1 p_{\nu_0}^{-1/n} \left(\frac{1}{2}\right)^{j/n}. \quad (10)$$

При достаточно малом ε неравенства (9) и (10) противоречивы при $j \rightarrow \infty$.

Теорема 2 доказана.

Теперь докажем теорему 3.

Пусть утверждение теоремы 3 не выполнено. Тогда для сколь угодно большого $w \in \mathbb{N}$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется ν такое, что

$$\Xi_{j+1} \in B_f^{1+\delta}(\Xi_j), \quad j = \nu, \nu + 1, \dots, \nu + w.$$

В силу леммы 2 это означает, что

$$f(\xi_{\nu+w}) \geq (1 - \varepsilon)^w f(\xi_\nu), \quad (11)$$

причем ε может быть взято сколь угодно малым. В то же время из следствия 2 леммы 1 вытекает неравенство

$$f(\xi_{\nu+w}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{[w/h^*]} f(\xi_\nu). \quad (12)$$

При достаточно малом ε неравенства (11) и (12) противоречивы при $w \rightarrow \infty$.

Теорема 3 доказана.

7. Теорема о сигнатуре и ее обобщение. Сигнатурой вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ называется набор $\text{sign } \eta = (\text{sign } \eta_1, \dots, \text{sign } \eta_n)$. Роджерс [10] показал что для обычных н.п. (соответствующих случаю $B_f^1 = \{y : \max_j |y_j| \leq 1\}$) последовательные н.п. удовлетворяют условию $\text{sign } \xi_\nu \neq \text{sign } \xi_{\nu+1} \quad \forall \nu$. (Этот результат обобщается нашей теоремой 1 из п. 2.) С другой стороны, в [14] показано, что для любой наперед заданной последовательности сигнатур $\{\sigma_\nu\}$ такой, что $\sigma_\nu \neq \sigma_{\nu+1}$, найдется набор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимых вместе с 1 над $\mathbb{Z}$ таких, что $\text{sign } \xi_\nu = \sigma_\nu$. Ниже мы обобщаем этот результат.

Пусть имеется последовательность $\theta_\nu \in \partial B_f^1(0)$. Определим два условия.

УСЛОВИЕ А. Выполнено $-\theta_{\nu+1} \in \text{int } B_f^1(\theta_\nu) \quad \forall \nu$.

Пусть норма f гладкая (т.е. в каждой точке сфера ∂B_f^1 имеет единственную касательную гиперплоскость). Для точки $\theta \in \partial B_f^1(0)$ определим множество $G(\theta) \subset \partial B_f^1(0)$ следующим образом. Рассмотрим касательную гиперплоскость π для множества $\partial B_f^1(\theta)$ в точке $0 \in \partial B_f^1(\theta)$. Через Π обозначим то замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^n$ с границей π , которое не содержит точку θ . Определим теперь $G(\theta) = \Pi \cap \partial B_f^1$.

УСЛОВИЕ Б. Норма f гладкая и $\theta_{\nu+1} \in G(\theta_\nu) \quad \forall \nu$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть норма f и последовательность θ_ν таковы, что выполнено условие А или условие Б. Тогда существует набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ чисел, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, такой, что

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |\Xi_\nu - \theta_\nu| = 0. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формуле (13) стремление к нулю может быть сколь угодно быстрым.

При $s = 2$ рассмотрим норму $f^*(x_1, x_2)$, единичный шар которой задается неравенствами $|x_1 + x_2| \leq 4$, $|x_1 - x_2| \leq 1$. Применение теоремы 4 с учетом простой геометрии взаимного расположения шаров $B_f^1(0)$, $B_f^1(\theta)$ влечет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Для нормы $f^*(x)$ последовательность f -н.п. может иметь постоянную последовательность сигнатур $\sigma_\nu = (+, +) \quad \forall \nu$.

Теорема 5 показывает, что цитировавшаяся выше теорема Роджерса [10] для нормы $f^*(x)$ становится неверной. Ясно, что имеет место аналогичный многомерный пример и что можно рассмотреть пример со строго выпуклой нормой.

Особо отметим, что автору не удалось привести пример нормы f , в которой последовательность f -н.п. может иметь совершенно любую заданную наперед последовательность сигнатур. Автору кажется, что подобным свойством обладает евклидова норма $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, однако это лишь предположение.

Технически доказательство теоремы 4 громоздко, и мы приведем его схематически.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4. Предположим, что выполнено условие А.

Точно так, как и в работе [2], с помощью некоторого индуктивного процесса строится последовательность целых точек $\tau_\nu = (p_\nu, a_{1,\nu}, \dots, a_{n,\nu})$, которые и будут образовывать последовательность f -н.п. для предельной точки $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (a_{1,\nu}/p_\nu, \dots, a_{n,\nu}/p_\nu)$.

