Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Кондерла, Один способ построения выпуклых функций, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 74–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 06:50:08

Один способ построения выпуклых функций

Т. Кондерла

Описывается один способ построения выпуклых функций на бесконечномерных пространствах, который затем используется для иллюстрации теоремы Борвейна–Фабиана, приведенной в работе [1]. Именно, приводится простой явный пример непрерывной выпуклой функции на l_p , $p \geq 1$, которая является всюду компактно дифференцируемой, но не является Фреше-дифференцируемой в нуле.

Библиография: 7 названий.

Мы опишем один способ построения выпуклых функций на бесконечномерных пространствах и затем применим этот процесс для иллюстрации одной из теорем, приведенных в работе [1], о существовании точек Гато-дифференцируемости, которые не являются точками Фреше-дифференцируемости (более подробную информацию можно найти, например, в работе [2]); именно, на пространстве l_p , $p \geq 1$, строится выпуклая непрерывная функция, которая всюду компактно дифференцируема и не является Фреше-дифференцируемой в нуле.

Напомним, что отображение f между топологическими векторными пространствами называется *дифференцируемым* в некотором смысле в точке x , если существует линейное непрерывное отображение $A: X \rightarrow Y$ такое, что

$$f(x+h) - f(x) = Ah + r(h)$$

при всех $h \in X$, где r – отображение из X в Y , которое является *малым* в соответствующем смысле. Тогда A называется *производной* от f в точке x и обозначается через $f'(x)$.

Имеется большое количество неэквивалентных определений малости (см., например, [3], [4]). Напомним, что r называется *компактно малым* (соответственно, *Гато-малым*), если для любой последовательности t_n в $\mathbb{R}$, сходящейся сверху к нулю, и для любой сходящейся последовательности h_n в X (соответственно для любого фиксированного $h \in X$) выполняются соотношения

$$\frac{r(t_n h_n)}{t_n} \rightarrow 0 \quad \left(\text{соответственно} \quad \frac{r(t_n h)}{t_n} \rightarrow 0 \right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования Чешской Республики (проект MSM 4781305904).

Если X и Y – нормированные пространства, то r является *Фреше-малым*, если

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0, \quad \|h\| \neq 0.$$

Известно, что в нормированных пространствах из Фреше-дифференцируемости в точке следует компактная дифференцируемость в этой точке. С другой стороны, на нормированном пространстве существуют компактно дифференцируемые функции, которые не являются Фреше-дифференцируемыми (см. [4], [5]).

Для непрерывных выпуклых функций на нормированных пространствах из Гато-дифференцируемости в точке следует компактная дифференцируемость в этой точке (см. [1], [6]). Более того, для функций на произвольных топологических векторных пространствах из Гато-дифференцируемости непрерывной выпуклой функции в точке следует дифференцируемость в смысле Майкла–Бастияни в этой точке [6]. Дифференцируемость в смысле Майкла–Бастияни (см. [4]), вообще говоря, сильнее, чем компактная дифференцируемость, и эквивалентна компактной дифференцируемости в случае нормированных пространств.

1. Способ построения выпуклых непрерывных функций. Напомним, что функция $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если она удовлетворяет следующему условию (так называемому неравенству Дженсена):

$$s(\alpha x + \beta y) \leq \alpha s(x) + \beta s(y) \quad \text{при} \quad x, y \in X, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – некоторое множество, $F(X, \mathbb{R})$ – пространство действительных функций на X , и p – выпуклая функция на $F(X, \mathbb{R})$. Через $\prec$ обозначим отношение упорядоченности на $F(X, \mathbb{R})$,

$$f \prec g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

и предположим, что p монотонно возрастает относительно $\prec$ на неотрицательных функциях. Далее, пусть для любого $x \in X$ задана неотрицательная выпуклая функция φ_x на $\mathbb{R}$ такая, что для каждого $f \in F(X, \mathbb{R})$ функция

