Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джиан Жанг, Жи Шу, Об одном классе нелинейных уравнений Шрёдингера с неотрицательными потенциалами в двумерных пространствах, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 515–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:55:40

Об одном классе нелинейных уравнений Шрёдингера с неотрицательными потенциалами в двумерных пространствах

Джиан Жанг, Джи Шу

В данной работе обсуждается класс критических нелинейных уравнений Шрёдингера, тесно связанных с некоторыми приложениями, в частности, с конденсатами Бозе–Эйнштейна с взаимным притяжением двух тел. В процессе построения ограниченной вариационной задачи и так называемых инвариантных многообразий эволюционного потока авторы получили точный критерий коллапса решений и существования решений в целом.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. В данной работе рассматривается критическое нелинейное уравнение Шрёдингера с неотрицательными потенциалами

$$i\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi - |\varphi|^2\varphi, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(t, x): [0, T) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – комплекснозначная волновая функция, $i = \sqrt{-1}$, Δ – оператор Лапласа на пространстве $\mathbb{R}^2$, а потенциал $V(x) \geq 0$ является действительной функцией. Уравнение (1) имеет ясный физический смысл, например, при $V(x) = |x|^2$, оно описывает конденсаты Бозе–Эйнштейна с взаимным притяжением в магнитной ловушке, подобно уравнению Гросса–Питаевского с гармоническим потенциалом [1].

Следующие задачи представляют большой интерес с точки зрения физики. При каких условиях волна становится неустойчивой и расплывается (коллапс решения)? При каких условиях волна будет существовать все время (существование решения в целом)? В настоящее время задачи получения точных критериев коллапса и существования решений в целом исследуются особенно интенсивно.

При отсутствии потенциалов локальная корректность и существование решений в целом в энергетическом пространстве $H^1(\mathbb{R}^N)$ были доказаны в работах Жини-бра и Вело [2] и Като [3]. Свойства коллапса решений для некоторых начальных

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант 11071177), Научно-исследовательского фонда отдела образования провинции Сычуань (грант 11ZA101), и Научно-исследовательского фонда при Бюро науки и технологии провинции Сычуань.

данных изучались в работах Гласси [4] и Огавы и Цуцуми [5], [6]. Несколько интересных критериев коллапса и существования решений в целом были установлены с помощью вариационных рассуждений в работах Берестики и Казенава [7], Вейнштейна [8] и Жанга [9]. Ряд глубоких результатов, касающихся коллапса решений L^2 -критического нелинейного уравнения Шрёдингера, был получен в работах Нава [10], [11] и Ферле [12], [13].

Для общего уравнения (1) с гармоническим потенциалом корректность в соответствующем энергетическом пространстве была доказана в работе О [14]. Орбитальная устойчивость и неустойчивость стоячих волн и существование точного порога для коллапса решения и его существования в целом были установлены в работах Жанга [15]–[17], а свойства коллапса решений изучались в работах Карле [18], [19]. Обзор результатов, полученных для нелинейных уравнений Шрёдингера, дан в работе [20].

В данной работе с помощью вариационных рассуждений изучается точный критерий коллапса и существования в целом решений уравнения (1). Основная идея заключается в использовании ограниченной вариационной задачи и так называемых инвариантных множеств. Тогда можно вывести точный критерий для существования в целом и коллапса решений уравнения (1), применяя либо метод потенциальной ямы [21], либо метод вогнутости [22].

Наши исследования инициированы работами Берестики и Казенава [7], Вейнштейна [8] и Жанга [17]. Статья имеет следующую структуру. В п. 2 даны предварительные сведения. В п. 3 рассматриваются ограниченная вариационная задача и инвариантные многообразия. В п. 4 выводится точный критерий коллапса решения и существования решения в целом.

2. Предварительные сведения. Для уравнения (1) зададим начальные условия

$$\varphi(0, x) = \varphi_0 \quad (2)$$

и определим энергетическое пространство естественным образом как

$$H := \left\{ \psi \in H^1(\mathbb{R}^2), \int V(x)|\psi|^2 dx < \infty \right\}. \quad (3)$$

Всюду далее, чтобы упростить выкладки, будем писать $\int \cdot dx$ вместо $\int_{\mathbb{R}^2} \cdot dx$, H будет гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в $H^1(\mathbb{R}^2)$ и оснащенным скалярным произведением

$$\langle \psi, \phi \rangle_H := \int [\nabla \psi \nabla \bar{\phi} + \psi \bar{\phi} + V(x)\psi \bar{\phi}] dx, \quad (4)$$

и соответствующая норма обозначается как $\|\cdot\|_H$.

