Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мафи, Х. Сареми, Конечность градуированных модулей обобщенных локальных когомологий, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 689–694

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:30:31

Конечность градуированных модулей обобщенных локальных когомологий

А. Мафи, Х. Сареми

Рассматриваются два конечнопорожденных градуированных модуля над однородным нетеровым кольцом $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$ с локальным основным кольцом $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ и иррелевантным идеалом R_+ . Изучаются модули обобщенных локальных когомологий $H_b^i(M, N)$ относительно идеала $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 + R_+$, где $\mathfrak{b}_0$ – идеал кольца R_0 . Доказано, что если $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 \leq 1$, то имеет место один из следующих случаев: либо R -модули $H_b^i(M, N)/\mathfrak{a}_0 H_b^i(M, N)$, где $\sqrt{\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0} = \mathfrak{m}_0$, артиновы для всех $i \geq 0$, либо множества $\text{Ass}_{R_0}(H_b^i(M, N)_n)$ асимптотически устойчивы при $n \rightarrow -\infty$ для всех $i \geq 0$. Более того, если $H_b^j(M, N)_n$ – конечнопорожденный R_0 -модуль для любых $n \leq n_0$ и $j < i$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $i \in \mathbb{N}_0$, то множество $\text{Ass}_{R_0}(H_b^i(M, N)_n)$ конечно для любого $n \leq n_0$.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8908

1. Введение. Всюду ниже предполагается, что $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$ – однородное нетерово кольцо с основным кольцом R_0 . Таким образом, R_0 – нетерово кольцо, и кольцо R порождено (как R_0 -алгебра) конечным числом элементов кольца R_1 . Мы обозначаем иррелевантный идеал кольца R через $R_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$; для идеала $\mathfrak{b}_0$ кольца R_0 мы полагаем $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 + R_+$. (Символы $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$ используются для обозначения неотрицательных и положительных целых чисел соответственно; множество всех целых чисел мы обозначаем через $\mathbb{Z}$.) Пусть $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ и $N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} N_n$ – ненулевые конечнопорожденные градуированные R -модули.

Хорошо известно (см. [1; 12.3.6]), что i -й модуль локальных когомологий $H_b^i(N)$ модуля N относительно $\mathfrak{b}$ допускает естественную градуировку для каждого $i \in \mathbb{N}_0$. Конечность компонент градуировки модулей локальных когомологий была изучена в [2]–[9]. Джахангири и Закери [10] показали, что для каждого $i \in \mathbb{N}_0$ множество $\text{Ass}_{R_0}(H_b^i(N)_n)$ асимптотически устойчиво при $n \rightarrow -\infty$, где $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 \leq 1$ и $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ является локальным кольцом; это означает, что существует целое $n_0 \in \mathbb{Z}$, для которого $\text{Ass}_{R_0}(H_b^i(N)_n) = \text{Ass}_{R_0}(H_b^i(N)_{n_0})$ при всех $n \leq n_0$. В локальном случае обобщенные локальные когомологии описал Херцог [11], а в общем случае – Сузуки [12].

Цель этой статьи состоит в обобщении результатов, полученных в [10], на модули обобщенных локальных когомологий. Кроме того, мы изучаем артиновость фактор-модулей модулей обобщенных локальных когомологий.

2. Предварительные сведения. Следуя [7], вкратце напомним основные свойства градуированных модулей обобщенных локальных когомологий. Согласно [1; 12.2.8] модуль $H_b^0(M, N)$ градуирован, и для любого однородного гомоморфизма $f: N \rightarrow N'$ гомоморфизм $H_b^0(M, f): H_b^0(M, N) \rightarrow H_b^0(M, N')$ однороден (здесь под однородностью мы подразумеваем однородность степени нуль). Таким образом, $H_b^0(M, -)$ можно рассматривать как функтор из категории ${}^*\mathcal{C}(\mathcal{R})$ градуированных R -модулей и однородных гомоморфизмов в себя. Из результатов, полученных в [1; 12.2.8 и 12.3.1], вытекает, что $H_b^i(M, N)$ допускает естественную градуировку.

(а) Рассмотрим естественный однородный изоморфизм

$$H_b^0(M, N) \cong \Gamma_b(\text{Hom}(M, N)).$$

Заметим, что, забывая о градуировке на ${}^*\text{Hom}_R(M, N)$, мы получаем обычный Hom -модуль $\text{Hom}_R(M, N)$ (см. [13; с. 32–33]).

(b) Пусть $E^\bullet$ – инъективная резольвента модуля N . Согласно [12] имеем

$$H_b^i(M, N) \cong H^i(\Gamma_b(\text{Hom}_R(M, E^\bullet))) \cong H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_b(E^\bullet)))$$

для всех $i \in \mathbb{N}_0$.

