Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Долгополов, И. Н. Родионова, Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 533–540

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:50:31

Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа

В. М. Долгополов, И. Н. Родионова

Во введенных авторами специальных классах решения задачи Коши одного гиперболического уравнения доказаны принципы локального экстремума для случаев положительного и отрицательного значений параметра уравнения.

Библиография: 2 названия.

Уравнение

$$L(U) = U_{\xi\eta} + \frac{p}{\eta - \xi} U_{\xi} - \frac{p}{\eta - \xi} U_{\eta} - \lambda U = 0 \quad (1)$$

($p, \lambda = \text{const}$) рассмотрим в области $D = \{(\xi, \eta)/0 < \xi < \eta < h\}$. В работе [1] определен специальный класс решений ${}_0R$ задачи Коши для уравнения (1) с данными

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} U(\xi, \eta) = \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq h, \quad (2)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} (\eta - \xi)^{2p} (U_{\xi} - U_{\eta}) = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < h, \quad (3)$$

для значений параметра $0 < |p| < 1/2$.

Для этого потребовалось интегральное представление заданной функции $\tau(\xi)$:

$$\tau(\xi) = \int_0^{\xi} T(s)(\xi - s)^{-2p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(\xi - s)^2) ds, \quad {}_0F_1(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\alpha)_n n!}. \quad (4)$$

Получена формула решения задачи Коши для уравнения (1) в классе ${}_0R$:

$$U(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} T(s)(\xi - s)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(\eta - s)(\xi - s)) ds + \int_{\xi}^{\eta} N(s)(s - \xi)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, -\lambda(s - \xi)(\eta - s)) ds, \quad (5)$$

$$N(s) = \frac{1}{2 \cos \pi p} T(s) - k\nu(s), \quad k = \text{const}. \quad (6)$$

Работа выполнена при поддержке АВЦП (гранты 3341 и 10854), а также госзаказа Министерства образования и науки РФ (госзаказ СамГУ № 1.909.2011).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $U(\xi, \eta)$ назовем *решением специального класса ${}_0R$ задачи Коши для уравнения (1) с данными (2), (3) при $0 < p < 1/2$ в области D* , если она представлена формулой (5), в которой функции $T(s)$, $N(s)$ непрерывны на $[0, h]$, $T'(s)$, $N'(s)$ непрерывны в $(0, h)$ и интегрируемы на $[0, h]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $U(\xi, \eta)$ назовем *решением специального класса ${}_0R$ задачи Коши для уравнения (1) с данными (2), (3) при $p = -\beta$, $0 < \beta < 1/2$, в области D* , если она представлена формулой (5) при $p = -\beta$, в которой функции $T(s)$, $N(s)$ непрерывны на $[0, h]$.

Следует отметить, что введение специального класса решений не только значительно упрощает формулу решения задачи Коши в случае положительных значений параметра p уравнения (1), но и распространяет ее на случай отрицательных значений параметра, для которых формула решения задачи Коши имеет более сложную структуру.

Непосредственной проверкой показано, что как при положительных, так и при отрицательных значениях параметра, функция $U(\xi, \eta)$, определяемая формулой (5), является классическим решением уравнения (1). Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что функция (5) удовлетворяет уравнению (1). Рассмотрим случай $0 < p < 1/2$. Условия, налагаемые на функции T и N , позволяют представить

$$T(s) = \int_0^s T'(t) dt + T(0), \quad N(s) = \int_0^s N'(t) dt + N(0).$$

Подставим выражения для T и N в формулу (5) и поменяем порядок интегрирования

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \int_0^\xi T'(t) dt \int_t^\xi (\xi - s)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(\eta - s)(\xi - s)) ds \\ & + \int_0^\xi N'(t) dt \int_\xi^\eta (s - \xi)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, -\lambda(s - \xi)(\eta - s)) ds \\ & + \int_\xi^\eta N'(t) dt \int_t^\eta (s - \xi)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, -\lambda(s - \xi)(\eta - s)) ds \\ & + T(0) \int_0^\xi (\xi - s)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, \lambda(\eta - s)(\xi - s)) ds \\ & + N(0) \int_\xi^\eta (s - \xi)^{-p} (\eta - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p, -\lambda(\eta - s)(s - \xi)) ds = \sum_{k=1}^5 U_k(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое $U_1(\xi, \eta)$, выразим внутренний интеграл через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$g(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\eta - t)^{n-p} (\xi - t)^{n-p+1}}{(1-p)_n n! (1-p+n)} F\left(p-n, 1, 2-p+n, \frac{\xi-t}{\eta-t}\right).$$

