Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Линг Жу, Уточнение неравенств Беккера–Штарка, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 401–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:37:55

Уточнение неравенств Беккера–Штарка

Линг Жу

В данной работе получено некоторое уточнение неравенств Беккера–Штарка и приводится простое доказательство этого нового неравенства.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm8905

1. Введение. Стечкин [1] (также см. Митрович [2; 3.4.19, с. 246]) получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 1 [1; Лемма 2.1]. *Если $0 < x < \pi/2$, то*

$$\frac{4}{\pi} \frac{x}{\pi - 2x} < \operatorname{tg} x. \quad (1)$$

Позже, Беккер и Штарк [3] (также см. Куанг [4; 5.1.102, с. 248]) получили следующую двустороннюю рациональную аппроксимацию функции $\operatorname{tg} x/x$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $0 < x < \pi/2$. Тогда*

$$\frac{8}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}. \quad (2)$$

Кроме того, 8 и π^2 – наилучшие константы в оценках (2).

В данной работе мы даем следующее уточнение неравенств Беккера–Штарка.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $0 < x < \pi/2$. Тогда*

$$\frac{8}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{\pi^2 - 9}{6\pi^4}(\pi^2 - 4x^2) < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{8}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{10 - \pi^2}{\pi^4}(\pi^2 - 4x^2). \quad (3)$$

Кроме того, $-(\pi^2 - 9)/(6\pi^4)$ и $-(10 - \pi^2)/\pi^4$ – наилучшие константы в оценках (3).

2. Две леммы.

ЛЕММА 1. *Функция*

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\zeta(n)$ – дзета функция Римана, является убывающей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n) = \zeta(n) - \frac{1}{2^n}\zeta(n)$$

эквивалентна лямбда функции

$$\lambda(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n},$$

которая является убывающей.

ЛЕММА 2 [5]–[7]. Пусть $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – две непрерывные функции, дифференцируемые на (a, b) . Кроме того, пусть $g' \neq 0$ на (a, b) . Если f'/g' является возрастающей (или убывающей) функцией на (a, b) , то функции

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \quad \text{и} \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

также являются возрастающими (или убывающими) на (a, b) .

3. Доказательство теоремы 3. Пусть

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\operatorname{tg} x/x - 8/(\pi^2 - 4x^2) - 2/\pi^2}{\pi^2 - 4x^2} = \frac{\operatorname{tg} x/x(\pi^2 - 4x^2) - 8 - 2/\pi^2(\pi^2 - 4x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \\ &= \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(\pi/2)^-}{g_1(x) - g_1(\pi/2)^-}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}(\pi^2 - 4x^2) - 8 - \frac{2}{\pi^2}(\pi^2 - 4x^2), \quad g_1(x) = (\pi^2 - 4x^2)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} &= \frac{-(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x)/(8x^3)(\pi^2 - 4x^2) + \operatorname{tg} x/x - 2/\pi^2}{2(\pi^2 - 4x^2)} \\ &= \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_2(x) - f_2(\pi/2)^-}{g_2(x) - g_2(\pi/2)^-}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f_2(x) = -\frac{x \sec^2 x - \operatorname{tg} x}{8x^3}(\pi^2 - 4x^2) + \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{2}{\pi^2}, \quad g_2(x) = 2(\pi^2 - 4x^2).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{f'_2(x)}{g'_2(x)} &= -\frac{[3(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x) - 2x^2 \sec^2 x \operatorname{tg} x](\pi^2 - 4x^2) + 16x^2(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x)}{128x^5} \\ &= -\frac{1}{128} \frac{p(x)}{q(x)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q(x) = x^5$ и

$$p(x) = [3(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x) - 2x^2 \sec^2 x \operatorname{tg} x](\pi^2 - 4x^2) + 16x^2(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x). \quad (7)$$