(с) Из точной последовательности

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0$$

в ${}^*\mathcal{C}(\mathcal{R})$ вытекает длинная точная последовательность градуированных R -модулей и однородных гомоморфизмов

$$0 \rightarrow H_b^0(M, N_1) \rightarrow H_b^0(M, N_2) \rightarrow H_b^0(M, N_3) \rightarrow H_b^1(M, N_1) \rightarrow \dots$$

(d) Пусть $R' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R'_n$ – второе коммутативное нетерово кольцо и $f: R \rightarrow R'$ – плоский однородный гомоморфизм. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_0$ определен однородный изоморфизм

$$H_b^i(M, N) \otimes_R R' \cong H_{bR'}^i(M \otimes_R R', N \otimes_R R').$$

3. Результаты. Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ – локальное кольцо и $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 \leq 1$. Тогда кольца $H_{\mathfrak{m}_0 R}^i(H_b^j(M, N))$ артиновы для всех $j, i = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 = 0$, то доказывать нечего. Предположим, что $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 = 1$. Тогда существует $x \in \mathfrak{m}_0$, которое избегает все минимальные простые идеалы в идеале $\mathfrak{b}_0$, так что $\sqrt{\mathfrak{b}_0 + xR_0} = \mathfrak{m}_0$. Согласно лемме 3.1 из [14] существует точная последовательность градуированных модулей

$$H_b^{i-1}(M, N) \xrightarrow{f^{i-1}} H_b^{i-1}(M, N)_x \rightarrow H_{(\mathfrak{b}, x)}^i(M, N) \rightarrow H_b^i(M, N) \xrightarrow{f^i} H_b^i(M, N)_x,$$

в которой f^{i-1} и f^i – естественные гомоморфизмы. Из того, что

$$\begin{aligned} \text{coker}(f^{i-1}) &\cong H_{xR}^1(H_b^{i-1}(M, N)) \cong H_{\mathfrak{m}_0 R}^1(H_b^{i-1}(M, N)), \\ \ker(f^i) &\cong \Gamma_{xR}(H_b^i(M, N)) \cong \Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H_b^i(M, N)), \end{aligned}$$

мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H_{\mathfrak{m}_0 R}^1(H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N)) \rightarrow H_{(\mathfrak{b}, x)}^i(M, N) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)) \rightarrow 0.$$

Поскольку $\sqrt{(\mathfrak{b}, x)} = \mathfrak{m}_0 R + R_+$ – максимальный идеал, R -модуль $H_{(\mathfrak{b}, x)}^i(M, N)$ является артиновым, что и требовалось.

ЛЕММА 3.2. Пусть $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ – локальное кольцо и $\mathfrak{a}_0$ – идеал модуля R_0 , для которого $\sqrt{\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0} = \mathfrak{m}_0$. Тогда R -модули $H_{\mathfrak{b}}^i(M, \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N))$ артиновы для всех $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2.1.6 в [1] вытекает существование инъективной резольвенты $E^\bullet$ модуля $\Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N)$, в которой каждый член является R -модулем $\mathfrak{a}_0 R$ -крючения. Согласно лемме 2 из [15] имеем

$$H_{\mathfrak{b}}^i(M, \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N)) \cong H_{\mathfrak{m}_0 + R_+}^i(M, \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N))$$

для всех $i \geq 0$, так что требуемое утверждение вытекает из [16; лемма 3.4].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ – локальное кольцо и $\mathfrak{a}_0$ – идеал в R_0 , для которого $\sqrt{\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0} = \mathfrak{m}_0$. Если $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 \leq 1$, то R -модули $H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)/\mathfrak{a}_0 H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)$ артиновы для всех $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\overline{N} = N/\Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N)$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N) \rightarrow N \rightarrow \overline{N} \rightarrow 0$$

получается точная последовательность

$$H_{\mathfrak{m}_0 + R_+}^i(M, \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N)) \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^i(M, \overline{N}) \rightarrow H_{\mathfrak{m}_0 + R_+}^{i+1}(M, \Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N)).$$

Из леммы 3.2 вытекает, что если кольцо $H_{\mathfrak{b}}^i(M, \overline{N})/\mathfrak{a}_0 H_{\mathfrak{b}}^i(M, \overline{N})$ артиново, то кольцо $H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)/\mathfrak{a}_0 H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)$ тоже артиново. Значит, можно считать, что $\Gamma_{\mathfrak{a}_0 R}(N) = 0$ и $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 = 1$. Следовательно, существует N -регулярный элемент $x_0 \in \mathfrak{a}_0$, который избегает все минимальные простые идеалы кольца R_0 . Точная последовательность

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{x} N \rightarrow N/xN \rightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность

$$H_{\mathfrak{m}_0 + R_+}^{i-1}(M, N/xN) \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \xrightarrow{f} H_{\mathfrak{m}_0 + R_+}^{i+1}(M, N/xN).$$