Имеем

$$L(U_1) = \int_0^\xi T'(t) L(g(\xi, \eta, t)) dt.$$

Используя формулы дифференцирования гипергеометрической функции Гаусса [2]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[z^{c-1}F(a, b, c, z)] &= (c-1)z^{c-2}F(a, b, c-1, z), \\ \frac{d}{dz}[z^a F(a, b, c, z)] &= az^{a-1}F(a+1, b, c, z),\end{aligned}$$

после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned}L(g(\xi, \eta, t)) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\eta-t)^{n-p} (\xi-t)^{n-p} p}{(2-p)_n n! (\eta-\xi)(1-p)} \\ &\quad \times \left[(n-p+1) \frac{\eta-\xi}{\eta-t} F\left(1+p-n, 1, 1-p+n, \frac{\xi-t}{\eta-t}\right) \right. \\ &\quad \left. - (n-p+1) F\left(p-n, 1, 1-p+n, \frac{\xi-t}{\eta-t}\right) \right. \\ &\quad \left. + (n-p) \frac{\xi-t}{\eta-t} F\left(1+p-n, 1, 2-p+n, \frac{\xi-t}{\eta-t}\right) \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n (\eta-t)^{n-1-p} (\xi-t)^{n-p} F(1+p-n, 1, 1-p+n, (\xi-t)/(\eta-t))}{(1-p)_n (n-1)!} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} (\eta-t)^{n-p} (\xi-t)^{n-p+1} F(p-n, 1, 2-p+n, (\xi-t)/(\eta-t))}{(1-p)(2-p)_n n!}.\end{aligned}$$

В первом слагаемом выражение в квадратных скобках равно нулю в силу формулы [2]

$$c(1-z)F(a, b, c, z) - cF(a-1, b, c, z) + (c-b)zF(a, b, c+1, z) = 0.$$

После замены $n = k+1$ вторая сумма уничтожается взаимно с последним слагаемым, получаем $L(U_1) \equiv 0$. Подобными рассуждениями показываем, что $L(U_k) \equiv 0$ для $k = 2, \dots, 5$.

В случае $p = -\beta$ доказательство утверждения упрощается, так как в формуле (5) возможно дифференцирование по ξ и η под знаком интеграла.

При решении ряда краевых задач с условиями сопряжения на линии сингулярности коэффициентов уравнения (1) требуется предварительно доказать единственность решения поставленной задачи. Это может быть достигнуто с помощью принципов экстремума. В настоящей работе доказаны принципы локального экстремума решений уравнения (1) специального класса ${}_0R$ для положительных и отрицательных значений параметра p .

ТЕОРЕМА 1 (Принцип экстремума). Пусть $U(\xi, \eta)$ – решение уравнения (1) в области D_1 при

$$-p \leq \lambda \leq (1+p) \ln \frac{1-p}{1-2p}, \quad 0 < p < \frac{1}{2},$$

принадлежащее классу ${}_0R$, удовлетворяющее условиям

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(\xi) \in C^1(0, h), \quad U(0, \eta) \equiv 0. \quad (7)$$

Если $\tau(\xi)$ в точке ξ_0 , $0 < \xi_0 < h$, принимает наибольшее положительное (соответственно наименьшее отрицательное) значение в $(0, h)$, то $\nu(\xi_0) > 0$ (соответственно $\nu(\xi_0) < 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (4), (6) при условиях (7) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \nu(s) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-2p)} & \left[\frac{1}{\Gamma(2p)} \int_0^s \tau'(y)(s-y)^{2p-1} {}_0F_1(p, \lambda(s-y)^2) dy \right. \\ & \left. - \frac{4\lambda}{\Gamma(1+2p)} \int_0^s \tau(y)(s-y)^{2p} {}_0F_1(1+p, \lambda(s-y)^2) dy \right], \quad (8) \\ \gamma = \frac{\Gamma(1-2p)}{4 \cos \pi p \Gamma^2(1-p)}. \end{aligned}$$