Пусть

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}; \quad (8)$$

тогда

$$\frac{p^{(i)}(x)}{q^{(i)}(x)} = \frac{p^{(i)}(x) - p^{(i)}(0)}{q^{(i)}(x) - q^{(i)}(0)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (9)$$

$$\frac{p^{(5)}(x)}{q^{(5)}(x)} = \frac{p^{(5)}(x)}{5!}. \quad (10)$$

Таким образом,

$$\left(\frac{p^{(5)}(x)}{q^{(5)}(x)} \right)' = \frac{p^{(6)}(x)}{5!}. \quad (11)$$

Следующее разложение в степенной ряд можно найти в работе [8; 1.3.1.4(3)]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} (-1)^{n-1} B_{2n} x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} |B_{2n}| x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

(Более подробное описание чисел Бернулли с четными индексами B_{2n} дано на с. 231 и 232 в работе [9].)

Тогда имеем

$$\sec^2 x = (\operatorname{tg} x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} (2n-1) |B_{2n}| x^{2n-2}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

$$x \sec^2 x - \operatorname{tg} x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} (2n-2) |B_{2n}| x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sec^2 x \operatorname{tg} x &= \frac{1}{2} (\sec^2 x)' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} (2n-1)(2n-2) |B_{2n}| x^{2n-3}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \pi^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) |B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2) x^{2n-1} \\ &\quad - 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) |B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2) x^{2n+1} \\ &\quad + 16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) |B_{2n}|}{(2n)!} (2n-2) x^{2n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

в силу выражений (14), (15) и (7). Следовательно,

$$p^{(6)}(x) = \pi^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) |B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2)(2n-1)(2n-2) \cdots (2n-6) x^{2n-7}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2)(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& + 16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} (2n-2)(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& = \pi^2 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2)(2n-1)(2n-2) \cdots (2n-6)x^{2n-7} \\
& - 4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2)(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& + 16 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} (2n-2)(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& = \pi^2 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} 2(2-n)(2n-2)(2n-1)(2n-2) \cdots (2n-6)x^{2n-7} \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} (2n-2)8n(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& = \pi^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)|B_{2n+2}|}{(2n+2)!} (1-n)4n(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} (n-1)16n(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5} \\
& := \sum_{n=3}^{\infty} D(n)2^{2n+2}(n-1)4n(2n+1)(2n) \cdots (2n-4)x^{2n-5}, \tag{17}
\end{aligned}$$

где

$$D(n) = \left[\frac{(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} - \frac{\pi^2(2^{2n+2}-1)|B_{2n+2}|}{(2n+2)!} \right].$$

Из того, что функция $(1 - 1/2^{2n})\zeta(2n)$ убывает в силу леммы 1 следует, что

$$\frac{2^{2n+2}-1}{4}\zeta(2n+2) < (2^{2n}-1)\zeta(2n). \tag{18}$$

Применяя представление (см. [10; теорема 3.4])

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}|B_{2n}|, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

из (18) получим

$$\frac{\pi^2(2^{2n+2}-1)}{(2n+2)!}|B_{2n+2}| < \frac{(2^{2n}-1)}{(2n)!}|B_{2n}|$$

или

$$D(n) > 0. \tag{20}$$

Таким образом, из (17) и (20) следует, что $p^{(6)}(x) > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$, т.е. функция $p^{(5)}(x)/q^{(5)}(x)$ возрастает на $(0, \pi/2)$ в силу (11). Итак, применяя лемму 2

несколько раз, получим, что функция $h(x)$ возрастает на $(0, \pi/2)$, откуда следует, что функция $f'_2(x)/g'_2(x)$ убывает на $(0, \pi/2)$ в силу (6). Снова применяя лемму 2, окончательно получим, что функция $F(x)$ убывает на $(0, \pi/2)$ в силу (5) и (4).

В то же время, выполняются равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{10 - \pi^2}{\pi^4} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} F(x) = -\frac{\pi^2 - 9}{6\pi^4},$$

откуда следует, что $-(\pi^2 - 9)/(6\pi^4)$ и $-(10 - \pi^2)/\pi^4$ будут наилучшими константами в (3).

4. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что обе оценки функции $\operatorname{tg} x/x$, представленные в (3), являются следующими улучшениями оценок Беккера–Штарка (2).