Из этой точной последовательности получается точная последовательность

$$R_0/\mathfrak{a}_0 \otimes_{R_0} H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \xrightarrow{x} R_0/\mathfrak{a}_0 \otimes_{R_0} H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \rightarrow R_0/\mathfrak{a}_0 \otimes_{R_0} \operatorname{im} f \rightarrow 0.$$

Поскольку $x \in \mathfrak{a}_0$, отображение умножения “ $\times$ ” нулевое. Значит, существует изоморфизм $R_0/\mathfrak{a}_0 \otimes_{R_0} H_{\mathfrak{b}}^i(M, N) \cong R_0/\mathfrak{a}_0 \otimes_{R_0} \operatorname{im} f$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ – локальное кольцо и $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 = 1$. Тогда множество $\operatorname{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$ асимптотически устойчиво при $n \rightarrow -\infty$ для каждого $i \in \mathbb{N}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 $\Gamma_{\mathfrak{m}_0 R}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N))$ является артиновым R -модулем, поэтому из замечания 4.2 в [3] вытекает, что либо $\mathfrak{m}_0 \in \text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$ для всех $n \ll 0$, либо $\mathfrak{m}_0 \notin \text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$ для всех $n \ll 0$. Значит, достаточно показать, что $\text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n) \setminus \{\mathfrak{m}_0\}$ асимптотически устойчиво при $n \rightarrow -\infty$. Пусть $\mathfrak{p}_0$ – минимальный простой идеал кольца R_0 . Из свойств замены градуированного плоского основного кольца вытекает, что

$$H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_{\mathfrak{p}_0} \cong H_{\mathfrak{b} R_{\mathfrak{p}_0}}^i(M_{\mathfrak{p}_0}, N_{\mathfrak{p}_0}) \cong H_{\mathfrak{p}_0 R_{\mathfrak{p}_0} + (R_{\mathfrak{p}_0})_+}^i(M_{\mathfrak{p}_0}, N_{\mathfrak{p}_0});$$

последний модуль является градуированным артиновым $R_{\mathfrak{p}_0}$ -модулем, а значит, либо

$$\mathfrak{p}_0(R_0)_{\mathfrak{p}_0} \in \text{Ass}_{(R_0)_{\mathfrak{p}_0}}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)_{\mathfrak{p}_0}$$

для всех $n \ll 0$, либо

$$\mathfrak{p}_0(R_0)_{\mathfrak{p}_0} \notin \text{Ass}_{(R_0)_{\mathfrak{p}_0}}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)_{\mathfrak{p}_0}$$

для всех $n \ll 0$. Более того, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $\mathfrak{p}_0 \in \text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$, если и только если $\mathfrak{p}_0(R_0)_{\mathfrak{p}_0} \in \text{Ass}_{(R_0)_{\mathfrak{p}_0}}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)_{\mathfrak{p}_0}$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Следуя [2], рассмотрим градуированный R -модуль $T = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} T_n$. Будем говорить, что модуль T *ручной*, или *асимптотически без щелей*, если существует такое $m \in \mathbb{Z}$, что $T_n = 0$ для всех $n \leq m$ или $T_n \neq 0$ для всех $n \leq m$. Отметим, что любой асимптотически устойчивый модуль асимптотически не имеет щелей.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ – локальное кольцо и $\dim R_0/\mathfrak{b}_0 = 1$. Тогда R -модуль $H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)$ асимптотически не имеет щелей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $H_{\mathfrak{b}}^j(M, N)_n$ – конечнопорожденный R_0 -модуль для любого $n \leq n_0$ и любого $j < i$. Тогда множество $\text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$ конечно для любого $n \leq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по i . Случай $i = 0$ очевиден. Предположим, что $i > 0$ и требуемое утверждение уже доказано для меньших i . Положим $\overline{N} = N/\Gamma_{\mathfrak{b}_0}(N)$. Из точной последовательности

$$H_{R_+}^j(M, \Gamma_{\mathfrak{b}_0}(N))_n \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^j(M, N)_n \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^j(M, \overline{N})_n \rightarrow H_{R_+}^{j+1}(M, \Gamma_{\mathfrak{b}_0}(N))_n$$

и теоремы 3.2 из [7] вытекает, что $H_{\mathfrak{b}}^j(M, \overline{N})_n$ является конечнопорожденным R_0 -модулем для любых $n \leq n_0$ и $j < i$. Следовательно, заменяя N на $\overline{N}$, мы можем считать, что на N существует ненулевой дивизор $x \in \mathfrak{b}_0$. Применяя локальные когомологии относительно $\mathfrak{b}$ к точной последовательности

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{x} N \rightarrow N/xN \rightarrow 0,$$