Пусть $s = \xi_0$ — точка, в которой $\tau(\xi)$ принимает наибольшее положительное значение. Положим в формуле (8) $s = \xi_0$ и представим $\nu(\xi_0)$ в удобной для нас форме:

$$\begin{aligned} \nu(\xi_0) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-2p)} & \left[\frac{1}{\Gamma(2p)} \int_0^{\xi_0} [\tau(y) - \tau(\xi_0)]'_y (\xi_0 - y)^{2p-1} {}_0F_1(p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \right. \\ & - \frac{4\lambda}{\Gamma(1+2p)} \int_0^{\xi_0} [\tau(y) - \tau(\xi_0)] (\xi_0 - y)^{2p} {}_0F_1(1+p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \\ & \left. - \frac{4\lambda\tau(\xi_0)}{\Gamma(1+2p)} \int_0^{\xi_0} (\xi_0 - y)^{2p} {}_0F_1(1+p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

В первом слагаемом (9) проинтегрируем по частям, взяв $dv = [\tau(y) - \tau(\xi_0)]'_y dy$. После преобразований получаем

$$\begin{aligned} \nu(\xi_0) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-2p)\Gamma(2p)} & \times \left[\xi_0^{2p-1} \tau(\xi_0) {}_0F_1(p, \lambda\xi_0^2) \right. \\ & + (1-2p) \int_0^{\xi_0} [\tau(\xi_0) - \tau(y)] (\xi_0 - y)^{2p-2} {}_0F_1(p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \\ & \left. - \frac{2\lambda\tau(\xi_0)}{p} \int_0^{\xi_0} (\xi_0 - y)^{2p} {}_0F_1(1+p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что функция $\tau(y)$ на $[0, h]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, в силу чего

$$\tau(\xi_0) - \tau(y) = \tau'(t)(\xi_0 - y), \quad y < t < \xi_0.$$

Вычислим интеграл в третьем слагаемом и результат объединим с первым слагаемым. Имеем

$$\begin{aligned} \nu(\xi_0) = \frac{1}{\gamma\Gamma(1-2p)\Gamma(2p)} & \times \left[\xi_0^{2p-1} \tau(\xi_0) \left\{ 1 + (2p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p)_n n! (2p+2n-1)} \right\} \right. \\ & \left. + (1-2p) \int_0^{\xi_0} [\tau(\xi_0) - \tau(y)] (\xi_0 - y)^{2p-2} {}_0F_1(p, \lambda(\xi_0 - y)^2) dy \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\lambda > 0$, тогда ${}_0F_1(p, \lambda(\xi_0 - y)^2) > 0$ при любом λ . Оценим первое слагаемое формулы (10)

$$\begin{aligned} & 1 + (2p - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p)_n n! (2p + 2n - 1)} \\ &= \frac{1}{p} - 1 + \frac{2p - 1}{p} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p + 1)_{n-1} n! (2p + 2n - 1)} \right]. \end{aligned}$$

Для $n \geq 1$ имеет место оценка

$$\frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p + 1)_{n-1} n! (2p + 2n - 1)} < \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p + 1)^n n!}.$$

А так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(p + 1)^n n!} = \exp \frac{\lambda \xi_0^2}{p + 1},$$

то из неравенства

$$\frac{1}{p} - 1 + \frac{2p - 1}{p} \exp \frac{\lambda \xi_0^2}{p + 1} > 0$$

находим значения λ , для которых первое слагаемое формулы (10) будет положительным. С учетом того, что $0 < \xi_0 < 1$, получаем

$$0 < \lambda \leq (1 + p) \ln \frac{1 - p}{1 - 2p}.$$

В случае отрицательного значения λ оба ряда, входящие в формулу (10), будут положительны при $\lambda \geq -p$ в силу теоремы Лейбница.