(i) Очевидно, что нижняя грань в (3) больше, чем нижняя грань в (2).

(ii) Покажем, что верхняя грань в (3) меньше, чем верхняя грань в (2): в области $0 < x < \pi/2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{10 - \pi^2}{\pi^4}(\pi^2 - 4x^2) &< \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}, \\ \iff 8\pi^4 + 2\pi^2(\pi^2 - 4x^2) - (10 - \pi^2)(\pi^2 - 4x^2)^2 &< \pi^6, \\ \iff (10 - \pi^2)(\pi^2 - 4x^2)^2 - 2\pi^2(\pi^2 - 4x^2) + \pi^6 - 8\pi^4 &> 0, \end{aligned}$$

что равносильно

$$u(y) \equiv (10 - \pi^2)y^2 - 2\pi^2y + \pi^6 - 8\pi^4 > 0, \quad 0 < y < \pi^2,$$

где $y = \pi^2 - 4x^2$. Теперь имеем

$$u(\pi^2) = (10 - \pi^2)\pi^4 - 2\pi^4 + \pi^6 - 8\pi^4 = 0,$$

тогда как

$$u'(y) = 2(10 - \pi^2)y - 2\pi^2 < 2\pi^2(9 - \pi^2) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < \pi^2.$$

Следовательно, $u(y) > 0$ при $0 < y < \pi^2$, так что верхняя грань в (3) меньше, чем верхняя грань в (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В 2003 г. Чао-Пинг Чен и Фенг Ки [11] доказали, что

$$1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^3 \operatorname{tg} x < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < 1 + \frac{x^2}{3} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 x^3 \operatorname{tg} x \quad (21)$$

при $x \in (0, \pi/2)$.

Теперь можно сравнить результаты, представленные в (3), с результатами, представленными в (21). На интервале $(0, 0.6648)$, нижняя грань в (21) больше, чем нижняя грань в (3), а на большем интервале $(0.6648, \pi/2)$, нижняя грань в (3) больше, чем нижняя грань в (21). Верхняя грань в (21) меньше, чем верхняя грань в (3) только на меньшем интервале $(0, 0.1308)$, тогда как верхняя грань в (3) меньше, чем верхняя грань в (21) на интервале $(0.1308, \pi/2)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Б. Стечкин, “Несколько замечаний о тригонометрических полиномах”, *УМН*, **10**:1 (1955), 159–166.
- [2] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Grundlehren Math. Wiss., **165**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
- [3] M. Becker, E. L. Stark, “On hierarchy of polynomial inequalities for $\tan(x)$ ”, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **602–633** (1978), 133–138.
- [4] J. C. Kuang, *Applied Inequalities*, Shangdong Sci. Tech. Press, Jinan City, Shangdong Province, China, 2004 (Chinese).
- [5] G. D. Anderson, S.-L. Qiu, M. K. Vamanamurthy, M. Vuorinen, “Generalized elliptic integral and modular equations”, *Pacific J. Math.*, **192**:1 (2000), 1–37.
- [6] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, M. Vuorinen, “Inequalities for quasiconformal maps in space”, *Pacific J. Math.*, **160**:1 (1993), 1–18.
- [7] I. Pinelis, “L’Hospital rules for monotonicity and the Wilker–Anglesio inequality”, *Amer. Math. Monthly*, **111**:10 (2004), 905–909.
- [8] A. Jeffrey, *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Elsevier Acad. Press, San Diego, CA, 2004.
- [9] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Grad. Texts in Math., **84**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [10] W. Scharlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski. Lectures on the Theory of Numbers and its Historical Development*, Undergrad. Texts Math., Springer-Verlag, New York, 1985.
- [11] C.-P. Chen, F. Qi, “A double inequality for remainder of power series of tangent function”, *Tamkang J. Math.*, **34**:4 (2003), 351–355.

Линг Жу

Zhejiang Gongshang University, Китай

E-mail: zhuling0571@163.com

Поступило

20.05.2009

Исправленный вариант

03.05.2011