получаем точную последовательность R_0 -модулей

$$H_{\mathfrak{b}}^{j-1}(M, N)_n \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^{j-1}(M, N/xN)_n \xrightarrow{f_n^{j-1}} H_{\mathfrak{b}}^j(M, N)_n \xrightarrow{x} H_{\mathfrak{b}}^j(M, N)_n$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что модуль $H_{\mathfrak{b}}^j(M, N/xN)_n$ конечно порожден для всех $j < i - 1$ и $n \leq n_0$. По предположению индукции $\text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N/xN)_n)$ конечно для каждого $n \leq n_0$. Покажем, что

$$\text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n) \subseteq \text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N/xN)_n)/\ker f_n^{j-1}.$$

Для этого предположим, что $\mathfrak{p}_0 = (0 :_{R_0} y)$, где $y \in H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n$, принадлежит множеству $\text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n)$. Тогда $R_0 y$ – конечнопорожденный подмодуль модуля $H_{\mathfrak{b}}^i(M, N)_n$, так что существует $t \in \mathbb{N}$, для которого $x^t R_0 y = 0$. Значит, $x \in \mathfrak{p}_0$ и

$$\mathfrak{p}_0 \in \text{Ass}_{R_0}(0_{H_{\mathfrak{b}}^j(M, N)_n} x) = \text{Ass}_{R_0}(\text{im } f_n^{j-1}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{p}_0 \in \text{Ass}_{R_0}(H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N/xN)_n)/\ker f_n^{j-1},$$

что и требовалось. Чтобы доказать предложение, осталось применить функтор $\text{Hom}_{R_0}(R_0/\mathfrak{b}_0, -)$ к точной последовательности

$$0 \rightarrow \ker f_n^{j-1} \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N/xN)_n \rightarrow H_{\mathfrak{b}}^{i-1}(M, N/xN)_n/\ker f_n^{j-1} \rightarrow 0$$

и вспомнить, что $\ker f_n^{j-1}$ – конечнопорожденный R_0 -модуль.

Авторы в высшей степени признательны рецензенту за полезные предложения и замечания, которые помогли улучшить изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. P. Brodmann, R. Y. Sharp, *Local Cohomology. An Algebraic Introduction with Geometric Applications*, Cambridge Stud. Adv. Math., **60**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] M. Brodmann, M. Hellus, “Cohomological patterns of coherent sheaves over projective schemes”, *J. Pure Appl. Algebra*, **172**:2-3 (2002), 165–182.
- [3] M. Brodmann, “Asymptotic behaviour of cohomology: tameness, supports and associated primes”, *Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Contemp. Math., **390**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 31–61.
- [4] M. Brodmann, S. Fumasoli, R. Tajarod, “Local cohomology over homogeneous rings with one-dimensional local base ring”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:10 (2003), 2977–2985.
- [5] K. Khashyarmanesh, A. Abbasi, “On the asymptotic behaviour of associated primes of generalized local cohomology modules”, *J. Aust. Math. Soc.*, **83**:2 (2007), 217–225.
- [6] C. Rotthaus, L. M. Şega, “Some properties of graded local cohomology modules”, *J. Algebra*, **283**:1 (2005), 232–247.
- [7] K. Khashyarmanesh, “Associated primes of graded components of generalized local cohomology modules”, *Comm. Algebra*, **33**:9 (2005), 3081–3090.
- [8] A. Mafi, “On minimax and graded local cohomology modules”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **35**:5 (2011), 805–812.
- [9] A. Mafi, H. Saremi, “Artinianness of certain graded local cohomology modules”, *Canad. Math. Bull.*, **55**:1 (2012), 153–156.
- [10] M. Jahangiri, H. Zakeri, “Local cohomology modules with respect to an ideal containing the irrelevant ideal”, *J. Pure Appl. Algebra*, **213**:4 (2009), 573–581.
- [11] J. Herzog, *Komplexe, auflösungen und dualität in der lokalen algebra*, Habilitationsschrift, Universität Regensburg, 1970.

- [12] N. Suzuki, “On the generalized local cohomology and its duality”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:1 (1978), 71–85.
- [13] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Stud. Adv. Math., **39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [14] K. Divaani-Aazar, A. Hajikarimi, “Generalized local cohomology modules and homological Gorenstein dimensions”, *Comm. Algebra*, **39**:6 (2011), 2051–2067.
- [15] J. Amjadi, R. Naghipour, “Cohomological dimension of generalized local cohomology modules”, *Algebra Colloq.*, **15**:2 (2008), 303–308.
- [16] A. Mafi, “Matlis reflexive and generalized local cohomology modules”, *Czechoslovak Math. J.*, **59**:4 (2009), 1095–1102.

А. Мафи

E-mail: a_mafi@ipm.ir

Поступило

04.06.2010

Х. Сареми

E-mail: herosaremi@yahoo.com