Основание индуктивного процесса очевидно. Опишем его шаг. Пусть мы уже построили целые точки $\tau_1, \dots, \tau_\nu \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\tau_j = (p_j; a_j) = (p_j, a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$, $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_\nu$, с условиями:

- 1) $\tau_1, \dots, \tau_\nu$ есть набор всех f -н.п. к рациональному вектору $\beta^\nu = (a_{1,\nu}/p_\nu, \dots, a_{n,\nu}/p_\nu)$;
- 2) $\Xi(\xi^{\beta^\nu}(\tau_j)) - \theta_j$ мало для всех $j = 1, \dots, \nu - 1$;
- 3) $-\theta_j \in \text{int } B_f^1(\Xi(\xi^{\beta^\nu}(\tau_{j-1})))$ при всех $j = 1, \dots, \nu$.

Покажем, как теперь определить целую точку $\tau_{\nu+1} = (p_{\nu+1}; a_{\nu+1}) = (p_{\nu+1}, a_{1,\nu+1}, \dots, a_{n,\nu+1})$, $p_\nu < p_{\nu+1}$, так, чтобы

- 1*) $\tau_1, \dots, \tau_{\nu+1}$ были бы все f -н.п. к рациональному вектору $\beta^{\nu+1} = (a_{1,\nu+1}/p_{\nu+1}, \dots, a_{n,\nu+1}/p_{\nu+1})$;
- 2*) $\Xi(\xi^{\beta^{\nu+1}}(\tau_j)) - \theta_j$ было бы мало для всех $j = 1, \dots, \nu$;
- 3*) $-\theta_j \in \text{int } B_f^1(\Xi(\xi^{\beta^{\nu+1}}(\tau_{j-1})))$ при всех $j = 1, \dots, \nu + 1$.

Рассмотрим малую окрестность $B_f^\lambda(a_\nu)$. Если λ достаточно мало, то для любого $\beta \in B_f^\lambda(a_\nu)$ целые точки $\tau_1, \dots, \tau_{\nu-1}$ будут представлять собой все первые последовательные $\nu - 1$ f -н.п. к вектору β . Трудность заключается в том, что при любом λ для некоторых $\beta \in B_f^\lambda(a_\nu)$ между $\tau_{\nu-1}$ и τ_ν может появиться новое f -н.п., которое надо проконтролировать.

Рассмотрим шар B_f^1 и точку $\Xi(\xi^{\beta^\nu}(\tau_{\nu-1})) \in \partial B_f^1$. Пусть $B^* = B_f^1(\Xi(\xi^{\beta^\nu}(\tau_{\nu-1})))$. Из индуктивного условия 3) имеем $-\theta_\nu \in \text{int } B^*$.

Рядом с точкой $-\theta_\nu$ во множестве $\partial B_f^1 \cap \text{int } B^*$ найдется точка Ξ^* такая, что двумерная плоскость π^* , проходящая через точки $0, \tau_\nu, \zeta^*, \zeta^* = (p_\nu, \Xi^*)$, будет вполне рациональна, сама точка Ξ^* будет мало отличаться от точки $-\theta_\nu$ и по непрерывности можно добиться выполнения принадлежности $-\theta_{\nu+1} \in \text{int } B_f^1(\Xi^*)$ (используем условие А).

Во вполне рациональной плоскости π^* выбирается далекая целая точка $\tau_{\nu+1} = (p_{\nu+1}; a_{\nu+1})$, расположенная так, что $\tau_{\nu+1}$ и ζ^* лежат по одну сторону от прямой $0\tau_\nu$ (плоскость π^* двумерна). Поскольку $\Xi^* \in \text{int } B^*$, (используем выпуклость B^*) получаем, что полуоткрытый интервал $(0; \Xi^*)$ содержится во внутренности $\text{int } B^*$. Теперь выбор точки $\tau_{\nu+1}$ очень близко к прямой $0\tau_\nu$ обеспечивает, что $\tau_1, \dots, \tau_{\nu+1}$ будут именно *все* f -н.п. к рациональному вектору $\beta^{\nu+1} = (a_{1,\nu+1}/p_{\nu+1}, \dots, a_{n,\nu+1}/p_{\nu+1})$.

Сходимость последовательности векторов β^ν обеспечивается малым отличием вектора $\beta^{\nu+1}$ от β^ν .

Линейная независимость над $\mathbb{Z}$ предельных чисел $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ обеспечивается так же, как и в работе [2], “подкручиванием”.

Шаг индуктивного процесса описан.