В работе [2] доказана локальная корректность задачи Коши (1), (2) в энергетическом пространстве H (см. также Казенав [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть потенциал V удовлетворяет условию, что для любого $|\alpha| \geq 2$ величина $|D^\alpha V|$ ограничена и $\varphi_0 \in H$. Тогда существует единственное

решение φ задачи Коши (1), (2) в $C([0, T]; H)$ при некотором $T \in (0, \infty]$ (максимальное время существования) и либо

$$T = \infty \quad (\text{существование в целом}),$$

либо $T < \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow T} \|\varphi\|_H = \infty \quad (\text{коллапс}).$$

Далее, φ удовлетворяет условиям

$$\int |\varphi|^2 dx = \int |\varphi_0|^2 dx, \quad (5)$$

$$E(\varphi) = \int \left[|\nabla \varphi|^2 + V(x)|\varphi|^2 - \frac{1}{2}|\varphi|^4 \right] dx \equiv E(0). \quad (6)$$

Аналогичные вычисления, проведенные в работах Гласси [4] и Казенава [23], приводят к следующей лемме.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\varphi_0 \in H$ и φ – решение задачи Коши (1), (2) в $C([0, T]; H)$, $|x|\varphi_0 \in L^2(R^2)$. Положим $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 dx$. Тогда

$$J''(t) = 8E(0) - 4 \int [2V(x) + x \cdot \nabla V(x)] |\varphi|^2 dx. \quad (7)$$

3. Ограниченная вариационная задача и инвариантные многообразия.

При $u \in H$ определим следующие функционалы:

$$I(u) = \int \left[|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 + |u|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 \right] dx, \quad (8)$$

$$S(u) = \int [|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2] dx, \quad (9)$$

$$Q(u) = \int \left(|u|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 \right) dx, \quad (10)$$

и определим множество

$$M = \{u \in H / \{0\}, Q(u) = 0\}. \quad (11)$$

Затем рассмотрим следующую ограниченную вариационную задачу:

$$d = \inf_{u \in M} S(u). \quad (12)$$

Сначала заметим, что соотношение (12) приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.1. Выполнено неравенство $d > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Гальярдо–Ниренберга следует, что

$$\int |u|^4 dx \leq c \int |\nabla u|^2 dx \int |u|^2 dx. \quad (13)$$

Всюду далее c обозначает различные положительные постоянные. Из $Q(u) = 0$ следует, что

$$\int |u|^2 dx = \frac{1}{2} \int |u|^4 dx \leq c \int |\nabla u|^2 dx \int |u|^2 dx. \quad (14)$$

Таким образом,

$$\int |\nabla u|^2 dx \geq c > 0. \quad (15)$$

Заметим, что $V(x) \geq 0$, откуда следует, что $d > 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Определим*

$$\begin{aligned} K_+ &:= \{\phi \in H, I(\phi) < d, Q(\phi) > 0\}, \\ K_- &:= \{\phi \in H, I(\phi) < d, Q(\phi) < 0\}. \end{aligned}$$

Тогда K_+ и K_- – все инвариантные многообразия задачи (1), (2), т.е. если $\varphi_0 \in K_+$ или $\varphi_0 \in K_-$, то решение $\varphi(t, x)$ задачи Коши (1), (2) также удовлетворяет условию $\varphi(t, x) \in K_+$ или $\varphi(t, x) \in K_-$ для любого $t \in [0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\varphi(t)$ – решение задачи Коши (1), (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi_0 \in K_+$. Из (5) и (6) следует, что

$$I(\varphi_0) = I(\varphi(t)), \quad t \in [0, T). \quad (16)$$

Так как $I(\varphi_0) < d$, то имеем

$$I(\varphi(t)) < d, \quad t \in [0, T). \quad (17)$$

Чтобы проверить, что $\varphi(t) \in K_+$, нужно доказать, что

$$Q(\varphi(t)) > 0, \quad t \in [0, T). \quad (18)$$

Докажем это утверждение от противного. Предположим, что условие (18) не выполняется. Тогда в силу непрерывности имеем $Q(\varphi_0) > 0$ и, следовательно, существует $\bar{t} > 0$ такое, что