Таким образом, $\nu(\xi_0) > 0$ при $-p \leq \lambda \leq (1 + p) \ln((1 - p)/(1 - 2p))$. Аналогично доказываем, что $\nu(\xi_0) < 0$, если $\tau(\xi_0)$ – наименьшее отрицательное значение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $U(\xi, \eta)$ – решение уравнения (1) при

$$p = -\beta, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad -\frac{\beta(1 - 2\beta)}{1 + 2\beta} \leq \lambda \leq \beta,$$

принадлежащее классу ${}_0R$ в области D ; $\tau(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(\xi) \in C^2(0, h), \quad U(0, \eta) \equiv 0. \quad (11)$$

Если $\tau(\xi)$ в точке ξ_0 , $0 < \xi_0 < h$, принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение в $(0, h)$, то $\nu(\xi_0) < 0$ (> 0). При этом $\nu(\xi)$ определяется условием (3) при $p = -\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (4), (6) при $p = -\beta$ и условиях (11) получаем соотношение

$$\begin{aligned} \nu(\xi) = \gamma_1 \left[\xi^{-2\beta} \tau'(0) {}_0F_1(1 - \beta, \lambda \xi^2) + \int_0^\xi [\tau''(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \right. \\ \left. - 4\lambda \int_0^\xi \tau(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \right] = \gamma_1 \sum_{k=1}^3 J_k(\xi), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{4 \cos \pi \beta \Gamma^2(1 + \beta)}{\Gamma^2(1 + 2\beta) \Gamma(1 - 2\beta)}.$$

Пусть функция $\tau(\xi)$ в точке ξ_0 , $0 < \xi_0 < h$, принимает наибольшее положительное значение. В формуле (12) представим слагаемое $J_2(\xi)$ в виде

$$J_2(\xi) = \int_0^{x_1} \tau''(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\ + \int_{x_1}^{\xi} \tau''(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt = J_2^{(1)} + J_2^{(2)}, \quad 0 < x_1 < \xi_0.$$

Слагаемое $J_2^{(2)}$ оставим без изменений, а $J_2^{(1)}$ проинтегрируем по частям, взяв $dv = \tau''(t) dt$. Имеем

$$J_2^{(1)} = \tau'(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\xi - x_1)^{2n-2\beta}}{(1-\beta)_n n!} - \tau'(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi^{2n-2\beta}}{(1-\beta)_n n!} \\ - 2\beta \int_0^{x_1} \tau'(t)(\xi - t)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2) dt.$$

Второе слагаемое уничтожается взаимно со слагаемым J_1 формулы (12). В $J_2^{(1)}$ еще раз проинтегрируем по частям

$$J_2^* = -2\beta \int_0^{x_1} \tau'(t)(\xi - t)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\ = -2\beta(\xi - x_1)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - x_1)^2) \tau(x_1) \\ - 2\beta \int_0^{x_1} \tau(t)(\xi - t)^{-2\beta-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (2n - 2\beta - 1)(\xi - t)^{2n}}{(-\beta)_n n!} dt.$$

Преобразуем подынтегральную сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (2n - 2\beta - 1)(\xi - t)^{2n}}{(-\beta)_n n!} \\ = \frac{2\lambda(\xi - t)^2}{-\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) - (2\beta + 1) {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2).$$

Получаем представление слагаемого

$$J_2^* = -2\beta(\xi - x_1)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - x_1)^2) \tau(x_1) \\ + 4\lambda \int_0^{x_1} \tau(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\ + 2\beta(1 + 2\beta) \int_0^{x_1} [\tau(t) - \tau(\xi)](\xi - t)^{-2\beta-2} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\ + \tau(\xi) 2\beta(1 + 2\beta) \int_0^{x_1} (\xi - t)^{-2\beta-2} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2) dt. \quad (13)$$