$$x \mapsto \varphi_x(f(x))$$

также принадлежит пространству $F(X, \mathbb{R})$, и пусть A – оператор

$$A: F(X, \mathbb{R}) \rightarrow F(X, \mathbb{R}),$$

определяемый формулой

$$(Af)(x) = \varphi_x(f(x)).$$

Тогда $p \circ A$ – выпуклая функция на $F(X, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α, β – неотрицательные действительные числа такие, что $\alpha + \beta = 1$, и пусть $f, g \in F(X, \mathbb{R})$. Тогда имеем

$$A(\alpha f + \beta g) \prec \alpha A(f) + \beta A(g). \quad (2)$$

Действительно, так как каждая функция φ_x выпукла, то

$$\varphi_x(\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \varphi_x(f(x)) + \beta \varphi_x(g(x))$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} A(\alpha f + \beta g)(x) &= \varphi_x(\alpha f(x) + \beta g(x)) \leq \alpha \varphi_x(f(x)) + \beta \varphi_x(g(x)) \\ &= \alpha A(f)(x) + \beta A(g)(x). \end{aligned}$$

Так как функция p выпукла и возрастает относительно $\prec$, то

$$\begin{aligned} (p \circ A)(\alpha f + \beta g) &= p(A(\alpha f + \beta g)) \leq p(\alpha A(f) + \beta A(g)) \\ &\leq \alpha p(A(f)) + \beta p(A(g)) = \alpha(p \circ A)(f) + \beta(p \circ A)(g). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $p \circ A$ выпуклая.

2. Пример применения данного способа. Рассмотрим упомянутое выше применение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Определим функцию $f: l_p \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 1$, как*

$$f(x) = \|(|x_1|^{1+1}, |x_2|^{1+1/2}, |x_3|^{1+1/3}, \dots)\|_p,$$

где

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p}.$$

Утверждается, что эта функция определена на всем пространстве l_p , непрерывна, выпукла и всюду компактно дифференцируема, но не является Фреше-дифференцируемой в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Функция f определена и непрерывна всюду. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, \dots)$ лежит в l_p . Это означает, что $\sum_i |x_i|^p$ конечна и, следовательно, $|x_i|^p \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, существует только конечное число элементов, превосходящих 1. Ясно, что за исключением конечного числа элементов каждый элемент суммы $\sum_i |x_i|^p$ больше или равен соответствующему элементу суммы $\sum_i (|x_i|^{1+1/i})^p$. Следовательно, сумма $\sum_i (|x_i|^{1+1/i})^p$ конечна, откуда следует, что функция f определена всюду.

Чтобы доказать непрерывность, предположим, что $x, \hat{x}$ лежат в шаре радиуса $r \geq 1$ с центром в нуле и $x \rightarrow \hat{x}$ в l_p , т.е. $\|x - \hat{x}\|_p \rightarrow 0$. Покажем, что $f(x) \rightarrow f(\hat{x})$. Так как для любой нормы $\|\cdot\|$ выполняется неравенство $\|(u - v)\| \geq |\|u\| - \|v\||$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\hat{x})| &= \left| \|(|x_1|^{1+1}, |x_2|^{1+1/2}, \dots)\|_p - \|(|\hat{x}_1|^{1+1}, |\hat{x}_2|^{1+1/2}, \dots)\|_p \right| \\ &\leq \|(|x_1|^{1+1} - |\hat{x}_1|^{1+1}, |x_2|^{1+1/2} - |\hat{x}_2|^{1+1/2}, \dots)\|_p := M. \end{aligned}$$

Утверждается, что

$$|x_i|^{1+1/i} - |\hat{x}_i|^{1+1/i} \leq 2r^2(|x_i| - |\hat{x}_i|). \quad (3)$$