При условии А утверждение теоремы 4 будет выполняться для построенных в результате индуктивного процесса чисел $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Для доказательства результата в предположении условия Б надо действовать аналогично описанному выше процессу и использовать тот факт, что по причине единственности касательной гиперплоскости к сфере ∂B_f^1 можно обеспечить трансверсальность пересечения прямой $l^* = \pi^* \cap \{x = p_\nu\}$ сферы ∂B_f^1 .

8. Асимптотические направления. В этом пункте мы приведем без доказательств простые следствия из теорем 2, 3 и 4 в терминах асимптотических направлений для f -н.п.

Асимптотическим направлением для f -н.п. к набору α называется такая точка $\theta \in \partial B_f^1(0)$, для которой найдется подпоследовательность ν_j такая, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \Xi_{\nu_j} = \theta.$$

Множество всех асимптотических направлений для α будем обозначать через $\Gamma_f(\alpha)$. Ясно, что $\Gamma_f(\alpha) \subseteq B_f^1(0)$ – замкнутое множество. Похожим, но несколько другим образом, асимптотические направления определяет Роджерс [15].

Множество $\mathcal{A} \subseteq B_f^1(0)$ будем называть *f -асимптотически допустимым*, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ найдется последовательность (конечная или бесконечная) $\theta_0 = x, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_j \in \mathcal{A}$, такая, что

- 1) последовательность $\{\theta_j\}$ удовлетворяет условию А или условию Б из п. 7;
- 2) последний член последовательности равен y или $\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j = y$.

ТЕОРЕМА 6. Если $\mathcal{A} \subseteq B_f^1(0)$ замкнуто и f -асимптотически допустимо, то найдется набор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ чисел, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, таких, что $\mathcal{A} = \Gamma_f(\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть норма f гладкая. Если в замкнутом $\mathcal{A}$ найдется хотя бы одна пара центрально симметричных относительно 0 точек, то найдется набор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ чисел, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, таких, что $\mathcal{A} = \Gamma_f(\alpha)$.

Теорема 6 следует из теоремы 4. Она подтверждает наблюдение Роджерса [15] о том, что множество асимптотических направлений не обязано быть центрально симметричным, но тем не менее некоторое подобие симметрии у него имеет место. По-видимому, следствие верно и для многих негладких норм, например для нормы $\max_j |x_j|$.

Из теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 7. Пусть норма f строго выпукла. Тогда найдется положительное δ_1 , зависящее от f , такое, что если множество $\mathcal{A} \subset \partial B_f^1(0)$ таково, что

$$\mathcal{A} \subset \text{int } B_f^{1+\delta_1}(\theta) \quad \forall \theta \in \mathcal{A},$$

то не существует вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\mathcal{A} = \Gamma_f(\alpha)$.

В заключение автор хочет отметить, что поводом к написанию настоящей работы послужила статья [16] (в которой дан обзор результатов о распределении наилучших приближений в свете теории возмущений уравнений Гамильтона) и общение с профессором Пьером Лошаком на конференции в Йорке осенью 1997 года. Впервые автор докладывал результаты настоящей работы на конференции по теории чисел в Люмини весной 1998 года [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
- [2] Мощевитин Н. Г. О наилучших совместных приближениях // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 214–215.
- [3] Khinchin A. Ya. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1926. V. 50. P. 170–195.
- [4] Хинчин А. Я. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. № 3. С. 249–258.
- [5] Lagarias J. S. Best simultaneous Diophantine approximation. II // Pacific J. Math. 1982. V. 102. № 1. P. 61–88.
- [6] Мощевитин Н. Г. О геометрии наилучших приближений // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 587–589.
- [7] Мощевитин Н. Г. Многомерные диофантовы приближения и динамические системы // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2. № 1. С. 81–95.
- [8] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961.
- [9] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
- [10] Rogers C. A. The signatures of the errors of simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1951. V. 52. P. 186–190.
- [11] Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximations // Proc. London Math. Soc. (3). 1955. V. 5. P. 435–448.
- [12] Мощевитин Н. Г. О совместных диофантовых приближениях // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 706–716.
- [13] Lagarias J. S. Best simultaneous Diophantine approximation. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272. № 2. P. 545–554.
- [14] Sos V. T., Szekeres G. Rational approximation vectors // Acta Arith. 1988. V. 49. № 3. P. 255–261.
- [15] Rogers C. A. The asymptotic directions of n linear forms in $n + 1$ integrall variables // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1951. V. 52. P. 161–185.
- [16] Лошак П. Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях // УМН. 1992. Т. 47. № 67. С. 59–140.
- [17] Moshchevitin N. Best approximations: convex functions, signatures and asymptotic directions // Diophantine Approximations. Conference at CIRM (Luminy, 18–22 Mai, 1998). Abstracts of talks.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.04.1999