В формуле (13) вычисляем последний интеграл и результат подставляем в формулу (12). Имеем

$$\nu(\xi) = \gamma_1 \left[-4\lambda \int_0^{\xi} \tau(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{\xi} \tau''(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \tau'(x_1)(\xi - x_1)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - x_1)^2) \\
& - 2\beta\tau(x_1)(\xi - x_1)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - x_1)^2) \\
& + 4\lambda \int_0^{x_1} \tau(t)(\xi - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\
& + 2\beta(1 + 2\beta) \int_0^{x_1} [\tau(t) - \tau(\xi)](\xi - t)^{-2\beta-2} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - t)^2) dt \\
& + \tau(\xi)2\beta(1 + 2\beta) \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\xi - x_1)^{2n-2\beta-1}}{(-\beta)_n n! (2n - 2\beta - 1)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\xi)^{2n-2\beta-1}}{(-\beta)_n n! (2n - 2\beta - 1)} \right] \\
& = \gamma_1 \sum_{k=1}^8 i_k.
\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим слагаемые i_4 и i_7 формулы (14). Отделяя от рядов слагаемые, соответствующие $n = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
i_4 + i_7 & = -2\beta\tau(x_1)(\xi - x_1)^{-2\beta-1} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi - x_1)^2) \\
& \quad - 2\beta(1 + 2\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (\xi - x_1)^{2n-2\beta-1} \tau(\xi)}{(-\beta)_n n! (2n - 2\beta - 1)} \\
& = 2\beta(\xi - x_1)^{-2\beta-1} (\tau(\xi) - \tau(x_1)) + \alpha(\xi - x_1),
\end{aligned}$$

где $\alpha(\xi - x_1) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow x_1$. В силу теоремы Лагранжа

$$\tau(\xi) - \tau(x_1) = \tau'(\xi^*)(\xi - x_1), \quad x_1 < \xi^* < \xi.$$

Подставим полученный результат в формулу (12), положим в ней $\xi = \xi_0$, и с учетом того, что $\tau'(\xi_0) = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\nu(\xi_0) & = \gamma \left[-4\lambda \int_0^{\xi_0} \tau(t)(\xi_0 - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi_0 - t)^2) dt \right. \\
& \quad + \int_{x_1}^{\xi_0} \tau''(t)(\xi_0 - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi_0 - t)^2) dt \\
& \quad + 4\lambda \int_0^{x_1} \tau(t)(\xi_0 - t)^{-2\beta} {}_0F_1(1 - \beta, \lambda(\xi_0 - t)^2) dt \\
& \quad + 2\beta(1 + 2\beta) \int_0^{x_1} (\tau(t) - \tau_1(\xi_0))(\xi_0 - t)^{-2\beta-2} {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi_0 - t)^2) dt \\
& \quad \left. + \tau(\xi_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n-2\beta-1} 2\beta(1 + 2\beta)}{(-\beta)_n n! (2n - 2\beta - 1)} + 2\beta(\xi_0 - x_1)^{-2\beta} \tau'(\xi^*) + \alpha(\xi_0 - x_1) \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \xi_0^{2n}}{(-\beta)_n n! (2n - 2\beta - 1)} < 0 \quad \text{и} \quad {}_0F_1(-\beta, \lambda(\xi_0 - t)^2) > 0$$

одновременно при $-\beta(1 - 2\beta)/(1 + 2\beta) \leq \lambda \leq \beta$, $\tau(t) - \tau(\xi_0) < 0$, а также тот факт, что при $x_1 \rightarrow \xi_0$ ($\xi^* \rightarrow \xi_0$) первое и третье слагаемые формулы (15) взаимно уничтожаются, второе и последние два обращаются в нуль, перейдем к пределу при $x_1 \rightarrow \xi_0$ в выражении (15). Получим $\nu(\xi_0) < 0$.

В случае наименьшего отрицательного значения $\tau_1(\xi_0)$ рассуждения аналогичны. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Долгополов, М. В. Долгополов, И. Н. Родионова, “Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа”, *ДАН*, **429**:5 (2009), 583–589.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.

В. М. Долгополов

Самарский государственный университет

E-mail: mvdolg@samsu.ru, mikhaildolgopолоv@rambler.ru

Поступило

05.12.2011

И. Н. Родионова

Самарский государственный университет