Действительно, рассмотрим функцию $g(x) = |x|^{1+\alpha}$ с областью определения $R = (0, r)$, где $0 < \alpha \leq 1$. Тогда $|g'(x)| = (1 + \alpha)|x|^\alpha$ и $|x|^\alpha \leq r^\alpha$, откуда следует, что $|g'(x)| \leq (1 + \alpha)r^\alpha \leq 2r^\alpha$ в R . Таким образом, функция g является липшицевой с постоянной $2r^\alpha$ в R и при $x \geq y$

$$(0 \leq) |x|^{1+\alpha} - |y|^{1+\alpha} = g(x) - g(y) \leq 2r^\alpha(x - y),$$

что доказывает (3). Так как норма $\|\cdot\|_p$ возрастает относительно $\preceq$, то

$$M \leq 2r^2 \|x - \hat{x}\|_p \rightarrow 0.$$

Таким образом, показано, что функция f непрерывна.

Шаг 2. Функция f выпуклая. Функция f – это композиция нормы $\|\cdot\|_p$, которая является выпуклой и, очевидно, возрастающей относительно $\prec$ и функции

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots),$$

где каждая функция $\varphi_i: x_i \mapsto |x_i|^{1+1/i}$ выпукла. Применяя теорему 1 (при $X = \mathbb{N}$), приходим к выводу, что функция f выпуклая.

Шаг 3. Функция f всюду компактно дифференцируема. Для произвольного фиксированного x рассмотрим

$$q(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

и обозначим через K_m множество последовательностей действительных чисел, в которых только первые m элементов отличны от нуля. Утверждается, что q – линейная функция на каждом множестве K_m . Действительно, q – непрерывная (и сублинейная) функция [7; с. 117]. Имеем

$$f(x + h) = \sqrt[p]{|x_1 + h_1|^{(1+1)p} + \dots + |x_m + h_m|^{(1+1/m)p} + |x_{m+1}|^{(1+1/(m+1))p} + \dots}.$$

При фиксированном x функция f , как функция от $h = (h_1, \dots, h_m, 0, 0, \dots) \in K_m$, принадлежит классу C^1 . Таким образом, q является Гато-производной от f на множестве K_m , откуда следует, что q линейна на K_m при любом m . Таким образом, q – линейная функция на объединении всех K_m . Так как это объединение плотно в l_p и q – непрерывная функция, приходим к выводу, что q – линейная функция на l_p . Следовательно, функция f является всюду Гато-дифференцируемой, и из замечания во введении следует, что наша функция всюду компактно дифференцируема.

Шаг 4. Функция f не является Фреше-дифференцируемой в нуле. Чтобы проверить это утверждение, положим $h_n = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}, 1/n, 0, \dots$. Тогда $\|h_n\| = 1/n \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\frac{\|f(h_n)\|}{\|h_n\|} \not\rightarrow 0,$$

так как

$$\frac{\|f(h_n)\|}{\|h_n\|} = \frac{(1/n)^{1+1/n}}{1/n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. M. Borwein, M. Fabián, “On convex functions having points of Gateaux differentiability which are not points of Fréchet differentiability”, *Canad. J. Math.*, **45**:6 (1993), 1121–1134.
- [2] M. Fabian, P. Habala, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books Math., **8**, Springer-Verlag, New York, 2001.

- [3] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **22**:6 (1967), 201–260.
- [4] В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, “Различные определения производной в линейных топологических пространствах”, *УМН*, **23**:4 (1968), 67–116.
- [5] F. Andreu, J. M. Mazón, “On the compact differentiability in function spaces”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **85**:1 (1985), 109–117.
- [6] V. I. Averbukh, “Gâteaux differentiable convex functions are Michal-Bastiani differentiable”, *Convergence Structures and Applications to Analysis*, Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math. Naturwiss. Tech., **1979**, no. 4, Akademie-Verlag, Berlin, 1980, 7–9.
- [7] J. R. Giles, *Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions*, Res. Notes in Math., **58**, Pitman, Boston, MA, 1982.

Т. Кондерла

Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Opava,
Czech Republic

E-mail: Tomas.Konderla@math.slu.cz

Поступило

13.04.2009