$$Q(\varphi(\bar{t})) = 0. \quad (19)$$

Таким образом, мы показали, что $\varphi(\bar{t}) \in M$. С другой стороны, из (17), (19) и равенства $I(\varphi(\bar{t})) = S(\varphi(\bar{t})) + Q(\varphi(\bar{t}))$ получим

$$S(\varphi(\bar{t})) < d, \quad \varphi(\bar{t}) \in M. \quad (20)$$

А из (12) следует, что это невозможно, и таким образом, условие (18) выполняется при $t \in [0, T)$. Итак, доказано, что K_+ инвариантно относительно потока, порожденного задачей Коши (1), (2). Аналогично, можно доказать, что K_- инвариантно относительно потока, порожденного задачей Коши (1), (2).

4. Точный критерий существования в целом.

ТЕОРЕМА 4.1. Если $\varphi_0 \in K_+$, то решение φ задачи Коши (1), (2) существует в целом при $t \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_0 \in K_+$. Таким образом, из теоремы 3.2 следует, что решение φ задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию $\varphi(t, \cdot) \in K_+$ при $t \in [0, T)$. Поэтому $I(\varphi) < d$ и $Q(\varphi) > 0$. Заметим, что $I(\varphi) = S(\varphi) + Q(\varphi)$, откуда следует, что

$$\int [|\nabla \varphi|^2 + V(x)|\varphi|^2] dx < d, \quad (21)$$

а также

$$\int |\nabla \varphi|^2 dx < c, \quad \int V(x)|\varphi|^2 dx < c. \quad (22)$$

Следовательно, функция $\varphi(t, x)$ ограничена; поэтому в силу предложения 2.1 имеем $T = \infty$, т.е. решение $\varphi(t, x)$ задачи Коши (1), (2) будет существовать в целом при $t \in [0, \infty)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию

$$\text{для всех } x \in \mathbb{R}^2 \quad 2V(x) + x \cdot \nabla V(x) \geq 0. \quad (23)$$

Если $\varphi_0 \in K_-$ и $|x|\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, то решение φ задачи Коши (1), (2) расплывается за конечное время.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_0 \in K_-$, тогда решение φ задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию $\varphi(t, \cdot) \in K_-$ при $t \in [0, T)$. Таким образом, имеем $I(\varphi) < d$ и $Q(\varphi) < 0$. При $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 dx$ из (7) и (23) следует, что

$$J''(t) \leq 16E(0), \quad t \in [0, T). \quad (24)$$

При некотором фиксированном $t \in [0, T)$ существует $0 < \lambda < 1$ такое, что $Q(\lambda\varphi_0) = 0$, т.е.

$$\int \left(|\varphi_0|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 |\varphi_0|^4 \right) dx = 0. \quad (25)$$

Из (12) и (17) следует, что $S(\lambda\varphi_0) \geq d$ и $I(\varphi_0) < S(\lambda\varphi_0)$, т.е.

$$\int \left[|\nabla \varphi_0|^2 + V(x)|\varphi_0|^2 + |\varphi_0|^2 - \frac{1}{2} |\varphi_0|^4 \right] dx < \lambda^2 \int [|\nabla \varphi_0|^2 + V(x)|\varphi_0|^2] dx. \quad (26)$$

В силу (25) и (26) имеем

$$(\lambda^2 - 1) \int \left[|\nabla \varphi_0|^2 dx + V(x)|\varphi_0|^2 - \frac{1}{2} |\varphi_0|^4 \right] dx > 0. \quad (27)$$

Заметим, что $0 < \lambda < 1$, и таким образом,

$$\int \left(|\nabla \varphi_0|^2 + V(x)|\varphi_0|^2 - \frac{1}{2} |\varphi_0|^4 \right) dx < 0, \quad (28)$$

т.е. $E(0) < 0$. Следуя рассуждениям, проведенным в работе Цуцуми и Жанга [24], из (24) и (28) получим, что существует конечный момент времени $T < \infty$, в который решение $\varphi(t, x)$ задачи Коши (1), (2) расплывается. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Очевидно, что

$$\{\phi \in H, I(\phi) < d\} = K_+ \cup K_-.$$

Таким образом, из теоремы 4.2 следует, что теорема 4.1 точна.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть φ_0 принадлежит пространству H и удовлетворяет условию $\|\varphi_0\|_H^2 < d$, тогда решение φ задачи Коши (1), (2) существует в целом при $t \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства $\|\varphi_0\|_H^2 < d$ получим, что $I(\varphi_0) < d$. Кроме того, мы предположили, что $Q(\varphi_0) > 0$. В противном случае, существует $0 < \lambda \leq 1$ такое, что $Q(\lambda\varphi_0) = 0$. Таким образом, имеем $S(\lambda\varphi_0) \geq d$. Заметим, что $I(\varphi_0) = S(\varphi_0) + Q(\varphi_0)$, и следовательно, $I(\lambda\varphi_0) \geq d$. С другой стороны,

$$\|\lambda\varphi_0\|_H^2 = \lambda^2 \|\varphi_0\|_H^2 < \lambda^2 d \leq d,$$

откуда следует, что $I(\lambda\varphi_0) < d$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\varphi_0 \in K_+$, и из теоремы 4.1 получаем утверждение следствия.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Tsurumi, M. Wadati, “Collapse of wavefunctions in multi-dimensional nonlinear Schrödinger equations under harmonic potential”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66** (1997), 3031–3034.
- [2] J. Ginibre, G. Velo, “On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 1–32; “On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 33–71.
- [3] T. Kato, “On nonlinear Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **46**:1 (1987), 113–129.
- [4] R. T. Glassey, “On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations”, *J. Math. Phys.*, **18**:9 (1977), 1794–1797.
- [5] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, “Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation”, *J. Differential Equations*, **92**:2 (1991), 317–330.
- [6] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, “Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:2 (1991), 487–496.
- [7] H. Berestycki, T. Cazenave, “Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein–Gordon non linéaires”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293**:9 (1981), 489–492.
- [8] M. I. Weinstein, “Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates”, *Comm. Math. Phys.*, **87**:4 (1983), 567–576.
- [9] J. Zhang, “Sharp conditions of global existence for nonlinear Schrödinger and Klein–Gordon equations”, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, **48**:2 (2002), 191–207.
- [10] H. Nawa, ““Mass concentration” phenomenon for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity”, *Funkcial. Ekvac.*, **35**:1 (1992), 1–18.
- [11] H. Nawa, “Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:2 (1999), 193–270.
- [12] F. Merle, “Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equation with critical power”, *Duke Math. J.*, **69**:2 (1993), 427–454.
- [13] F. Merle, P. Raphael, “On universality of blowup profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation”, *Invent. Math.*, **156**:3 (2004), 565–672.
- [14] Y. G. Oh, “Cauchy problem and Ehrenfest’s law of nonlinear Schrödinger equations with potentials”, *J. Differential Equations*, **81**:2 (1989), 255–274.

- [15] J. Zhang, “Stability of attractive Bose–Einstein condensates”, *J. Statist. Phys.*, **101**:3-4 (2000), 731–746.
- [16] J. Zhang, “Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **51**:3 (2000), 498–503.
- [17] J. Zhang, “Sharp threshold of blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential”, *Comm. Partial Differential Equations*, **30**:10 (2005), 1429–1443.
- [18] R. Carles, “Critical nonlinear Schrödinger equations with and without harmonic potential”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **12**:10 (2002), 1513–1523.
- [19] R. Carles, “Remark on nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential”, *Ann. Henri Poincaré*, **3**:4 (2002), 757–772.
- [20] C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse*, Appl. Math. Sci., **139**, SpringerVerlag, New York, 1999.
- [21] L. E. Payne, D. H. Sattinger, “Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations”, *Israel J. Math.*, **22**:3-4 (1975), 273–303.
- [22] H. A. Levine, “Instability and non-existence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
- [23] T. Cazenave, *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations*, second edition, Textos de Métodos Matemáticos, **26**, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [24] Y. Tsutsumi, J. Zhang, “Instability of optical solitons for two-wave interaction model in cubic nonlinear media”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **8**:2 (1998), 691–713.

Джиан Жанг

Sichuan Normal University, Китай

Поступило

30.04.2010

Джи Шу

Sichuan Normal University, Китай

E-mail: shuji2008@hotmail.com